



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1.

Обозначим за a_2 макс. входящие тегила 2 в число a ; b_2 - в число b ; c_2 - в число c ; аналогично для $a_3, b_3, c_3, a_5, b_5, c_5$

Тогда: $ab: 2^8 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 8$

Аналогично: $a_3 + c_3 \geq 14$
 $b_3 + c_3 \geq 12$

$$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_3 = \frac{(a_2 + b_2) + (b_2 + c_3) + (a_3 + c_3)}{2}$$

$$\geq \frac{8 + 12 + 14}{2} = 17$$

$$\left. \begin{array}{l} a_3 + b_3 \geq 14 \\ a_3 + c_3 \geq 21 \\ b_3 + c_3 \geq 20 \end{array} \right\} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq \frac{14 + 21 + 20}{2} = 27,5 \neq$$

$$a_3 + b_3 + c_3 - \text{целое} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 28$$

~~$a_5 + b_5 \geq 11$~~

$$a_5 + c_5 \geq 39 \Rightarrow a_5 + c_5 + b_5 \geq 39 \quad (\text{т.к. число неопр.})$$

Максим. $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Пример: $a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$

$b = 2^3 \cdot 3^6$

$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22}$

$ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}; 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$

$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{22}; 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$

$ac = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{34}; 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{39}$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$ - Макс

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{2}(\rangle)$

$$= F \left(a \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \sqrt{\frac{2}{7}}; a \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = F \left(\frac{2}{7} a; \frac{\sqrt{10}}{7} a \right)$$

$$FM = \sqrt{14 - \frac{4}{49} a^2 + r^2 - \frac{10}{49} a} = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14 -$$

$$FM = \sqrt{\left(14 - \frac{2}{7} a\right)^2 + \left(r - \frac{\sqrt{10}}{7} a\right)^2} = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 196 - \frac{4}{7} a \cdot 14 + \frac{4}{49} a + r^2 -$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3 (1)

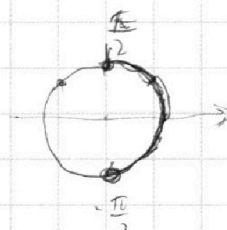
$$10 \arcsin(\cos(x)) = \pi - 2x$$

$$t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - t$$

$$5 \arcsin(\sin(t)) = t$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(1) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-1,5\pi \leq t \leq 1,5\pi$$



$$\begin{cases} -2,5\pi \leq t \leq -1,5\pi, \\ 5 \cdot (t + \pi) = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1,5\pi < t \leq -0,5\pi \\ 5 \cdot (-\pi - t) = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0,5\pi < t \leq 0,5\pi \\ 5 \cdot t = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,5\pi < t \leq 1,5\pi \\ 5 \cdot (\pi - t) = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,5\pi < t \leq 2,5\pi \\ 5 \cdot (t - 2\pi) = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2,5\pi \leq t \leq -1,5\pi, \\ t = -2,5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1,5\pi < t \leq -0,5\pi \\ t = -\frac{5}{6}\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0,5\pi < t \leq 0,5\pi, \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,5\pi < t \leq 1,5\pi \\ t = \frac{5}{2}\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,5\pi < t \leq 2,5\pi, \\ t = 2,5\pi \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - t$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}(2)$

$$\begin{cases} x = 3\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}, \\ x = \frac{\pi}{2}, \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}, \\ x = -2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3\pi, \\ x = \frac{4\pi}{3}, \\ x = \frac{\pi}{2}, \\ x = -\frac{1}{3}\pi, \\ x = -\pi \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

