



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$ ;  $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$ ;  $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$ ;  $\alpha_1 \in \mathbb{N}_0$ ;  $\alpha_2 \in \mathbb{N}_0$ ;  $\alpha_3 \in \mathbb{N}_0$ ;  
 $\beta_1 \in \mathbb{N}_0$ ;  $\beta_2 \in \mathbb{N}_0$ ;  $\beta_3 \in \mathbb{N}_0$ ;  $\gamma_1 \in \mathbb{N}_0$ ;  $\gamma_2 \in \mathbb{N}_0$ ;  $\gamma_3 \in \mathbb{N}_0$ . (если числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  со-  
держат множители, отличные от 2, 3 и 5, то  $abc$  не ми-  
нимально).

$$1) \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 6 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$$

Величина  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$  достигает значения 18 при  $\alpha_1 = 4$ ,  $\beta_1 = 2$ ,

$$\gamma_1 = 12:$$

$$\begin{cases} 4 + 2 \geq 6 \\ 2 + 12 \geq 14 \\ 4 + 12 \geq 16 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{59}{2} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$$

Величина  $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$  принимает значение 30 при  $\alpha_2 = 8$ ,  $\beta_2 = 5$ ,  $\gamma_2 = 17$ :

$$\begin{cases} 8 + 5 \geq 13 \\ 5 + 17 \geq 21 \\ 8 + 17 \geq 25 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28 \text{ (т.к. } \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28)$$

Величина  $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3$  принимает значение 28 при  $\alpha_3 = 11$ ,  $\beta_3 = 0$ ,

$$\gamma_3 = 17:$$

$$\begin{cases} 11 + 0 \geq 11 \\ 0 + 17 \geq 13 \\ 11 + 17 \geq 28 \end{cases}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \text{ (минимальное значение}$$

величины  $abc$ )

$$\text{Ответ: } 2^{18} 3^{30} 5^{28}.$$

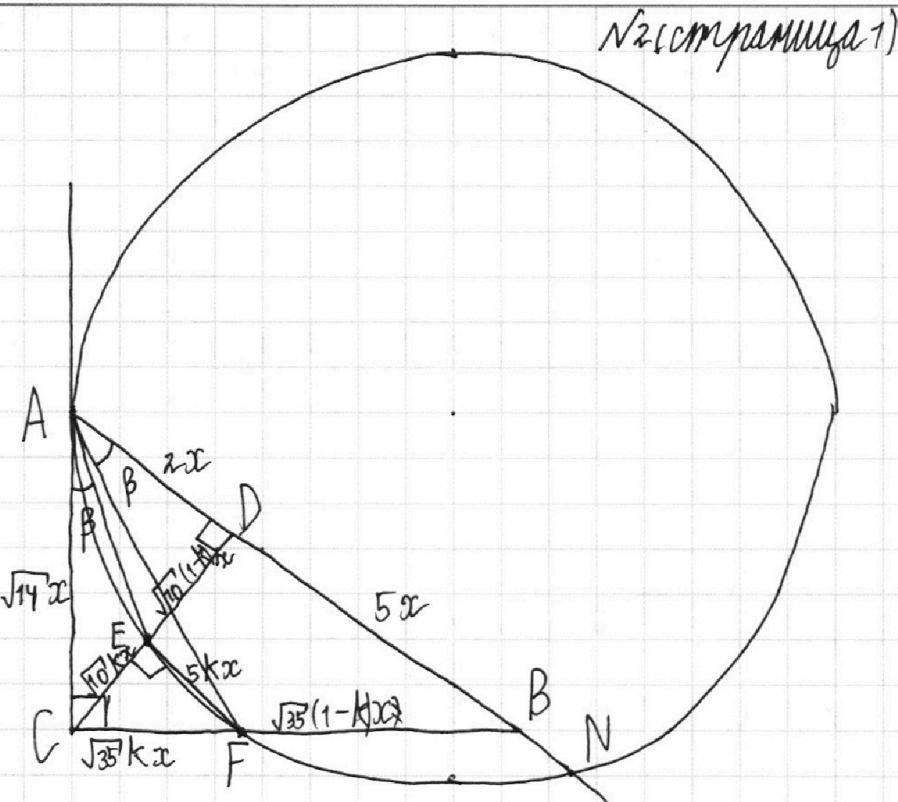
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть AD вторично пересекает окружность в точке N.  $AN \parallel EF \Rightarrow AE = BN \Rightarrow \angle EAC = \angle FAN$ . Пусть  $\angle FAN = \beta$ .

