



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

Заметим, что  $ac \geq 7^{37} \cdot k$ , где  $k \in \mathbb{N}$   
 Пусть степень входящих 7 в  $ac = 37$ , т.к. меньше быть не может (из неравенства)  
 тогда  $ac : 2^{20}$   
 $bc : 2^{17}$   
 $ab : 2^{14}$

Пусть степень входящих  $2^{ki}$  в число  $b =$ :

- 1)  $0 \Rightarrow$  ст. вх.  $2^{ki}$  в  $c \geq 17$ ; в  $a \geq 14$ ;  $\sum$  степеней  $2^{ki} \geq 31$
- 2)  $1 \Rightarrow 11-11=0$ .  $c \geq 16$ ;  $a \geq 13$ ;  $\sum \geq 30$
- 3)  $2 \Rightarrow \dots c \geq 15$ ;  $a \geq 12 \Rightarrow \sum \geq 29$
- 4)  $3 \Rightarrow \dots c \geq 14$ ;  $a \geq 11 \Rightarrow \sum \geq 28$
- 5)  $4 \Rightarrow \dots c \geq 13$ ;  $a \geq 10 \Rightarrow \sum \geq 27$
- 6)  $5 \Rightarrow \dots c \geq 12$ ;  $a \geq 9 \Rightarrow \sum \geq 26$
- 7)  $6 \Rightarrow \dots c \geq 11$ ;  $a \geq 8$ , но при минимальных  $c$  и  $a$ ;  $ca = 2^{19} \cdot 2^{20}$   
 $\Rightarrow$  7 пункта быть не может

( $c \geq k$ ;  $a \geq m$  знают, что степень двойки, входящий в число  $c$  и  $a \geq k$  и  $m$  соответств.)

$\Rightarrow$  min  $\sum$  степеней  $2^{ki}$  в числе  $abc = 26$   
 $\Rightarrow$  min  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

пример:

~~$a = 2^{14} \cdot 7^{10}$ ,  $b = 2^{17} \cdot 7^{17}$ ,  $c = 2^{20} \cdot 7^{37}$~~

$b = 2^5$ ;  $a = 2^9 \cdot 7^{20}$ ;  $c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

$ab = 2^{14} \cdot 7^{20} : 2^{14} \cdot 7^{10}$   
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{17} : 2^{17} \cdot 7^{17}$   
 $ac = 2^{21} \cdot 7^{37} : 7^{37} \cdot 2^{20}$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ:  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} \cdot \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

нужно  $a+b \div k$ , тогда  $a^2-6ab+b^2 \div k$ .

$$(a+b)^2 \div k \Rightarrow \begin{cases} a^2+2ab+b^2 \div k & (1) \\ a^2-6ab+b^2 \div k & (2) \end{cases}$$

вычитаем из (2) - (1)

$$\begin{aligned} -6ab - 2ab &\div k \\ 8ab &\div k \\ a+b &\div k. \end{aligned}$$

нужно  $a+b \div 8ab$ , тогда  $a+b \div a$ , но т.к.  $(a,b)=1$ ;  $b \nmid a$ ,  
но  $a \div a \Rightarrow$  такого быть не может.

тогда нужно  $8ab \div a+b$

$$8ab = k(a+b)$$

$$8ab = ka + kb$$

$$b(8a - k) = ka$$

$$b = \frac{ka}{8a-k} \in \mathbb{N}$$

$$b = -a + \frac{8a^2}{8a-k}$$

$$8a^2 \div 8a-k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

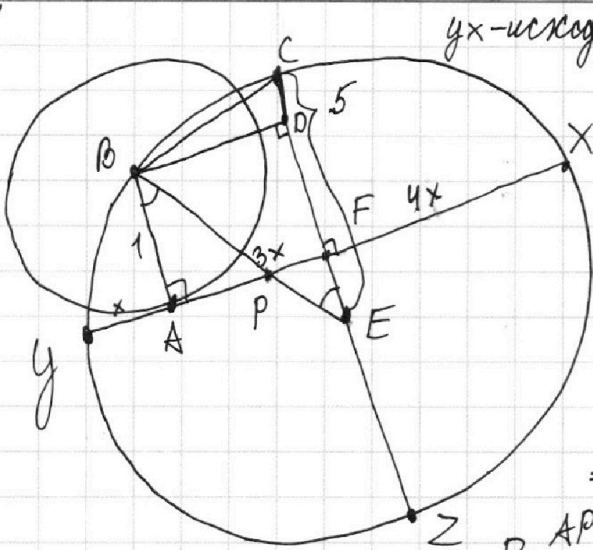
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$



*yx-исходная хорда.*

$$EC = EB = 5.$$

$$AB = 1.$$

Пусть  $PB = k$ .  
 тогда  $AP^2 = PB^2 - AB^2 = k^2 - 1$ .  
 $\triangle BDE \sim \triangle PAB$

$$\frac{BD}{PA} = \frac{DE}{AB} = \frac{BE}{PB}$$

$$\frac{DE}{1} = \frac{5}{k} \Rightarrow DE = \frac{5}{k}$$

$$\Rightarrow CD = 5 - DE = 5 \left( \frac{k-1}{k} \right)$$

$$AP = \sqrt{BP^2 - 1} = \sqrt{k^2 - 1}$$

$$\frac{BD}{AP} = \frac{BE}{PB} \Rightarrow BD = \frac{5 \cdot \sqrt{k^2 - 1}}{k}$$

