МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\begin{cases} a \cdot b = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot k_1 \\ b \cdot c = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot k_2 \\ a \cdot c = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot k_3 \end{cases} \Rightarrow a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3;$ $\quad a \cdot b \cdot c_{min} - ?$

т.к. $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N} \Rightarrow k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ и $a \cdot b \cdot c > 0$ и $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = \sqrt{2} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34} \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}$ но $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{N}$ тогда наименьшее натуральное значение будет достигаться при $\sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3} = \sqrt{2}$ (например $k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 1 - \mathbb{N}$) и будет равно $2^{28} \cdot 7^{34}$ Ответ: $2^{28} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2) max m - ?

$$\begin{cases} a+b \equiv 0 \bmod m \\ a^2-7ab+b^2 \equiv 0 \bmod m \end{cases}$$

$a^2-7ab+b^2 \equiv 0 \bmod m$

$(a+b)^2-9ab \equiv 0 \bmod m$

но $a+b \equiv 0 \bmod m \Rightarrow -9ab \equiv 0 \bmod m \Rightarrow$

$\Rightarrow -9ab \vdots m$; $9ab \vdots m$; $\Rightarrow \begin{cases} 9ab \equiv 0 \bmod m \\ a+b \equiv 0 \bmod m \end{cases}$

$a+b=km$; $b=km-a$; $9a(km-a)=k_1m$; $9akm-9a^2=k_1m$;

$9a^2-9akm+k_1m=0$; $D=81k^2m^2-4\cdot 9\cdot k_1m=$

$=9m(9k^2m-4k_1)$; $a=\dfrac{+9km\pm\sqrt{9m(9k^2m-4k_1)}}{18}=\dfrac{3km\pm\sqrt{m(9k^2m-4k_1)}}{6}$

$a,b\in\mathbb{N}$; $k,k_1\in\mathbb{N}$ так ка a-натуральное то $\dfrac{3km\pm\sqrt{m(9k^2m-4k_1)}}{6}$ - тоже натуральное. так как мы стремимся максимизировать m, то наиболее выгодный вариант достигается при $k=1$ и $k_1=1$

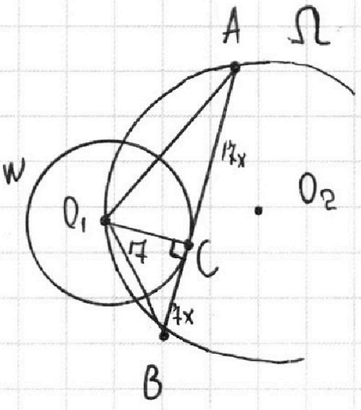
(изначально $a+b=km$ и $a\cdot b=k_1m$, очевидно, что при фиксированных a и b, m - ~~б~~ наибольшее при $k_1=1$ и $k=1$) $\Rightarrow a=\dfrac{3m\pm\sqrt{m(9m-4)}}{6}$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3)



1) По т. Пифагора в $\triangle O_1CA$:

$O_1A=\sqrt{289x^2+49}$

2) По т. Пифагора в $\triangle O_1BC$:

$O_1B=\sqrt{49x^2+49}=7\sqrt{x^2+1}$

3) По т. косинусов $\triangle O_1BA$: ~~$49x^2+49=289$~~ $O_1A^2=O_1B^2+AB^2-2\,O_1B\cdot AB\cdot\cos B$;

$289x^2+\cancel{49}=49x^2+\cancel{49}+576x^2-2\cdot7\sqrt{x^2+1}\cdot24x\cdot\cos B$;

$\cancel{336}x^2=\cancel{2}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{24}\sqrt{x^2+1}\cos B$; $\cos B=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$;

4) По осн. триг. тожд: $\sin B=\sqrt{1-\frac{x^4}{x^2+1}}=\sqrt{\frac{x^2+1-x^4}{x^2+1}}$;

5) $\triangle O_1AB$ - вписан в окр. Ω ⇒ радиус его описанной окружности $R=13$

6) По т. синусов $\triangle O_1AB$: $\frac{\sqrt{289x^2+49}}{\sqrt{\frac{x^2+1-x^4}{x^2+1}}}=26$; $\frac{(289x^2+49)(x^2+1)}{x^2+1-x^4}=26^2$;