$AB = 1.4 BD \Rightarrow AD = 0.4 BD$ . Пусть  $BD = 5x$ . Тогда  $AD = 2x$ ;  $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{10}x$ ;  $AC = \sqrt{AB \cdot AD} = \sqrt{14}x$ ;  $BC = \sqrt{AB \cdot BD} = \sqrt{35}x$ . Пусть  $CE:CD = k$ . Тогда  $CE = \sqrt{10}kx$ ;  $ED = \sqrt{10}(1-k)x$ .  $EF \parallel BD \Rightarrow$  по теореме о параллельных  $CF:CB = k \Rightarrow CF = \sqrt{35}kx \Rightarrow FB = \sqrt{35}(1-k)x$ ;  $EF = 5kx$  (по теореме о параллельных).

$$2) \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\angle AED - \angle ACE) = \operatorname{tg}(\angle AED) - \operatorname{tg}(\angle ACE) = \frac{\sqrt{10}(1-k)}{1 + \operatorname{tg}(\angle AED) \operatorname{tg}(\angle ACE)} = \frac{\sqrt{10}(1-k)}{1 + \frac{2}{\sqrt{10}(1-k)} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}k}} = \frac{2k - 2(1-k)}{\sqrt{10}k(k+1) - \frac{4}{\sqrt{10}}} = \frac{(4k-2)\sqrt{10}}{10k(1-k) - 4} = \frac{(2k-1)\sqrt{10}}{5k - 5k^2 - 4} = \sqrt{10} \frac{1-2k}{5k^2 - 5k + 4}$$

$$3) \operatorname{tg}(\angle CAB) = \operatorname{tg}(\angle BAF + \angle CAF) = \frac{\operatorname{tg}(\angle BAF) + \operatorname{tg}(\angle CAF)}{1 - \operatorname{tg}(\angle BAF) \operatorname{tg}(\angle CAF)} = \frac{\frac{\sqrt{10}k}{7-5k} + \frac{\sqrt{35}k}{\sqrt{14}}}{1 - \frac{\sqrt{10}k}{7-5k} \cdot \frac{\sqrt{35}k}{\sqrt{14}}} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14} \cdot k + \sqrt{35}k(7-5k)}{\sqrt{14}(7-5k) - \sqrt{10} \cdot \sqrt{35} \cdot k^2} = \frac{2\sqrt{5}k + \sqrt{5}k(7-5k)}{\sqrt{2}(7-5k) - 5\sqrt{2}k^2} = \frac{\sqrt{5} \cdot 2k + 7k - 5k^2}{\sqrt{2} \cdot 5k^2 - 5k + 7} = \frac{\sqrt{10} \cdot 5k^2 - 9k}{2 \cdot 5k^2 + 5k - 7}$$

$$\operatorname{tg}(\angle CAB) = \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow 5k^2 - 9k = 5k^2 + 5k - 7 \Rightarrow 14k = 7 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2 (страница 2)

4)  $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = EF \parallel AB; AB \perp CD \Rightarrow EF \perp CD \Leftrightarrow \angle CEF = 90^\circ$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{10}x}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}kx \cdot 5kx} = \frac{2x^2}{5k^2x^2} = \frac{2}{5k^2} = \frac{2}{5} \cdot 2^2 = \frac{8}{5} = 8:5$$

Ответ: 8:5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3.

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow \arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{7\pi}{5} - \frac{10}{5}\frac{x}{5}\right) \Leftrightarrow \sin x + \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{7\pi}{5}\right) = 0 \\ 0 \leq \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \leq \pi \\ 0 \leq \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \leq 5\pi \\ -\frac{9\pi}{2} \leq -x \leq \frac{9\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3x}{5} - \frac{7\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{2x}{5} + \frac{7\pi}{10}\right) = 0 \\ -\frac{9\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2} \\ \frac{3x}{5} - \frac{7\pi}{10} = \pi n; n \in \mathbb{Z} \\ \frac{2x}{5} + \frac{7\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2} \\ x - \frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi n}{3} \\ x + \frac{7\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi n}{2} \end{cases}$$

$$1) -\frac{\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3} \leq \frac{9\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{10} \leq \frac{7\pi}{10} + \frac{5\pi n}{10} \leq \frac{27\pi}{10} \Leftrightarrow -\pi \leq \pi n \leq 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = 0 \\ n = 1 \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \\ x_2 = \frac{7\pi}{6} \\ x_3 = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{17\pi}{6} \\ x_4 = \frac{7\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2} \end{cases}$$

$$2) -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi n}{2} \leq \frac{9\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{5\pi n}{2} \leq 5\pi \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 2$$