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = \frac{25(k^2 - 1)}{k^2} + 25 \frac{(k-1)^2}{k^2} = \frac{25}{k^2} (k^2 - 1 + k^2 - 2k + 1) = \frac{50(k^2 - k)}{k^2}$$

$$= \frac{50(k-1)}{k} \quad BD = AF = 3x = \frac{5\sqrt{k^2 - 1}}{k} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{k^2 - 1}}{3k}$$

$$PE = 5 - BP = 5 - k \Rightarrow \frac{FE}{1} = \frac{PE}{BP} \Rightarrow FE = \frac{5-k}{k}$$

$$CF = 5 - \frac{5-k}{k} = \frac{6k-5}{k}$$

$$4x \cdot 4x = CF \cdot FZ = \frac{6k-5}{k} \cdot \left( 5 + \frac{5-k}{k} \right) = \frac{(6k-5)(4k-5)}{k^2}$$

$$16 \frac{25(k^2 - 1)}{(3k)^2} = \frac{(6k-5)(4k-5)}{k^2}$$

- Заметим, что это квадратное уравнение относительно  $x$ , для которого, мы сможем найти  $x \Rightarrow$  найдем  $yx$ .

$$\frac{16 \cdot 25(k^2 - 1)}{9} = \frac{24k^2 - 50k + 25}{1}$$

$$16 \cdot 25(k^2 - 1) = 9 \cdot 24k^2 - 450k + 225$$

$$k^2 (16 \cdot 25 - 9 \cdot 24) + 450k - 16 \cdot 25 - 225 = 0$$

$$184k^2 + 450k - 625 = 0$$

$$D = 662500 = 5 \cdot 10 \sqrt{265}$$

$$k = \frac{-450 \pm 50 \sqrt{265}}{368}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.  $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$   $\begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ (2x-3)(x-1) \end{cases}$   $\begin{cases} 2x^2+2x+1 \geq 0 \\ D=4-8 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{всегда } \geq 0$

Пусть  $2x^2+2x+1=a$ .

$\sqrt{a+2-7x} - \sqrt{a} = 2-7x$

$\sqrt{a+2-7x} = \sqrt{a} + 2-7x$

Возведем в квадрат:

$a+2-7x = a + (2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{a}$

$(2-7x)^2 + (2-7x)(2\sqrt{a}-1) = 0$

1)  $2-7x=0$

$x = \frac{2}{7}$  подставим:  $\sqrt{\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3} - \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{4}{7} + 1} = 2-2$

$2-7x + 2\sqrt{a}-1=0$

$7x-2 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}-1$

$7x-1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$49x^2-14x+1 = 8x^2+8x+4$

$41x^2-22x-3=0$

$D = 22^2 + 12 \cdot 41 = 484 + 492 = 976 = 16 \cdot 61$

$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82}$

$\frac{22+4\sqrt{61}}{82} = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \approx \frac{11+16}{41} =$

$= \frac{27}{41}$  - уд. усе.

$\Rightarrow \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$  тоже удов. усе.

Рассмотрим строгую:

$7x-1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$7x-1 \geq 0$

$x \geq \frac{1}{7}$ ;  $\frac{11-2\sqrt{61}}{41} < \frac{1}{7} \Rightarrow$  данный корень отпадает.

Рассмотрим строгую:

$2-7x + \sqrt{a} = \sqrt{a+2-7x}$

$2-7x + \sqrt{a} \geq 0$

$7x-2 \leq \sqrt{a}$

1)  $x \leq \frac{2}{7}$  (подходят)

2)  $x > \frac{2}{7}$ :

$49x^2-28x+4 \leq 2x^2+2x+1$

$47x^2-30x+3 \leq 0$

$x = \frac{30 \pm \sqrt{900-564}}{94} = \frac{30 \pm \sqrt{336}}{94} \approx \frac{30 \pm 18}{94}$

$x_1 > 7$  корень, полученный в п.2.

$x_1 = \frac{30+18}{94} = \frac{48}{94}$

$\frac{48}{94} > \frac{27}{41}$

$\frac{24}{47} > \frac{27}{41}$ , а это не так  $\Rightarrow$  корень не подходит.