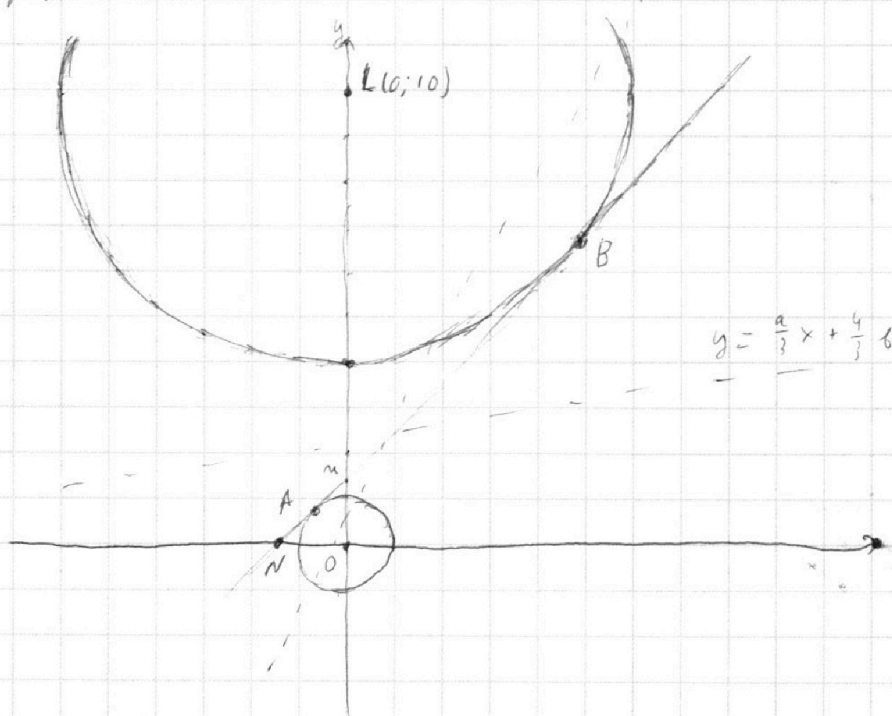


р. 4, (1)

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b, \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, & \text{— окружность радиуса 1 с центром } O(0; 0) \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 & \text{— окр. с радиусом 6 и центром } L(0; 10) \end{cases} \end{cases}$$

График:



Чтобы ур-е имело 4 корня, необходимо, чтобы прямая пересекала окружности по 2 разам. Окружности не пересекаются.

Наименьшее значение a , при котором $a \geq 0$, при котором прямая может их касаться в двух точках:

Точки касания с нижней окр. — A; с верхней — B; с O_y — M.
 $\left. \begin{aligned} \angle OAM = \angle MBL = 90^\circ \\ \angle AMO = \angle LMB \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle LBO \sim \triangle BLM \cap \triangle AMO \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle 4(1)$$

$$\Rightarrow LM/MO = LB/AO = 6/1$$

$$LM + MO = LO = 10$$

$$7MO = 10$$

$$MO = \frac{10}{7}$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

N - точка пересечения пр. $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ с Ox .

$$\triangle LMO \sim \triangle OAM \text{ (по 2 уг.)}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{3} &= \tan(2\text{-й угол}) = \tan(\angle LMO) = \tan(\angle AOM) = \\ &= \frac{AM}{AO} = \frac{\sqrt{51}}{7} \end{aligned}$$

$$a = \frac{3\sqrt{51}}{7}$$

Если $a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$, то пр. там же в, что и в положении

касания, прямая пересечет окр. в 2 точках касания $\Rightarrow$ 4 корня.

Если $a \leq \frac{3\sqrt{51}}{7}$ и прямая пересек. ~~ок~~ кас. окр., то она

не пересечет верха в 2 точках $\Rightarrow \leq 4$ корней.

Значит при $a \geq 0$ 4 корня может быть при $a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$

Окружности симметричны относительно Oy (каждая сама себе) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для $a \leq 0$ 4 корня только при $a < -\left(\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \Rightarrow \begin{cases} a < -\frac{3\sqrt{51}}{7} \\ a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \end{cases}$

Ответ: при $(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(1): $\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x}(5) = \log_{2x}(6.5) - 3$ $2x > 0,$
 $2x \neq 1$

$$(\log_5(2x))^4 - 3 \cdot \frac{1}{\log_5(2x)} = \log_{2x} 5^{\frac{4}{3}} - 3$$

$t_x = \log_5(2x); \quad 2x \neq 1 \Rightarrow t_x \neq 0$

$$t_x^4 - 3 \cdot \frac{1}{t_x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\log_5(2x)} - 3$$

$$t_x^4 - \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{t_x} + 3 = 0$$

$t_x \neq 0$ $t_x^5 + 3t_x = \frac{13}{3}$

(2): $\log_5^4(y) + 4 \log_y 5 = \log_y 0.2 - 3$ $y > 0,$
 $y \neq 1$

$$(\log_5(y))^4 + 4 \log_y 5 = \log_y(5^{-\frac{1}{2}}) - 3 \quad \left| \log_y 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log_y 5 \right.$$