$289x^4+289x^2+49x^2+49=-26^2x^4+26^2x^2+26^2$; ~~$315x^4+312x^2+23=0$~~;

~~$(3\cdot5\cdot3\cdot7)x^4+(3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot13)x^2+23=0$; $t=x^2$, $t\geq0$; $(3\cdot5\cdot3\cdot7)t^2+(3\cdot2^3\cdot13)t+23=0$~~

$965x^4-338x^2-627=0$; $(x-1)(965x^3+965x^2+627x+627)=0$

$(x-1)(x+1)(965x^2+627)=0$ ⇒ $x=\pm1$ ⇒ $x=1$; ⇒ $AB=24$;

не имеет корней $D<0$;

Ответ: 24;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(4) $\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x;$

$\cancel{3x^2}-6x+2-\cancel{3x^2}-3x-1=1-9x;$ $\Rightarrow \exists\, a=\sqrt{3x^2-6x+2}$, $b=\sqrt{3x^2+3x+1}$;

$a-b=a^2-b^2;$ $(a-b)=(a-b)(a+b);$

$$\left[\begin{array}{l} a=b \quad (1) \\ a+b=1 \quad (2) \end{array}\right.$$

(1) $\sqrt{3x^2-6x+2}=\sqrt{3x^2+3x+1}$; $\uparrow^2$ Проверка: $\sqrt{\frac{1}{27}-\frac{2}{3}+2}-\sqrt{\frac{1}{27}+\frac{1}{3}+1}=0;$

$\cancel{3x^2}-6x+2=\cancel{3x^2}+3x+1;$

$9x=1;$ $x=\frac{1}{9}$

$\sqrt{\frac{1}{27}+\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{1}{27}+\frac{4}{3}}$ - истина

$\Downarrow$

$x=\frac{1}{9}$ - подходит

(2) $\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$ $\uparrow^2$

$3x^2-6x+2+3x^2+3x+\cancel{1}+2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}=\cancel{1};$

$-6x^2+3x-2=2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}$ $\uparrow^2$

$(6x^2-3x+2)^2=4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)$ и $-6x^2+3x-2\geq 0$

$36x^4+9x^2+4-2\cdot 6x^2\cdot 3x-2\cdot 3x\cdot 2+6x^2\cdot 2\cdot 2=36x^4+36x^3+12x^2-72x^3-72x^2-24x+$
$+24x^2+24x+8$

$9x^2+4-12x=12x^2-72x^3-72x^2+8$

$72x^3+69x^2-12x-4=0$

$-6x^2+3x-2$: $D=9-4\cdot 2\cdot 6=9-48=-\ldots;$ ветви вниз $\Rightarrow$

$\Rightarrow -6x^2+3x-2<0$ всегда $\Rightarrow$ этот случай не даст решений.

Ответ: $\frac{1}{9}$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

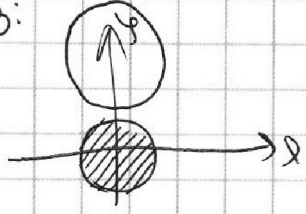
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(6) $\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$

I) сл. $\begin{cases} x^2+y^2\le 1 & \text{— окружность с ц. }(0;0),\ R=1 \\ x^2+(y-12)^2\geqslant 16 & \text{— окружность с ц. }(0;12),\ R=4 \\ ax+y-8b=0 & \text{— прямая} \end{cases}$

Эскиз:



$\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ ax+y-8b=0 \end{cases}$ либо 0 реш, либо бесконечность реш, либо 1 реш.

$0=ax+y-8b$ — кас. к $x^2+y^2=1$;

$\Downarrow$ $ax+y-8b=0$ — касательная к двум окружностям.

$\Uparrow$ $y=-ax+8b$; $\cancel{-ax+8b=x^2+y^2}$ $-ax+8b=\sqrt{1-x^2}$

1) $64b^2+a^2x^2-2ax\cdot 8\cdot b=1-x^2$;

$(a^2+1)x^2+64b^2-16abx-1=0$;

$D=256a^2b^2-4(64b^2-1)(a^2+1)$;

1 реш $\Rightarrow D=0$;

$\cancel{256a^2b^2}=\cancel{256a^2b^2}+256b^2-a^2-1$

$\boxed{256b^2=a^2+1}$ (*)

II) сл. аналогично:

$\begin{cases} x^2+(y-12)^2\geqslant 16 \\ ax+y-8b=0 \end{cases}$

$ax+y-8b=0$ — кас. к $x^2+(y-12)^2=16$;

2) $-ax+8b=\sqrt{16-x^2}+12$;

$\cancel{64b^2+a^2x^2-2ax\cdot 8\cdot b}=(-ax+8b-12)=\sqrt{16-x^2}$; $a^2x^2+64b^2+144-$

$-2ax\cdot 8\cdot b-2\cdot 12\cdot 8b+2ax\cdot 12=16-x^2$; $a^2x^2+64b^2+144-16axb-192b+24ax=$

$=16-x^2$; $D=0$; (*)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a+b=km$; $a^2+b^2+2ab=k^2m^2$; $a^2+b^2=k^2m^2-2ab$;

$\cancel{a^2-7ab+b^2=k_1m}$ $\quad k^2m^2-2ab-7ab=k_1m$;

$\cancel{(a+b)^2-9ab=k_1m}$ $\quad k^2m^2-9ab=k_1m$;

$\cancel{(km)^2-9ab=k_1m}$; $\quad km^2-k_1m-9ab=0$;

$D=k_1^2+4\cdot 9ab\cdot k$

$m=\frac{k_1 \pm\sqrt{k_1^2+36abk}}{2k}$

$m=\frac{k_1+\sqrt{k_1^2+36k_2}}{2k_3}$;

$\cancel{\left(k_1+(k_1^2+36k_2)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot k_3^{-1}=}$ $\cancel{mk_3=k_1+\sqrt{k_1^2+36k_2}}$

$\cancel{(mk_3-k_1)^2=k_1^2+36k_2}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-7\left(\frac{a}{b}\right)+1$

$m=\gcd(a+b, a^2-7ab+b^2)$

$\gcd\left(\frac{a+b}{m}\right.$

$x^2+(y^2-12)^2-16\geq 0$

$\frac{12}{6}$

$\frac{12}{192}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6

$(3m)^2 - 4 = x^2$

$4m = (x-3m)(x+3m)$

$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2\cdot 12\cdot y+144-16) \le 0$

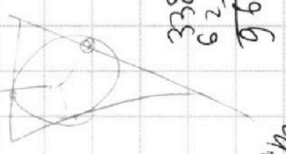
$(x^2+y^2-24y+128 \le 0)$

$((x+y)^2-2xy-1)$ $((x+y)^2-(2xy+24y-128))$

$x^2+(y-16)(y-8)$

$9m^2-4m=x^2$

$9m^2-x^2=4m$

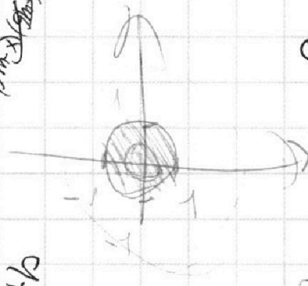


1

$x^2+y^2 \le 1$

$x^2+y^2-24y+128 \le 0$

$x^2+y^2 \le 24y-128$



$x^2+y^2-24y+128$

$9a^2$

$9a^2-9ma+m=0$

$(a+b+c)(a+b+c) =$

$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$y=8b-ax$

$9ab=m$

$a+b=m$

$9ab=a+b$

$b=m-a$

$9a(m-a)=m$

$9a^2-9am+m=0$

$x^2+(8b-ax)^2 \le (8b-ax)\cdot 24 \ldots$ $x^2+(8b-ax-12)^2-16$

$x^2+(8b-ax-16)(8b-ax-8)$

$-72+69+12-4$

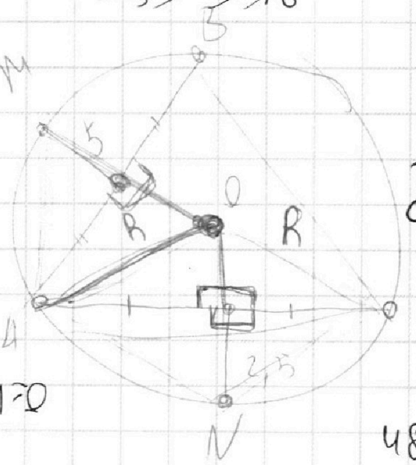
$D=1$ $(9\cdot 12-9)$

$12 \quad -144\cdot 2^2+69\cdot 2^2$

$-36\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+69\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+6-4$