Ответ:  $x = \frac{2}{7}$

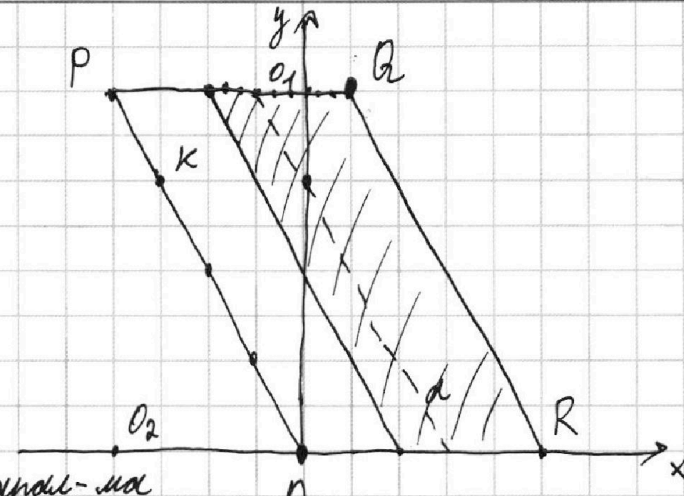
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

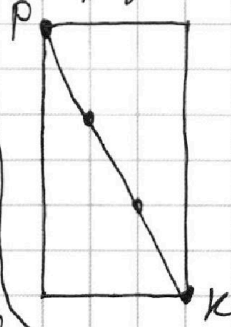
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Для начала найдем ка-во точек на границе нашего паралл-ма  
 $PO_1 = \frac{1}{2} PO_2 \Rightarrow PO_1$  проходит через т.К  
 Рассмотрим РК вблизи:

Заметим, что если зафиксируем т. В, то точки А, а точнее их координ. будут удовлетворять уравнению прямой.



Заметим, что на отр. РК лежит 2 точки с целочисл. координатами.  
 $\Rightarrow$  на пр. PQ лежит  $4 \cdot 3 + 1$  точек с целочисл. координ.

$$2x_2 - 2x_1 + 4y_2 - 4y_1 = 12$$

Рассмотрим т. Q. Пусть это наша т. В. тогда все точки, лежащие на прямой b удовлетворяют условию. Заметим, что пр. a || стороне параллелограмма  $\Rightarrow$  проходит так же через  $4 \cdot 3 + 1 = 13$  точек с целочисленными коорд.  $\Rightarrow$  для каждой т. В, лежащей в заштрихованной области, найдется 13 т. А. Если т. В не в заштрихованной обл., то т. А не суще.

Площадь заштрихов. области =  $(3 \cdot 3) \cdot (8 \cdot 3) = 9 \cdot 24 = 216$

По формуле Эйлера:  $P + \frac{i}{2} - 1 = 216$ , где P - # т. на границе.

$$P = 13 + 13 + 8 + 8 = 26 + 16 = 42$$

$$\frac{i}{2} = 217 - 42 = 175$$

$$\Rightarrow i = 350 \Rightarrow i \cdot 13 = 350 \cdot 13 = 4550$$

нар т. А и В

Ответ: 4550

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

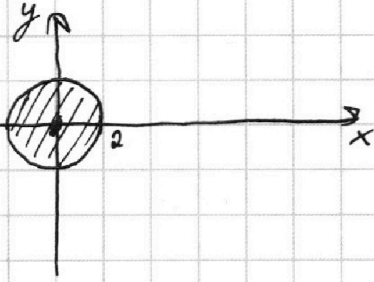


№6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Это уравнение окружности с центром в т.  $(-8; 0)$  и  $r=1$

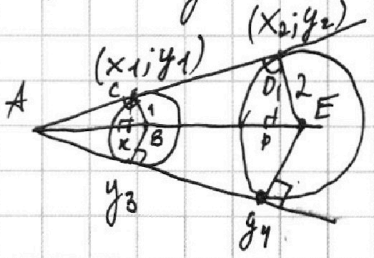
Это уравнение окружности с центром в т.  $(0; 0)$  и  $r=2$



Заметим, что первое уравнение — это прямая.

2-е неравенству удовлетворяет область штриховкой зона.

прямая должна иметь с 2-мя окружностями 2 общие точки  $\Rightarrow$  они должны являться касательной.



точки касания имеют коор.  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$

$\triangle ABC \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{CB}{DE} = \frac{AB}{AE}$

$BE = AB = 8$

Опустим высоту из т. C и т. D на AE = т. K и т. P.

$\frac{CK}{CB} = \frac{AC}{AB}; \frac{DP}{DE} = \frac{AD}{AE}$

$$CK = \frac{AC \cdot 1}{8} = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$DP = \frac{AD \cdot 2}{16} = \frac{2\sqrt{63}}{8}$$

$$AC^2 + CB^2 = AB^2$$

$$AC = \sqrt{63}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{63}}{8}; y_2 = \frac{2\sqrt{63}}{8}$$

$$AD^2 + DE^2 = AE^2$$

$$AD = 2\sqrt{63}$$

$$x_1 = 8 + KB = -8 + \sqrt{1 - \frac{63}{64}} = -8 + \frac{1}{8} = -8\frac{1}{8}$$

$$x_2 = -\left(\sqrt{4 - \frac{4 \cdot 63}{64}}\right) = -\sqrt{\frac{256 - 252}{64}} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$y_3$  и  $y_4$  симметричны  $y_1$  и  $y_2$  — соответственно.