$t_y = \log_5(y); \quad y \neq 1 \Rightarrow t_y \neq 0$

$$t_y^4 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_5 y} = -3$$

$t_y \neq 0$ $t_y^5 + 3t_y = -\frac{13}{3}$

$$t_y^5 + 3t_y + t_x^5 + 3t_x = -\frac{13}{3} + \frac{13}{3}$$

$$(t_y + t_x)(t_y^4 - t_y^3 t_x + t_y^2 t_x^2 - t_y t_x^3 + t_x^4 + 3) = 0$$

$$t_y^4 - t_y^3 t_x + t_y^2 t_x^2 - t_y t_x^3 + t_x^4 + 3 > 0 \Rightarrow \pm \text{скобки} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_y + t_x = 0$$

$$\log_5(2x) + \log_5(y) = 0$$

$$\log_5(2xy) = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy = 0.5. \quad \text{Ответ: } xy = 0.5$$

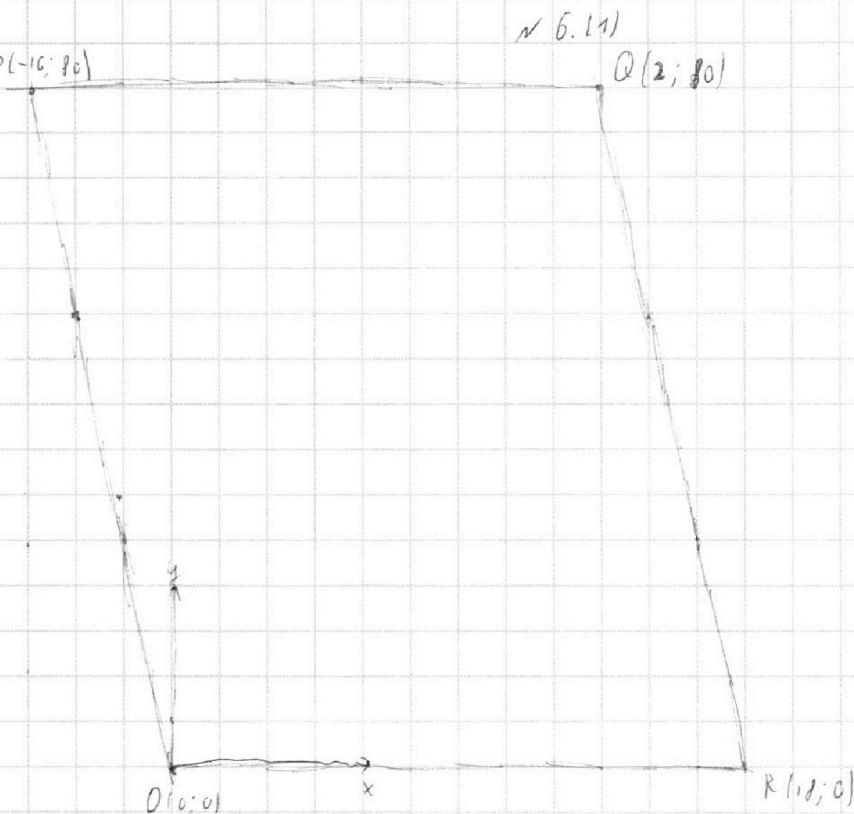
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Утверждения: $\checkmark$ верхняя и нижняя ~~параллельные~~^{параллельные} ~~пар-ла~~^{пар-ла} $\parallel O_y$; боковые
углы имеют градусной мер. -5 , т.к. $\frac{80-0}{-10-0} = -5$

Рассмотрим некоторую прямую вида $y = -5x + b_0$
Пусть некоторая точка $A(x_1, y_1)$ лежит на этой прямой.
Тогда любая точка $B(x_2, y_2)$ такой, что выполняется равенство
 $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - (-5x_1 + b_0) = 45$$

$$y_2 = -5x_2 + b_0 + 45$$

Эта любая точка задает другую прямую вида
 $y = -5x + b$, и она не зависит от точки A , а лишь от
коэф. b_0 исходной прямой. Значит, все точки исходной
пара точек $A; B$ лежат на прямой $y = -5x + b_0$ и $y = -5x + b_0 + 45$
совместимы.

Также все точки с цел. координ. лежат внутри

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x \in \mathbb{Z}$

пар-ма, Будет ~~или~~ удовлетворять равенству $\Rightarrow$ Будет b
искомых точек $\Rightarrow$ это количество точек явл-ся искомым.

Рассмотрим прямую $y = -5x + b_0$ и найдём кол-во
точек внутри пар-ма.