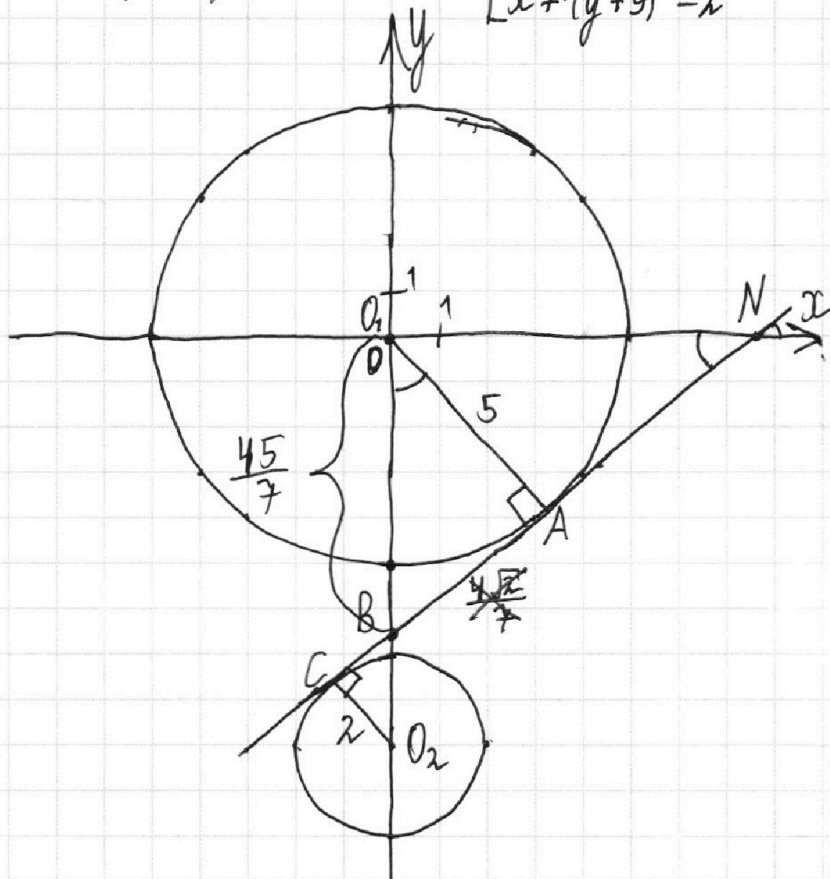
$$\begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_5 = -\frac{\pi}{4} \\ x_6 = \frac{9\pi}{4} \\ x_7 = \frac{9\pi}{2} \end{cases}$$

Ответ:  $-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{9\pi}{2}$ .

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)  $(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \iff$   $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$  N4 (страница 1)



Проведём прямую  $BN$ , касающуюся окружностей радиуса 5 с центром в  $(0;0)$  и радиуса 2 с центром в  $(0;-9)$ .  $N \in O_1x$ ;  $B \in O_1y$ ; прямая  $BN$  возрастает;  $BN$  касается окружности радиуса 5 в точке  $A$ , а окружности радиуса 2 - в точке  $C$ .

$$\Delta O_1AB \sim \Delta O_2CB \text{ (см. рис.)} \Rightarrow \frac{O_1B}{O_2B} = \frac{O_1A}{O_2C} = \frac{5}{2} \Rightarrow O_2B = \frac{2}{5}O_1B$$

$$O_1O_2 = O_1B + O_2B = \frac{7}{5}O_1B = 9 \Rightarrow O_1B = \frac{45}{7}$$

Угол координатный наклона  $BN$  к оси  $Ox$  равен  $k = \operatorname{tg}(\angle O_1NB)$   
 $= \operatorname{tg}(\angle BO_1A) = \frac{AB}{AO_1} = \frac{\sqrt{(\frac{45}{7})^2 - 25}}{5} = \sqrt{(\frac{9}{7})^2 - 1} = \sqrt{\frac{81}{49} - 1} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

$$2) \quad 5x + 6ay - b = 0 \iff 6ay = -5x + b$$

Если  $a=0, b=0$  данная система имеет 4 решения, т.к. прямая  $x=0$  пересекает построенные окружности в 4 точках. Если  $a \neq 0$   $6ay = -5x + b \iff y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$