подставляем в формулу 1 из системы:

$$\begin{cases} a(-8\frac{1}{8}) - \frac{\sqrt{63}}{8} + 10b = 0 \\ a(-\frac{1}{4}) - \frac{2\sqrt{63}}{8} + 10b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2(-8\frac{1}{8}) - (-\frac{1}{4}))a + 10b = 0 \\ (2(-\frac{65}{8}) + \frac{1}{4})a + 10b = 0 \\ (-\frac{64}{4})a + 10b = 0 \\ 10b = 16a \end{cases}$$

$$a(-8\frac{1}{8}) - \frac{\sqrt{63}}{8} + 16a = 0$$

$$a(16 - \frac{65}{8}) = \frac{\sqrt{63}}{8} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{63}}{8 \cdot \frac{63}{8}} = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

при  $y_3$  и  $y_4$ , коэф.  $a = -\frac{1}{\sqrt{63}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

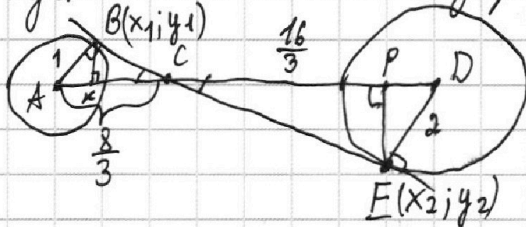
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 (продолжение)

пусть касательные внутренние:  $\frac{16}{3}$  и  $\frac{8}{3}$  из подобия  $\triangle$  (см. рисунок)



(BK - высота - PE)

$$\frac{BK}{AB} = \frac{BC}{AC}$$

$$BK = \frac{BC \cdot 1}{\frac{8}{3}}$$

$$BC^2 = \frac{64}{9} - \frac{9}{9} = \frac{55}{9}$$

$$BC = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$\Downarrow BK = \frac{\sqrt{55}}{8} = 4$$

$$(x_1 + 8)^2 + y_1^2 = 1$$

$$(x_1 + 8)^2 = 1 - \frac{55}{64} = \frac{9}{64}$$

$$(x_1 + 8)^2 = \frac{9}{64} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{8} - \frac{64}{8} = -\frac{61}{8}; y_1 = \frac{\sqrt{55}}{8};$$

$$\frac{PE}{DE} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow PE = \frac{CE \cdot DE}{CD} = \frac{2CE}{CD} \text{ (по подобию)}; PE = 2BK = \frac{\sqrt{55}}{4}$$

$$x_2^2 + \frac{55}{16} = 4$$

$$x_2^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{4} \text{ (отриц. зн. по рисунку)}; y_2 = -\frac{\sqrt{55}}{4}$$

подставим  $(y_1, x_1)$  и  $(y_2, x_2)$  в 1<sup>ое</sup> уравн. прямой.

$$\left. \begin{aligned} a\left(-\frac{61}{8}\right) - \frac{\sqrt{55}}{8} + 10b &= 0 \\ a\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{55}}{4} + 10b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(-\frac{61}{4}\right)a + 20b + \left(-\frac{3}{4}\right)a + 10b = 0$$

$$\left(-\frac{64}{4}\right)a = -30b$$

$$16a = 30b$$

$$10b = \frac{16}{3}a$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{3}{4}\right)a + \frac{\sqrt{55}}{4} + \frac{16}{3}a = 0.$$

$$a\left(\frac{16}{3} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{\sqrt{55}}{4}$$

$$a\left(\frac{64-9}{12}\right) = -\frac{\sqrt{55}}{4} \Rightarrow a = -\frac{12\sqrt{55}}{4 \cdot 55} = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$

при ~~н~~ симметричны  $y_1, y_2$  относительно прямой OX

значения  $a$  стоят противоположными по знаку.

$$\Rightarrow \text{Ответ: } a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}; a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Р.  $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} ab &: 2^{11} \cdot 7^{10} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} abc &: 2^{a_1} \cdot 7^{a_2} \cdot k \\ a &= 2^{a_1} \cdot 7^{a_2} \cdot k \\ b &= 2^{b_1} \cdot 7^{b_2} \cdot p \\ c &= 2^{c_1} \cdot 7^{c_2} \cdot p \end{aligned}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\alpha + 2 - 7x = (2 - 7x)^2 + \alpha + \sqrt{\alpha^2}$$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 14 \\ b_1 + c_1 = 17 \\ a_1 + c_1 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b_1 = \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a^2 b^2 c^2 &: 2^{20} \cdot 7^{37} \\ abc &: 2^{10} \cdot 7^3 \end{aligned}$$