Прямая пар-ма боковой стороны $[-5; -5]$

~~Если $b_0 \leq 0$, то прямая не пересекает~~

левая грань пар-ма: $y = -5x$, т.к. $\begin{cases} 0 = -5 \cdot 0 \\ 10 = -5 \cdot (-10) \end{cases}$

правая грань пар-ма: $y = -5x + 90$, т.к. $\begin{cases} 80 = -5 \cdot 2 + 90 \\ 0 = -5 \cdot 18 + 90 \end{cases}$

а 2 точки однозначно задают прямую.

Значит, если $b_0 < 0$ или $b_0 > 90$, то прямая лежит ниже или
выше пар-ма $\Rightarrow$ не пересекает его $\Rightarrow$ 0 искоемых точек.

Если b_0 не целое, то $\forall x, \in \mathbb{Z}$, $y_1 = -5 \cdot x_1 + b_0$ - нецелое $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ 0 искоемых точек.

Значит, все искоемые точки - на прямых с $b_0 \in \mathbb{Z}$; $0 \leq b_0 \leq 90$.

Далее, то если $b_0 : 5$, то кол-во точек равно
17, а если не делится, то равно 16.

~~Найдётся точка $\forall b_0 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq b_0 \leq 90$, найдётся $\exists A(x_1, y_1)$:~~

~~$x_1 \in \mathbb{Z}$; $y_1 \in \mathbb{Z}$; $y_1 = -5 \cdot x_1 + b_0$. Решительно,~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sim 6(3)$

прямая - между бок. гранями $\Rightarrow$ пересечение Budget, причем

~~прямая Budget пересекает Budget~~ ~~содержит точку~~

~~и не имеет с Budget 16 точек~~ проекция отрезка пересечения

на Oy - ~~прямая~~ отрезок OM , где $O(0;0)$ $M(0;80)$,

т.к. верхняя и нижняя грани $\parallel Oy$; бок. грани параллельны.

Если $b_0 \equiv 0$, то на отрезке $0..80$ находится 17

точек, совпавших с b_0 по модулю 5; тогда при целом b_0 их

кол-во - 16, т.к. $(80-0)/5 = 16$; $80:5$; $0:5$.

Для каждой точки, лежащей на нижней грани, ~~если~~ (точка

$A(x_i; y_i)$ если $y_i \equiv b_0$, то y_i точки целые координаты, т.к.

$y_i \in \mathbb{Z}$; $x_i = 0 + \frac{y_i - b_0}{-5}$ - целое число $(y_i - b_0 : 5)$, а

если $y_i \not\equiv b_0$, то $x_i \notin \mathbb{Z} = 0 + \frac{y_i - b_0}{-5}$ - нецел. $(y_i - b_0 : 5)$.

Итого, кол-во таких точек 16, если $b_0 : 5$ и 17, если $b_0 \not: 5$.

Для 2 граней $y = -5x + b_0$ и $y = -5x + b_0 + 45$ если

$b_0 > 45$, то $b_0 + 45 > 90 \Rightarrow$ нет ~~еще~~ иск. точек.

Если $b_0 : 5$, то $b_0 \neq 45 : 5 \Rightarrow 17 - 17 = 2 \Rightarrow$ раз

точек. иначе $b_0 \not: 5$, $b_0 + 45 : 5 \Rightarrow 16 - 16 = 256$ раз

точек. Точки не совп., т.к. y разные; $x = \frac{y - b_0}{-5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Итого, ответ на задачу $\sim 6(4)$

$$\sum_{b_0=0}^{45} \left(\begin{matrix} 77, b_0:5 \\ 16, b_0:5 \end{matrix} \right), \text{ т.к. } \begin{cases} b_0 \geq 0 \\ b_0 \leq 40 \\ 0,45 \leq 20 \\ 0,45 \leq 90 \end{cases}$$