$-\frac{5}{6a} > k$  - необходимое и достаточное условие того, что  $a$  удовлетворяет условию задачи (при  $a \neq 0$ )  
 $-\frac{5}{6a} < -k$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 (проделана страница 2)

$$\begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{7\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{7\sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad a \neq 0$$
$$\begin{cases} \frac{5}{3a} > \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{5}{3a} < -\frac{7\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5^{12}}{3a^{12}} + \frac{7\sqrt{2}^{13a}}{2} < 0 \\ \frac{5^{12}}{3a^{12}} - \frac{7\sqrt{2}^{13a}}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10+21\sqrt{2}a}{6a} < 0 \\ \frac{10-21\sqrt{2}a}{6a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{21a+5\sqrt{2}}{a} < 0 \\ \frac{21a-5\sqrt{2}}{a} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + \frac{5\sqrt{2}}{21} < 0 \\ a < 0 \\ a - \frac{5\sqrt{2}}{21} < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\frac{5\sqrt{2}}{21}, 0) \\ a \in (0, \frac{5\sqrt{2}}{21}) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\frac{5\sqrt{2}}{21}, 0) \cup (0, \frac{5\sqrt{2}}{21})$$

$$\begin{cases} a \in (-\frac{5\sqrt{2}}{21}, 0) \cup (0, \frac{5\sqrt{2}}{21}) \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\frac{5\sqrt{2}}{21}, \frac{5\sqrt{2}}{21})$$

Ответ:  $(-\frac{5\sqrt{2}}{21}, \frac{5\sqrt{2}}{21})$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

А4. N5

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} 11^{-2} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5$$

$$3 \log_{11}^4 x = 16 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x - 16 = 0 \\ \log_{11} x \neq 0 \end{cases}$$

Найдён все возможные значения величины  $\log_{11} x$  с помощью теоремы Безу.





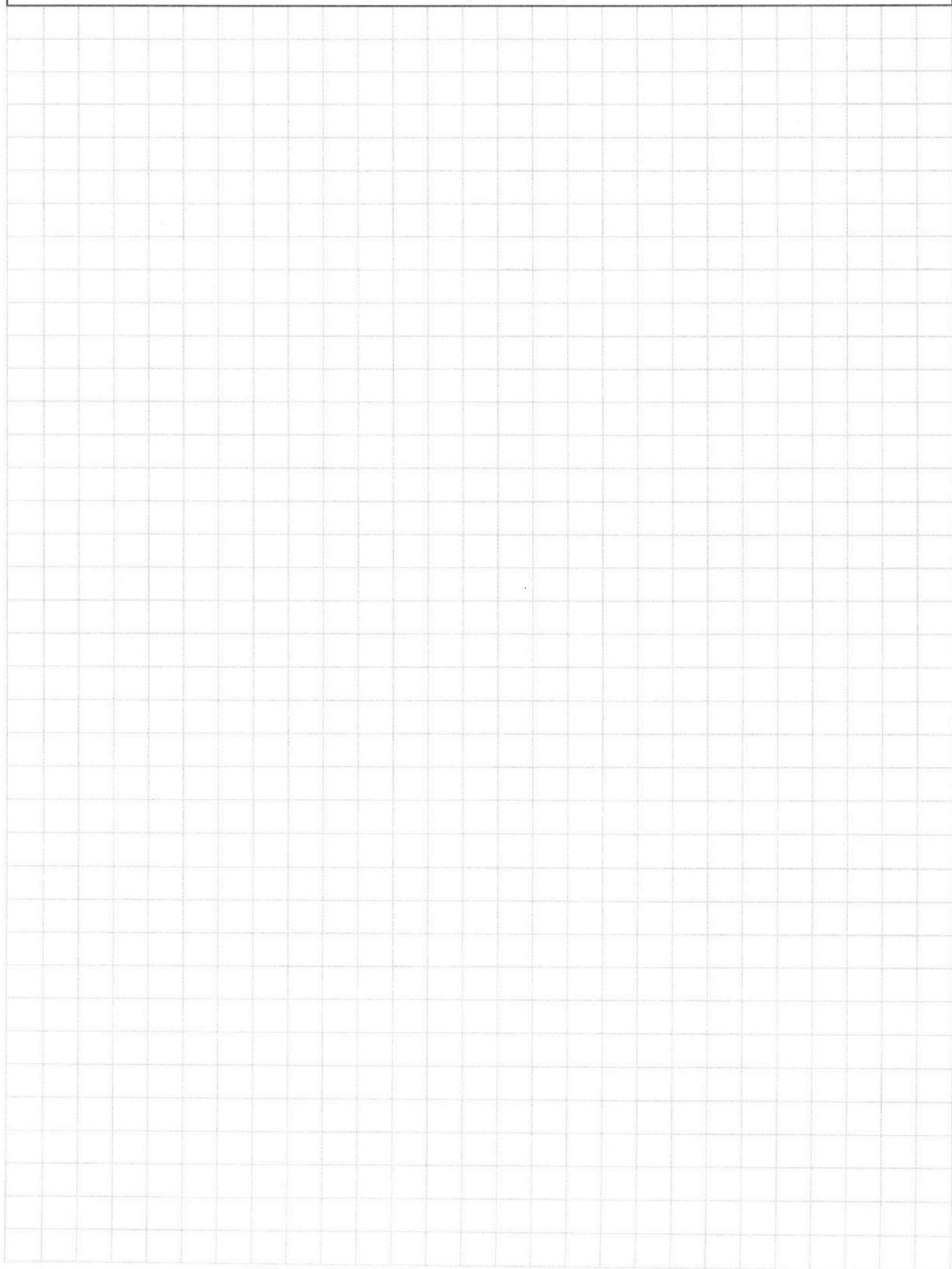
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-\frac{\sqrt{x}}{2} \leq -\sqrt{x} + \frac{10\sqrt{x}n}{3} \leq \frac{9\sqrt{x}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{2} \leq \frac{10\sqrt{x}n}{3} \leq \frac{11\sqrt{x}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{10}{3}n \leq \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{20} \leq n \leq \frac{33}{20}$$