$\sqrt{4}$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\sqrt{2(x^2-2x+1)-x+1} - \sqrt{2(x^2+2x+1)-2x-1} = 2-7x$$

$$\sqrt{2(x-1)^2-(x-1)} - \sqrt{2(x+1)^2-(2x+1)} = 2-7x$$

$$\begin{aligned} D &= 25 - 24 = 1 \\ x &= \frac{5 \pm 1}{4} = 1 \end{aligned}$$

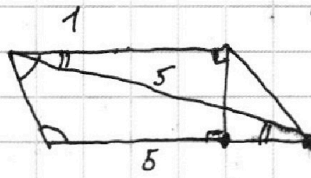
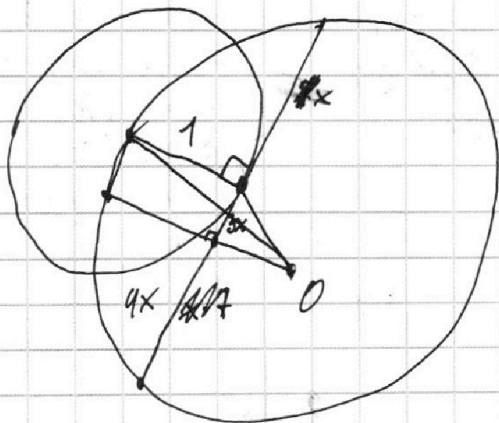
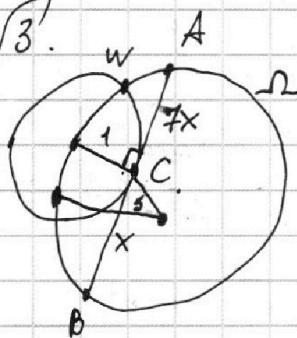
$$D = 4 - 8$$

$$\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{x^2+(x+1)^2} = 2-7x$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + x^2 - 3x + 2 \\ (x-1)^2 + (x^2 - 2x + 1) \end{aligned}$$

$$\frac{27}{41}$$

$\sqrt{3}$



$\sqrt{2}$

$$\frac{a}{b} - \text{н.с.} = \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

7.

$$\frac{27}{41} \quad \frac{48}{94} = \frac{24}{47}$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{(2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)} = 4 - 28x$$

$$45x^2 - 25x = -2\sqrt{(2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)}$$

$$5x(9x - 5) = -2\sqrt{\dots}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2(x^2 - 2x + 1) + 6x - 1$$

$$2(x^2 - 2x + 1) - x - 1$$

$$\sqrt{\alpha + 2 - 7x} - \sqrt{\alpha} = 2 - 7x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{a-7x+2} - \sqrt{a} = 2-7x.$$

$$a - (7x+2) = (2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{a} + a$$

$$\sqrt{5}. (2-7x)^2 + (2-7x)(2\sqrt{a}+1) = 0.$$

$$\begin{cases} (2-7x) = 0 \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$2-7x = -2\sqrt{a}-1.$$

$$2-7x+1 = -2\sqrt{a}.$$

$$7x-3 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}.$$

$$49x^2 - 92x + 9 = 8x^2 + 8x + 4.$$

$$41x^2 - 50x + 5 = 0.$$

$$D = 2500 - 20 \cdot 41 = 820$$

$$\frac{-1680 \pm \sqrt{820}}{82}$$

$$\frac{(2x-3)(x-1)}{x}$$

$$2x^2 + 2x + 17$$

$$\frac{90}{32}$$

$$\frac{10}{32}$$

$$\frac{47}{12} \quad (23-29)$$

$$+ 94$$

$$\frac{47}{56} \quad 4$$

$$16 \cdot 105.$$

$$x = \frac{50 \pm 4\sqrt{105}}{82}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \quad x = \frac{30 \pm (23-24)}{94}$$

$$a+b : k.$$

$$a^2+2ab+b^2 : k^2$$

$$2(x_2-x_1) + (y_2-y_1) = 12. \quad a^2-6ab+b^2 : k$$

$$\begin{aligned} -4ab : k. & \quad \frac{99+4\sqrt{61}}{82} \\ 4ab : k & \end{aligned}$$

$$a+b : k.$$

$$564$$

$$\frac{11}{11} \quad 484$$

$$\frac{12}{121} \quad \frac{12}{41} \quad 288$$

$$+ \frac{12}{48} \quad \frac{18}{18} \quad 18$$

$$+ \frac{12}{48} \quad \frac{18}{18} \quad 18$$

$$\frac{22}{44} \quad \frac{144}{492} \quad \frac{144}{18}$$

$$+ \frac{12}{48} \quad \frac{18}{18} \quad 18$$

$$\frac{16}{16} \quad \frac{16}{16} \quad 16$$

$$\frac{16}{16} \quad \frac{16}{16} \quad 16$$

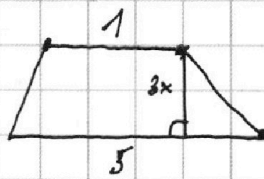
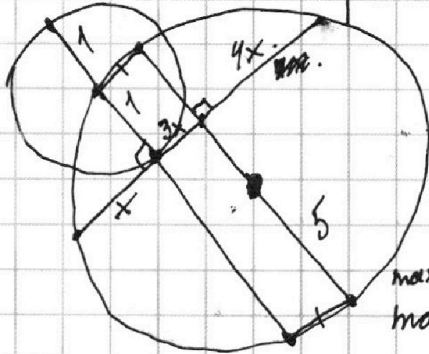
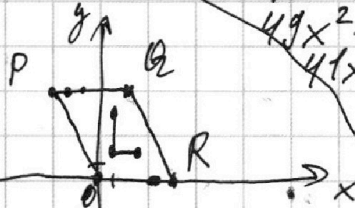
$$\frac{16}{16} \quad \frac{16}{16} \quad 16$$