Хол - 60 тысяч от 0, 45, сумма на 5 -

$$= 10 \text{ млн } (45/5+1) \text{ т.к. сумма} - 46 - 10 = 36$$

Итого, ответ: $10 \cdot 289 + 36 \cdot 256 = 2890 + 9216 =$

$$= 12106$$

Ответ, 12106



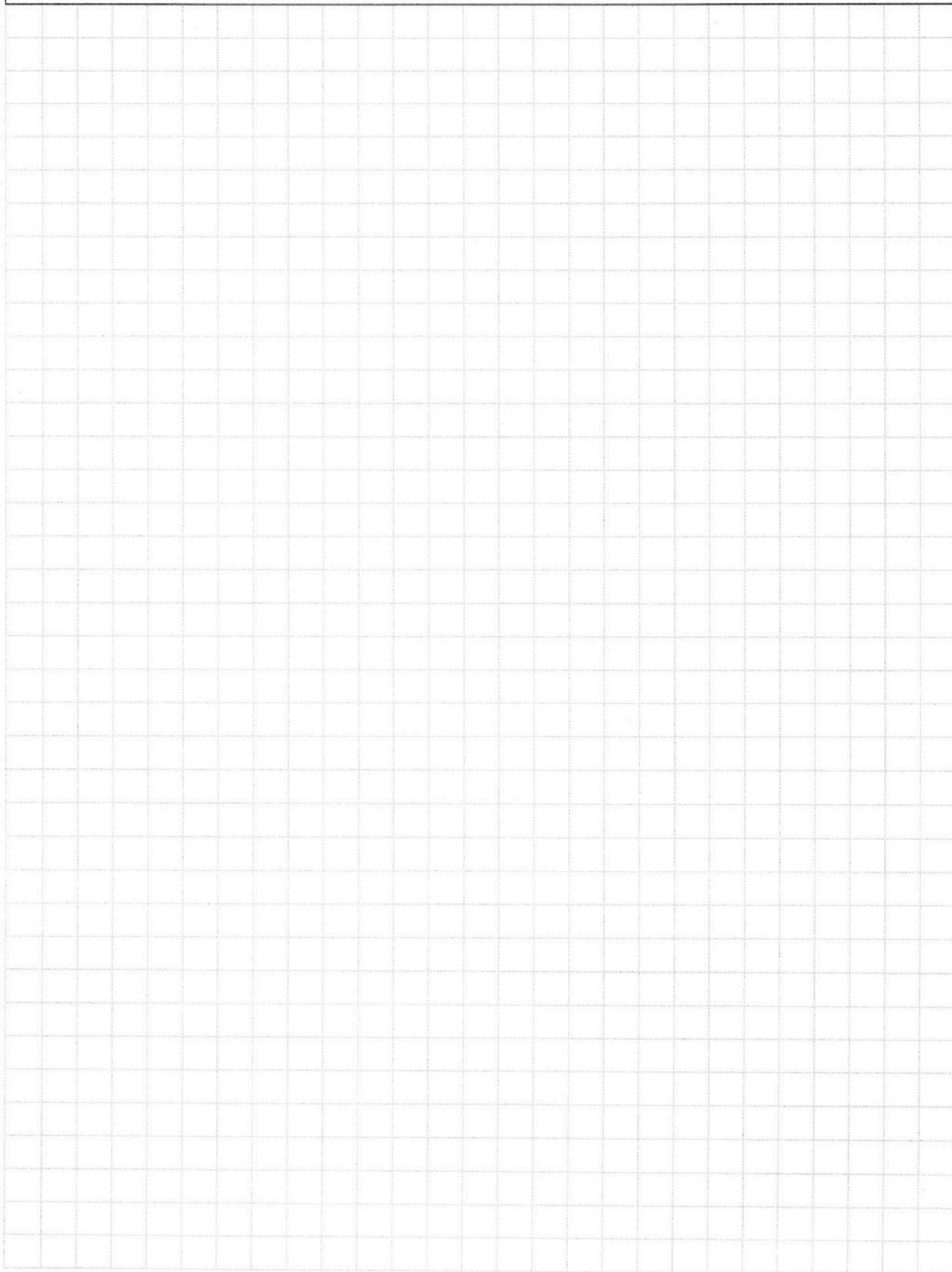
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



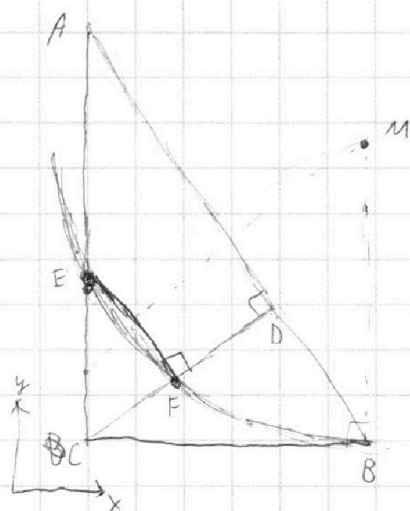
№2. (1)

$$EF \parallel AB \perp CD \Rightarrow EF \perp CD$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CAD \text{ (по 2 угла)}$$

$$\triangle CAD \sim \triangle ABC \text{ (по 2 угла)}$$

$$\begin{aligned} S(\triangle CAD) &= \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \\ &= \frac{1}{2} \cdot CD \cdot \frac{5}{7} AB = \frac{5}{7} S(\triangle ABC) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Пусть } AB = 7x. \text{ Тогда } AD = 5x, DB = 2x, CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \\ = \sqrt{10}x; CB = x \cdot \sqrt{10+4} = \sqrt{14}x; AC = x \cdot \sqrt{10+25} = \\ = \sqrt{35}x \end{aligned}$$