$$n=1 \Rightarrow x_1 = \frac{10\sqrt{x}}{3} - \sqrt{x} = \frac{7\sqrt{x}}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{x}}{2} \leq 2\sqrt{x} + \frac{5\sqrt{x}n}{2} \leq \frac{9\sqrt{x}}{2} \Leftrightarrow -\frac{5\sqrt{x}}{2} \leq \frac{5\sqrt{x}n}{2} \leq \frac{5\sqrt{x}}{2} \Leftrightarrow -1 \leq n \leq 1$$

$$x_2 = 2\sqrt{x} - \frac{5\sqrt{x}}{2} = -\frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$x_3 = \frac{2\sqrt{x}}{2} = \sqrt{x}$$

$$x_4 = \frac{9\sqrt{x}}{2}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{32}{3 \cdot 81} + \frac{10}{3} - 16 = \frac{302}{81} - 16$$

$$f(x) = 3x^5 + 5x - 16$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81} + \frac{5}{3} - 16 = \frac{136}{81} - 16 < 0$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{5\sqrt{x}n}{3}$$

$$-\frac{9\sqrt{x}}{2} + \frac{5\sqrt{x}n}{3} = \frac{3\sqrt{x}}{6}$$

$$\begin{cases} x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 5^2 \\ 6ay = -5x + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (y+9)^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 5^2 \\ y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} \end{cases}$$

$$a \neq 0$$

$$5\sqrt{\frac{81}{49} - 1} = 5\sqrt{\frac{32}{49}} = 5 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{20\sqrt{2}}{7}$$