$$\frac{16}{16} \quad \frac{16}{16} \quad 16$$

$$\frac{16}{16} \quad \frac{16}{16} \quad 16$$

$$\frac{16}{16} \quad \frac{16}{16} \quad 16$$

$$\frac{16}{16} \quad \frac{16}{16} \quad 16$$



$$\max x_2 - x_1 = 27$$

$$\max y_2 - y_1 = 24$$

$$x_2 - x_1 = 10$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$7x - 170$$

$$x \geq \frac{1}{7}$$



$$a = 2 \cdot \left( \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \right)^2 + 2 \left( \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \right) \sqrt{a} \geq 0$$

$$2-7x \geq \sqrt{a} \geq 7x-2 \quad \begin{aligned} 7x-270 \\ 7x \geq 2 \\ x \geq \frac{2}{7} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

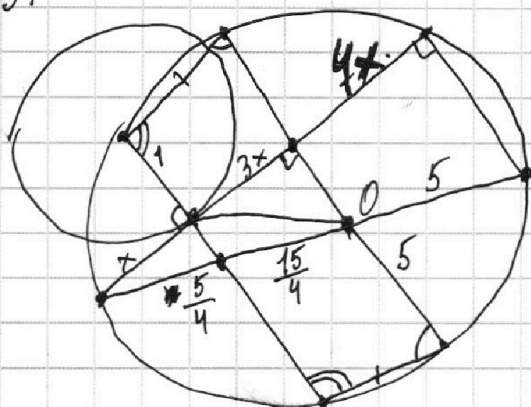
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$



н.п.

$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \end{aligned}$$

$$abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$b = 1.$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \quad \times$$

$$c = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$abc = 2^{27} \cdot 7^{37}$$

$$b = 2$$

$$a \geq 2^{13} \cdot 7^{10}$$

$$c \geq 2^{16} \cdot 7^{17}$$

$$abc \geq 2^{31} \cdot 7^{27}$$

$$\begin{array}{r} \times 350 \\ 13 \\ \hline 1050 \\ + 35 \\ \hline 4550 \end{array}$$

$$\frac{k}{x} = \frac{5}{4x}$$

$$4kx = 5x$$

$$k = \frac{5}{4}$$

$\sqrt{6}$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 = 1) \cap (x^2 + y^2 = 4) \end{cases}$$

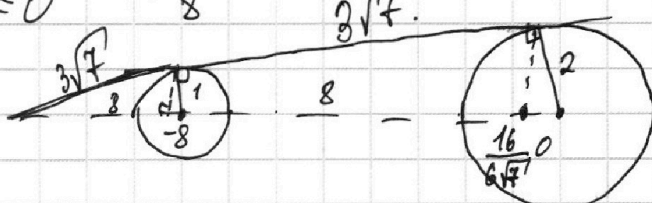
$$((x+8)^2 + y^2 = 1) \cap (x^2 + y^2 = 4) \leq 0$$

$$\frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{1}{x}$$

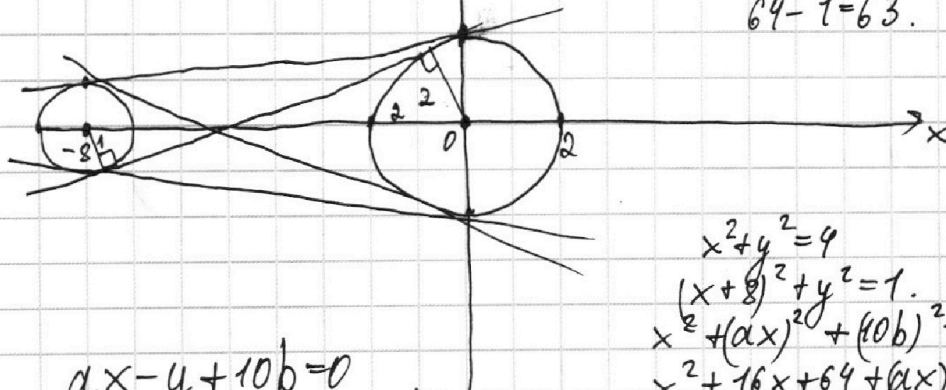
$$x = \frac{8}{3\sqrt{7}}$$

н.п.