Введем систему координат $(10; 0)$; $CB \uparrow \uparrow Oy$; $CA \uparrow \uparrow Ox$

$$\text{Радиус окружности} = x. \text{ Тогда } B(\sqrt{14}; 0); A(0; \sqrt{35})$$

$$\begin{aligned} M - \text{центр окр. } \triangle EFB. CB - \text{радиус касания} \Rightarrow \angle MBC = 90^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow MB \parallel AC \Rightarrow \text{если радиус} = r, \text{ то } M(\sqrt{14}; r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Пусть } EC = a. \text{ Тогда } E(0; a). EM = \sqrt{(r-a)^2 + 14} = r \Rightarrow \\ \Rightarrow r^2 - 2ra + a^2 + 14 = r^2 \Rightarrow 2ra = a^2 + 14 \end{aligned}$$

$$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \frac{5}{7} \overrightarrow{AB} = D\left(\frac{5}{7} \sqrt{14}; \frac{2}{7} \sqrt{35}\right)$$

$$\text{tg } \angle DCB = \cos \angle DCB = \frac{DC}{BC} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$\sin \angle DCB = \sqrt{1 - \frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\begin{aligned} \triangle CEF \sim \triangle ABC \sim \triangle CDB \Rightarrow CF = CE \cdot \sin \angle CEF = a \cdot \sin \angle DCB = \\ = a \cdot \sqrt{\frac{2}{7}} \Rightarrow F = C + \overrightarrow{CF} = F\left(a \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \cos \angle DCB; a \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \sin \angle DCB\right) \end{aligned}$$



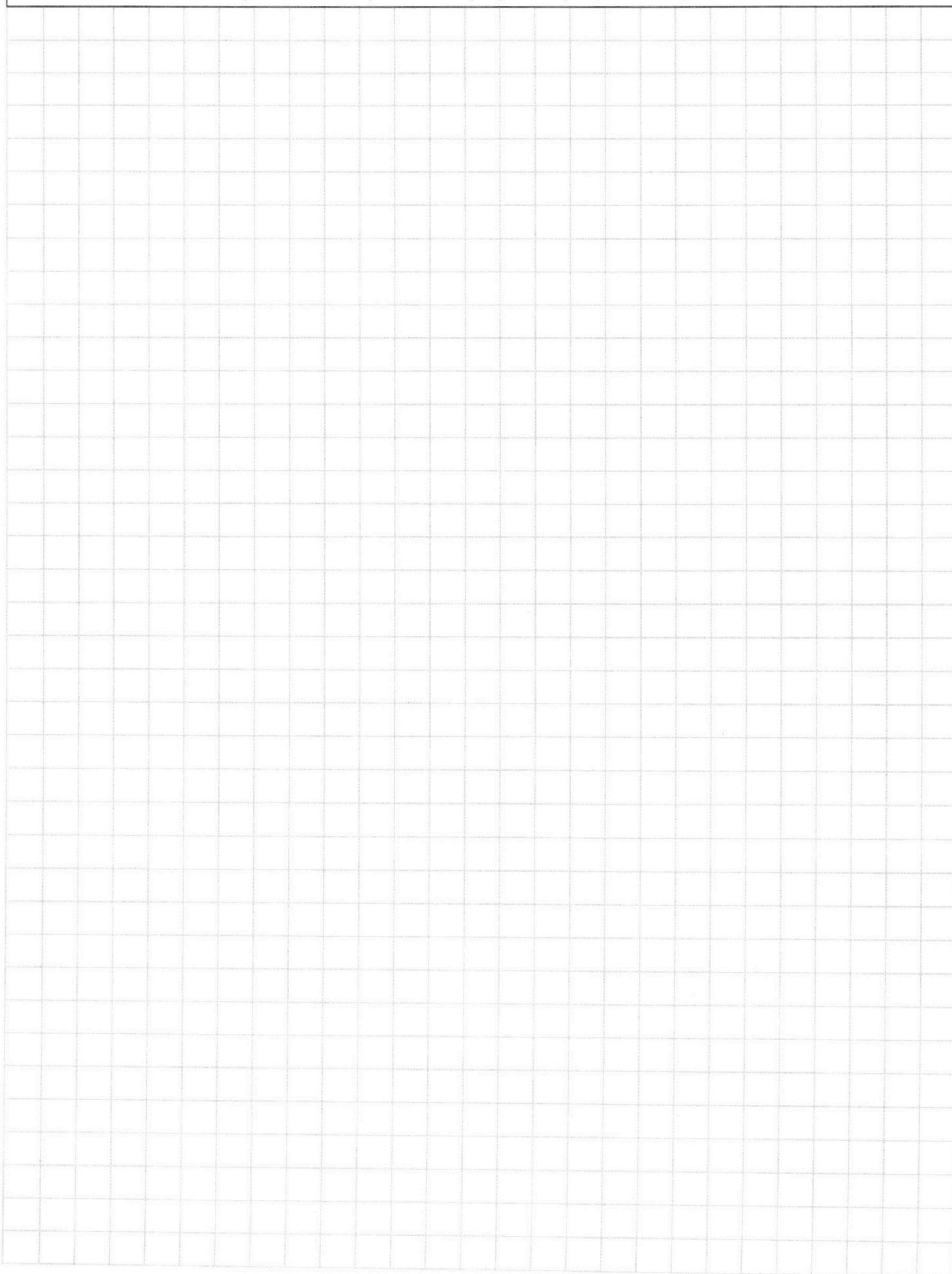
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a_1 + b_2 \geq 8; \quad a_2 + c_2 \geq 14$$