$$(0; -\frac{45}{7})$$

$$\frac{100\sqrt{2}}{7} = \frac{45h}{7}$$

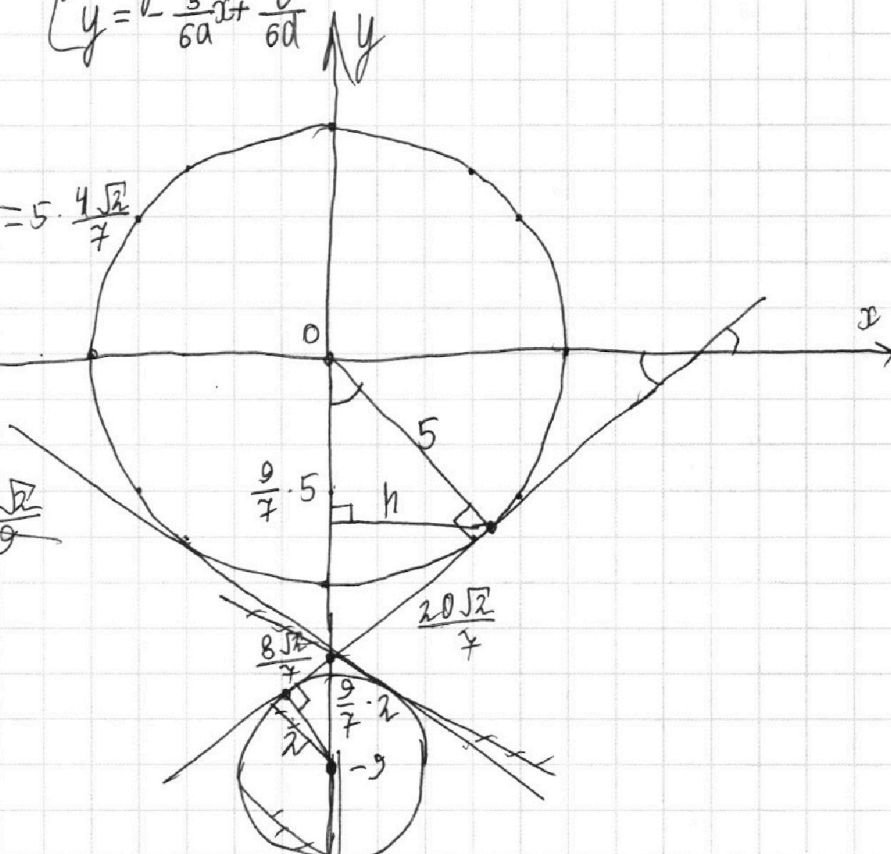
$$20\sqrt{2} = 9h \Rightarrow h = \frac{20\sqrt{2}}{9}$$

$$k = \frac{20\sqrt{2}}{7} \cdot 5 = \frac{100\sqrt{2}}{7}$$

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{7}x - \frac{45}{7}$$

$$k > +\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$k < -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$



$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \frac{1}{3} \log_{11} x^{11-2} - 5 = -\frac{2}{3} \log_{11} x^{11-5}$$

$$\log_{11}^4 x + (\frac{2}{3} - 6) \log_{11} x + 5 = 0$$

$$3 \log_{11}^4 x + (2-18) \log_{11} x + 15 = 0$$

$$3 \log_{11}^4 x - 16 \log_{11} x + 15 = 0$$

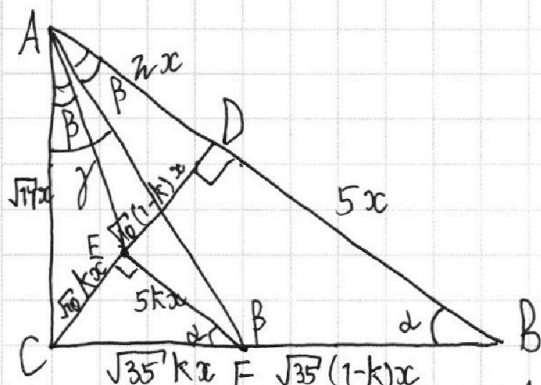
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sqrt{2}}{2} - d = \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}(1-k)}\right) + (\sqrt{2} - d) - \beta$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}(1-k)}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sin \beta}{7x} = \frac{\sin d}{\sqrt{14+35k^2}x}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14+35k^2}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{2}{\sqrt{2+5k^2}}$$

$$\cos \beta = -\frac{\sqrt{5k^2}}{\sqrt{2+5k^2}} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = -\sqrt{\frac{2}{5k^2}} = -\sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{k}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}\left(\arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}(1-k)}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{\frac{2}{5}}(1-k) = -\sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{k}$$

$$1-k = \frac{1}{k} \Rightarrow k-k^2 = 1 \Rightarrow k^2 - k + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} \angle AED = \frac{2}{\sqrt{10}(1-k)} = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{1}{1-k}$$

$$\operatorname{tg} \angle ACD = \frac{2}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\operatorname{tg} \angle CAE = \frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \operatorname{tg}(\angle AED - \angle ACD) = \frac{\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{1}{1-k} - \sqrt{\frac{2}{5}}}{1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1-k}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{5}} \left(\frac{1}{1-k} - 1\right)}{1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1-k}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}(1-1+k)}{1-k - \frac{2}{5}} = \frac{k\sqrt{\frac{2}{5}}}{\frac{3}{5} - k} = \frac{\sqrt{10}k}{3-5k}$$