$$9 \cdot 24 = 216$$



$$64 - 1 = 63.$$



$$\begin{aligned} ax - y + 10b &= 0 \\ y &= ax + 10b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ (x+8)^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 + (ax)^2 + (10b)^2 + 20abx &= 4 \\ x^2 + 16x + 64 + (ax)^2 + 20abx + 100b^2 &= 1 \\ x^2(1+a^2) + x(20ab) + (100b^2 - 4) &= 0 \end{aligned}$$



$$P + \frac{i}{2} - 1 = 216.$$

$$46 - 1 + \frac{i}{2} = 216.$$

$$2(13+10) + \frac{i}{2} - 1 = 216.$$

$$45 + \frac{i}{2} = 216.$$

$$\frac{-216}{45} = 342.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

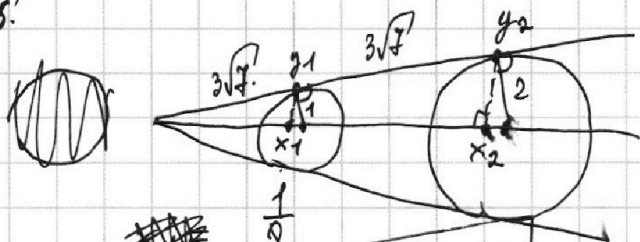
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5.



$$x_1 = -8 \frac{1}{8}$$

$$x_2 = -\frac{2}{8} \cdot \frac{256}{252}$$

$$\frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{8}{3\sqrt{7}}$$

$$x = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\frac{64}{63} + \frac{63}{64}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{6\sqrt{7}}{16}$$

$$x = \frac{6\sqrt{7}}{8}$$

~~x1 + x2~~

$$1 - (x+8)^2 = y^2$$

$$1 - \frac{1}{64} = y^2$$

$$y_1 = \pm \frac{3\sqrt{7}}{8} \quad y_2 = \pm \frac{6\sqrt{7}}{8}$$

$$\frac{36 \cdot 7}{64} + k^2 = 4$$

$$\frac{252}{64} + k^2 = 256$$

$$\frac{4}{64} = \frac{2}{8}$$

$$\begin{cases} a \cdot (-\frac{65}{8}) - \frac{3\sqrt{7}}{8} + 10b = 0 \\ a(-\frac{2}{8}) - \frac{6\sqrt{7}}{8} + 10b = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{65}{8}a + 16a - \frac{3\sqrt{7}}{8} = 0$$

$$\frac{(128-65)a}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$-2a(\frac{65}{8}) + 10b + \frac{2}{8}a = 0$$

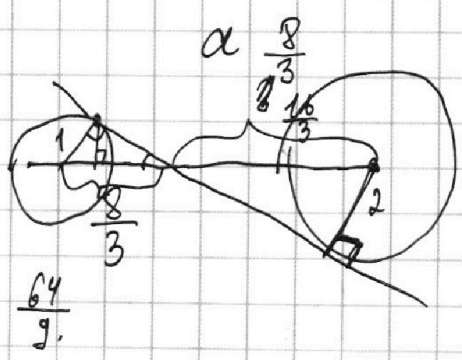
$$a = \frac{3\sqrt{7}}{63}$$

$$-\frac{65}{4}a + \frac{1}{4}a + 10b = 0$$

$$-16a + 10b = 0$$

$$10b = 16a$$

$$5b = 8a$$



$$\frac{64}{9}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

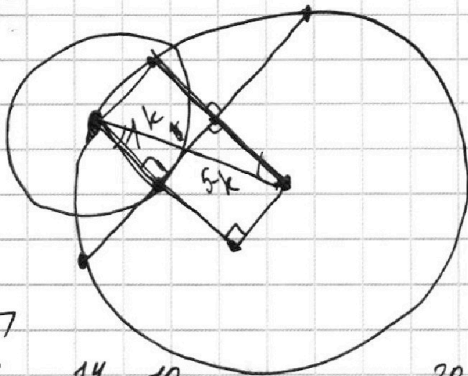
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

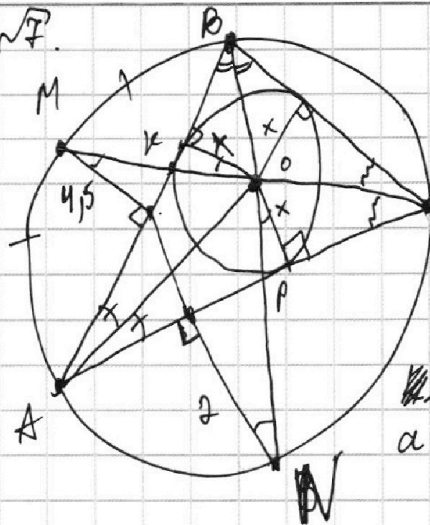
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№37



№7



$$\frac{2x}{5} = \frac{MK}{KO}$$

$$\frac{x}{4.5} = \frac{MK}{KO}$$

$$\frac{BP}{PN} = \frac{x}{2}$$

$$a(k-8b) + kb$$

$$8ab = k(a+b)$$

$$ka + kb - 8ab = 0$$

№7

$$ab \geq 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$2^{21} \cdot 7^{37}$$