$$C_1 - C_2 = 6$$

$$b_2 + c_2 \neq 12$$

$$a_2 - b_2 = 2$$

$8 + 12 + 14$

$$a_1 = 5$$

$$p_1 = 1$$

$$C_2 = 9$$

$$a + b = 14$$

$$b_{sc} = 20$$

$$a+c = 2$$

$$a - b = 2$$

$$a_1 = 8$$

$$b_7 = 6$$

$$C_1 = 14$$

$$\text{Absorption}(\cos \theta) =$$

$$= \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) =$$

二九一 x

$$AD \cdot DB = CD^2 = 10x^2$$

$$C(x) = \sqrt{10} \cdot x$$

$$C\theta = \sqrt{14} \times$$

$$AC = \cancel{F70} \times \sqrt{33} \times$$

$$\frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$|r - E_C|^2 + (rB)^2 = r^2$$

$$r^2 - 2r \cdot EC + EC^2 + 144 = r^2$$

$$EC^2 + 14x^2 = 2r \cdot EC$$

$$r = \frac{a^2 + 14}{2a}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{7}{a}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$(x^2 + y^2 = 1)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$

$$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi$$

$$-4\pi \leq 2x \leq 6\pi$$

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 17 \\ \hline 12 \\ \hline 115 \\ \hline 12 \\ \hline 200 \end{array}$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$$

$$\log_5^4(2x)$$

$$-2\pi \leq x \leq -\pi$$

$$y = -5x + b_0$$

$$5 \arcsin(\sin(t)) = t$$

$$-5x = y - b_0$$

$$x = y - b$$

$$-1,5$$



$$-0,5\pi \leq -t \leq 1,5\pi$$

$$1,5\pi \leq \pi - t \leq 2,5\pi$$

$$-0,5\pi \leq -\pi - t \leq 0,5\pi$$

$$4t = -10\pi$$

$$t = -2,5\pi$$

$$y = a_1 x + b_1$$

$$\pi - t = t$$

$$-5\pi - 5t = t$$

$$6t = -5\pi$$

$$t = -\frac{5\pi}{6}$$

$$(y - 10)^2 = y^2 - 20y + 100$$

$$\frac{7}{2} + \frac{5}{6} = \frac{3+5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$x^2 + (y^2 - 10)^2 = 8^2$$

$$AO \sim MBL$$

$$AO = 1; LB = 6$$

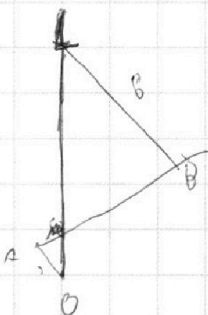
$$LM + MO = 10$$

$$7 \cdot MO = 10$$

$$MO = \frac{10}{7}$$

$$AM = \sqrt{\frac{100 - 49}{49}} = \sqrt{\frac{51}{49}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$= \frac{\sqrt{51}}{7}$$