$$\sin \angle C = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{\sqrt{10}k}{3-5k} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{10k^2}{(3-5k)^2}}} = \frac{\sqrt{10}k}{\sqrt{25k^2 - 30k + 9 + 10k^2}} = \frac{\sqrt{10}k}{\sqrt{35k^2 - 30k + 9}}$$

$$1 - \sin^2 \beta = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \beta} \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{1+\operatorname{tg}^2 \beta}$$

$$\frac{\sqrt{35}(1-k)}{\sqrt{10}k} \cdot \sqrt{35k^2 - 30k + 9} =$$

$$2) \operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\frac{35}{2}}k = \sqrt{\frac{14}{2}}k$$

$$\operatorname{tg}\left(\arctg\left(\frac{\sqrt{14}}{2}k\right) + \arctg\left(\frac{\sqrt{10}k}{3-5k}\right)\right) = \sqrt{\frac{35}{14}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}k + \frac{\sqrt{10}k}{3-5k}}{1 - \frac{5k^2}{3-5k}} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}(3-5k) + \sqrt{10}k}{3-5k-5k^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \frac{3-5k+2k}{-5k^2-5k+3} = 1$$

$$(5k^2 + 5k - 3) + (3 - 3k) = 0 \Rightarrow 5k^2 - 2k = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{5}$$

$$\operatorname{tg}(d + \beta) = \frac{\operatorname{tg} d + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} d \operatorname{tg} \beta} \Rightarrow \operatorname{tg}(d - \beta) = \frac{\operatorname{tg} d - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} d \operatorname{tg} \beta}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.

$$\begin{cases} ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \\ bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13} \\ ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28} \end{cases}$$

Пусть  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$ ,  $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$ ,  $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 6 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 16 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \beta_1 = 2 \\ \gamma_1 = 12 \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \frac{59}{2} - 21 = 8,5 \\ \beta_2 = \frac{59}{2} - 25 = 4,5 \\ \gamma_2 = \frac{59}{2} - 13 = 16,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 29,5 \Rightarrow \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \geq \left(\frac{29,5}{3}\right)^3$$

$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(abc)^2 \geq 2^{36} 3^{59} 5^{52} \Rightarrow abc \geq 2^{18} 3^{29} 5^{26} \sqrt{3} \geq 2^{18} 3^{29} 5^{26} \cdot 1,732 \approx 2^{18} 3^{30} 5^{28}$$

$$\alpha \geq 18 \checkmark$$

$$\beta \geq 30$$

$$\gamma \geq 26$$

$\alpha = 18$

1)  $\beta = 30 \Rightarrow \gamma_2 = 30 - \alpha_2 - \beta_2$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ 30 - \beta_2 \geq 25 \\ 30 - \alpha_2 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 \geq 8 \\ \beta_2 = 5 \\ \gamma_2 = 17 \end{cases} \checkmark$$

3)  $\gamma = 26 \Rightarrow \gamma_3 = 26 - \alpha_3 - \beta_3$

$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 11 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ 26 - \beta_3 \geq 28 \\ 26 - \alpha_3 = 13 \end{cases}$$

$$\alpha_3 = 13, \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26$$

$\gamma = 28$

$$\alpha_3 = 11$$

$$\beta_3 = 0$$

$$\gamma_3 = 17$$

$$\begin{cases} a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{11} \\ b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14} \\ abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \end{cases}$$