$$14 + 17 \leq 20 + k, b = 2$$

$$c \geq 2^{16} \cdot 7^{17}$$

ab  
bc

$$ac \geq 2$$

$$ac \geq 2^{20}$$

$$bc \geq 2^{17}$$

$$ab \geq 2^{14}$$

$$b = 2$$

$$ac = 7^{37}$$

$$1) b = 2$$

$$c \geq 2^{16} \cdot 7^{17}$$

$$a \geq 2^{13}$$

$$2 \cdot 2^{(17-k)} \cdot 2^{(14-k)}$$

$$k = 8a - 1$$

$$ka \mid \frac{8a-k}{8}$$

$$b = 2$$

$$c = 15$$

$$z = 29$$

$$a$$

$$b = 6$$

$$c = 10$$

$$a = 7$$

$$b = 5$$

$$c = 11$$

$$a = 8$$

$$b = 4$$

$$c = 12$$

$$a = 9$$

$$abc \geq 2^{21} \cdot 7^{37}$$

$$b = 2$$

$$ka \mid \frac{8a-k}{ka-8a-a}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$a+b \mid k$$

$$a^2-6ab+b^2 \mid k$$

$$a^2-6ab+b^2+a+b \mid k$$

$$a(a+1-3b) + b(b+1-3a)$$

$$a^2+2ab+b^2 \mid k$$

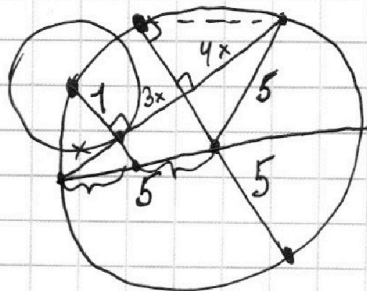
$$4ab \mid k$$

$$a+b \mid k$$

$$a \mid b$$

$$k \neq 2$$

№37



z k.  
k k.

$$4ab \mid k$$

$$a+b \mid k$$

$$a+b+2ab+2ab \mid k$$

$$a(2b+1)$$

$$4ab \mid a+b$$

$$a(1+b) + 1+b$$

$$a+b \mid 8a-1$$

$$a^2-6ab+b^2 \mid 8a-1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a+b:k$   
 $a^2-6ab+b^2:k$   
 №3.

$8ab:k$   
 $a+b:k$

$a^2-6ab+b^2:k$   
 $a^2-6ab+b^2-a-b:k$

$2a^2-4ab+2b^2:k$

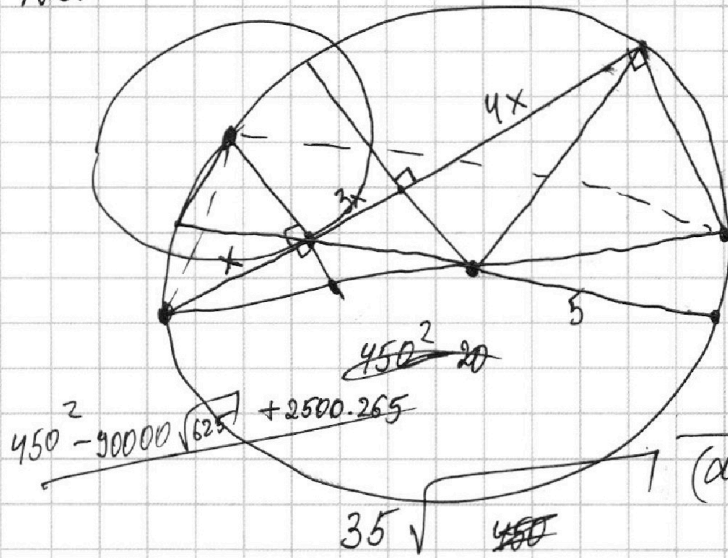
$2(a^2-ab+b^2):k$

$(a-b)^2:k$

$(a+b)^2:k$

$2b \cdot 2a:k$

$a = kp + d$      $b = d$   
 $kp$



$(a+b)$   
 $(a+b)^2 - 8ab$   
 $ab$      $a+b$

$8ab:a+b$

$8ab = k(a+b)$

$ka + kb = 8ab$

$ka = b(8a - k)$

$\frac{ka}{8a - k} = b$

~~$ka = 8a - k$~~      $k =$

~~$ka > 8a - k$~~

$a(k-8) > -k$

$a > \frac{k}{8-k}$

$\frac{5}{k} = \frac{x}{1}$

$x = \frac{5}{k}$

$25 - \frac{25}{k^2} = 25 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k^2 - 1}{k^2}$

$5 \sqrt{\frac{k^2 - 1}{k^2}} =$

$k^2 - 1$

$(k-1) \cdot (k+1) =$

$D = 450^2 + 2500 \cdot 184$

$CD = 5 - \frac{5}{k} = 5 \left(\frac{k-1}{k}\right)$

$\frac{16}{\times 25}$   
 $+ 80$   
 $\frac{32}{400}$

$\times 625$   
 $\frac{4}{2500}$   
 $\frac{216}{184}$

$265 \overline{) 153}$

$\times 184$   
 $\times 45$   
 $\times 2500$   
 $\frac{225}{9200080}$   
 $\frac{1025}{460000}$

$6625 \overline{) 25}$   
 $\frac{50}{265}$   
 $\frac{150}{125}$

$202500 + 460000 =$   
 $= 662500$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