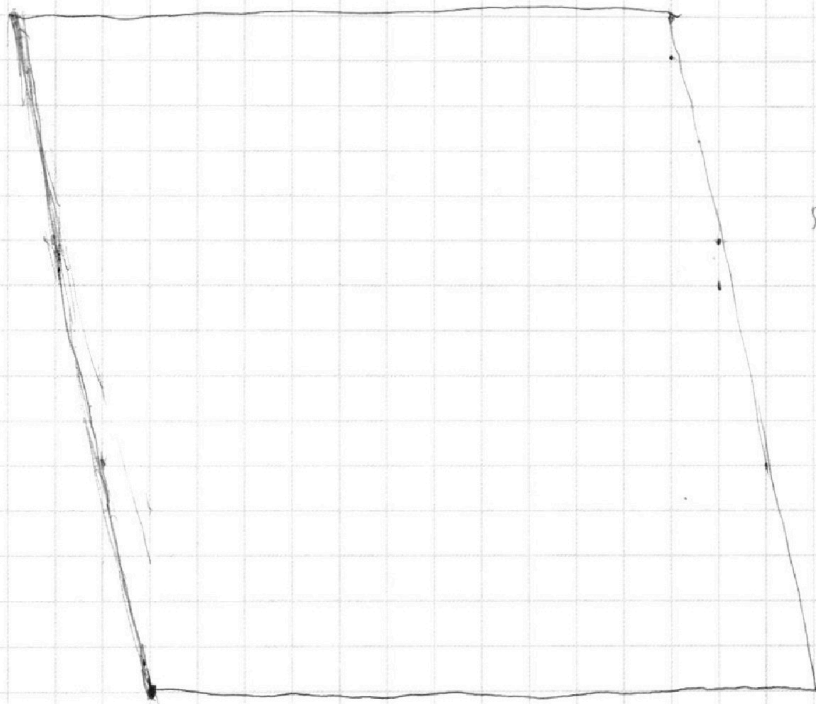
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$A(0; 14)$$

$$B(14; 0)$$

$$C(14; 14)$$

$$(r-a)^2 + 14 = r$$

$$-2ra + a^2 + 14 = 0$$

$$a^2 + 14 = 2ra$$

$$D\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}; \frac{1}{2}\sqrt{14}\right)$$

$$F_y / F_x = \frac{2}{7} \sqrt{14} \cdot \frac{1}{5 \sqrt{14}} = \frac{2 \cdot \sqrt{14}}{5 \cdot \sqrt{14}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\left(\sqrt{14} - \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot a \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 +$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 38 \\ \times 256 \\ \hline 1536 \\ 768 \\ \hline 9216 \\ + 2890 \\ \hline 12106 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 5 \rightarrow \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$\left(\frac{\log 2x}{\log 5} \right)^4 - 3 \left(\frac{\log 5}{\log 2x} \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{\log 5}{\log 2x} \right) - 3$$

$$t = \log_5(2x)$$

$$\frac{t^4}{3} - 3 \cdot \frac{1}{t} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{t} \right) + 3 = 0$$

$$3t^4 - 13 \frac{1}{t} = 0 \rightarrow$$

$$t_x^5 + t_y^5 = 13/3$$

$$t_x^5 + 3t_x = \frac{13}{3}$$

$$\log_y^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 5^{-1} - 3$$

$$\log_y 5^{-1} = \log_y 5^{-1} = -\frac{1}{3} \log_y 5$$

$$(\log_y y)^4 + 4 \left(\frac{1}{\log_y y} \right) = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\log_y y} \right) - 3$$

$$y_y = \log_y(y)$$

$$t_y^5 + 4 \frac{1}{3} + 3 t_y = 0$$

$$t^5 y + 3 t_y = -\frac{13}{3}$$

$$t_x^5 + 3 t_x - t_y^5 - 3 t_y = 0$$

$$(t_x - t_y) (t_x^4 + t_x^3 t_y + t_x^2 t_y^2 + t_x t_y^3 + t_y^4) + 3 = 0$$



$\rightarrow$

$$5(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0) = 45$$

$$y_1 = -5(x_1 - x_0) + y_0 + 45$$

$x: y$