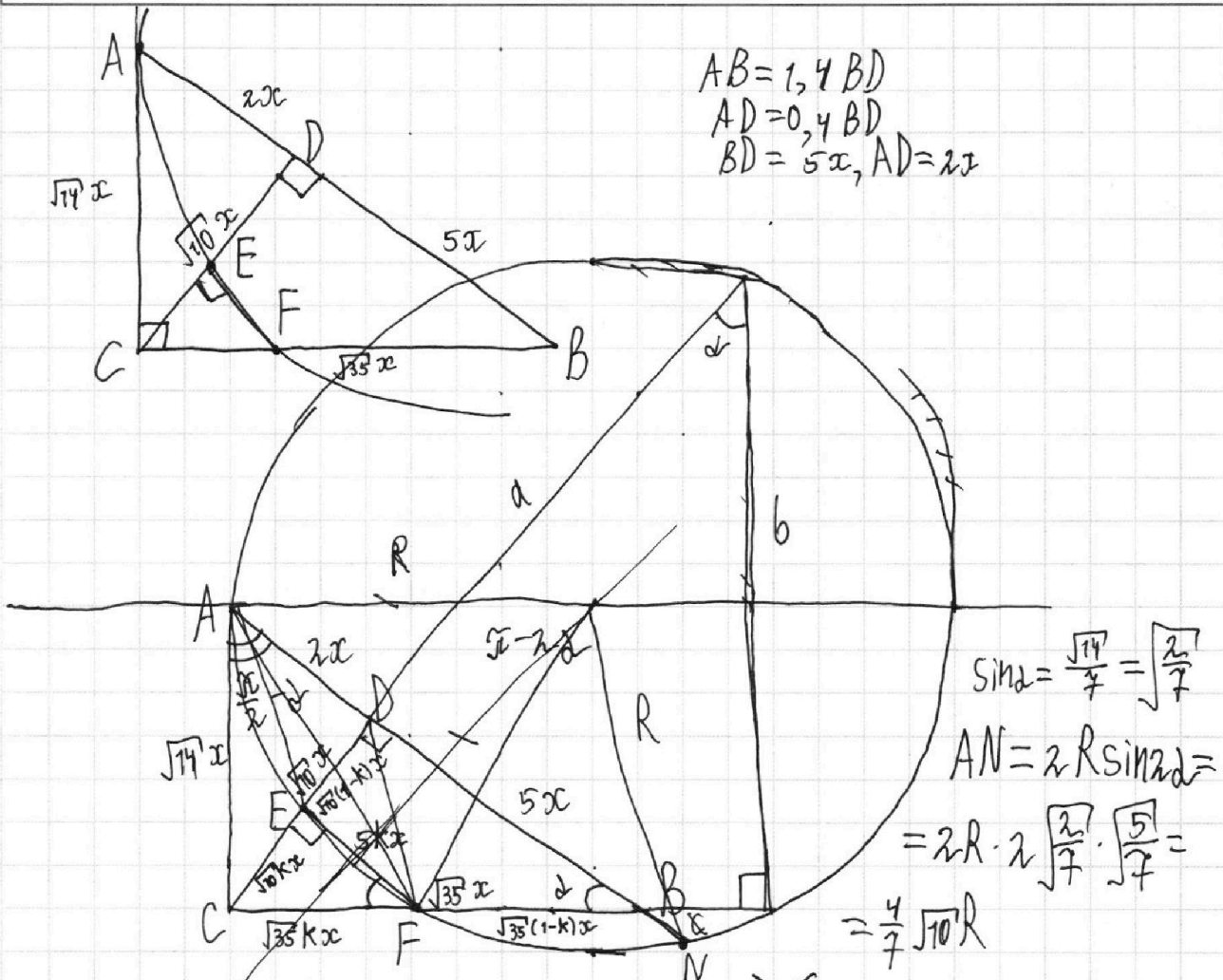
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{14}}{7} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$AN = 2R \sin 2\alpha =$$

$$= 2R \cdot 2 \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}} =$$

$$= \frac{4}{7} \sqrt{10} R$$

$$14x^2 = (\sqrt{10}x + a) \cdot \sqrt{10}kx$$

$$14x^2 = (\sqrt{35}x + c) \cdot \sqrt{35}kx$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10}x^2 = \sqrt{10}x^2 \Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{1}{\frac{5}{2}k^2} = \frac{2}{5k^2} = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{10}k^2x^2$$

N3.

$$AN = \sqrt{10} - 2d$$

$$EN = 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{x}{5}$$

$$0 \leq \frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{9\sqrt{10}}{10} \leq -\frac{x}{5} \leq \frac{\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow \frac{9\sqrt{10}}{2} \geq x \geq -\frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{10}}{2} \leq x \leq \frac{9\sqrt{10}}{2}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{x}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \cos\frac{x}{5} + \sin\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \sin\frac{x}{5}$$

$$\sin x = \frac{14\sqrt{10}}{5} - \frac{x}{5} = \frac{7\sqrt{10}}{5} - \frac{x}{5} = -\sin\left(\frac{x}{5} - \frac{7\sqrt{10}}{5}\right) = -\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$$

$$\sin x + \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{3\sqrt{10}}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \cos\left(\frac{2x}{5} - \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3x}{5} + \frac{3\sqrt{10}}{10} = 2\sqrt{10} \\ \frac{2x}{5} - \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{5\sqrt{10}}{2} + 5\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3\sqrt{10} = 10\sqrt{10} \\ 2x - \frac{3\sqrt{10}}{2} = \frac{5\sqrt{10}}{2} + 5\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{10} \\ x = 2\sqrt{10} + \frac{5\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$