$\frac{33}{4}+2$

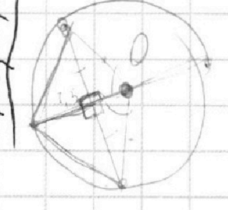
$-18\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+69\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{12}{4}-4=0$



$9ab=m$

$a+b=m$

8, 16, 24, 32, 4048



$12+12+2$

$a\,7+18+2$

$48+24+2=74$

$x^2-9m^2+4m=0$

$D=(9m^2+4m)(-4)$

$9-4(-2)\cdot(-6)=$

3, 8, 15, 24, 35

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

1

$$\begin{cases} a\cdot b = 2^{15}\cdot 7^{11}\cdot K_1 \\ b\cdot c = 2^{17}\cdot 7^{28}\cdot K_2 \\ a\cdot c = 2^{23}\cdot 7^{39}\cdot K_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a\cdot b = 2^{15}\cdot 7^{11}\cdot K_1 \\ \frac{a}{b} = 2^{6}\cdot 2^{21}\cdot \frac{K_3}{K_2} \\ a\cdot c = 2^{23}\cdot 7^{39}\cdot K_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 2^{21}\cdot 7^{32}\cdot \frac{K_1 K_3}{K_2} \\ \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2^{10}\cdot 7^{16}\cdot \sqrt{2}\,\frac{K_1\cdot K_3}{K_2} \\ b = \frac{2^{15}\cdot 7^{11}\cdot \cancel{K_1}\cdot K_2}{2^{10}\cdot 7^{16}\cdot\sqrt{2}\,K_3\cdot \cancel{K_1}} \\ c = \frac{2^{23}\cdot 7^{39}\cdot \cancel{K_3}\,K_2}{2^{10}\cdot 7^{16}\cdot\sqrt{2}\cdot K_1\cdot \cancel{K_3}} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2^{10}\cdot 7^{16}\cdot\sqrt{2}\,\frac{K_1\cdot K_3}{K_2} \\ b = \frac{2^5}{7^5} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

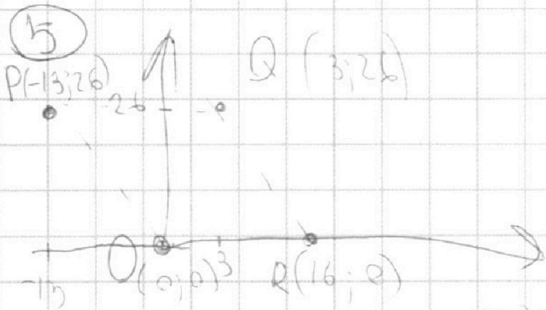
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5



$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$;

$2\Delta x+\Delta y=14$;

$\Delta y=14-58=$

$\Delta y\le 26$

58 $14-\Delta y\le 58$; $\Delta x\le 29$

$14+2x_1-2x_2=(y_2-y_1)$

$x_1-x_2=(y_2-y_1-14)/2$

$\cancel{2\Delta x=14+\Delta y}$, $\Delta y\ 14-2\Delta x$;

$\Delta y\ge -44$ $2\Delta x\le 58$

$-\Delta y\le 44$ $2\Delta x+\Delta y\le 84$

$14-2\Delta x\le 26$;

$7-\Delta x\le 13$; $\Delta x\ge -6$; $x_2-x_1\ge -6$;

$x_1-x_2\le 6$;

$x_1-x_2\le 6$; $2(x_1-x_2)\le 12$;

$14+y_1-y_2\le 12$; $y_1-y_2\le -2$; $y_2-y_1\ge 2$;

$-26\le 14-2(x_2-x_1)\le 26$

$-28\le x_1-x_2\le 29$

$-26\le y_1-y_2\le 26$

$-40\le -2(x_2-x_1)\le 12$

$-40\le 2(x_1-x_2)\le 12$

$\boxed{-20\le x_1-x_2\le 6}$ $-20\le\dfrac{(y_2-y_1-14)}{2}\le 6$; $-40\le y_2-y_1-14\le 12$;

$-26\le y_2-y_1\le 26$

$\begin{cases}\Delta y\le 26\\ \Delta x\le 29\\ 2\Delta x+\Delta y=14\end{cases}$ $\begin{cases}-26\le 14-2\Delta x\le 26\\ -29\le\Delta x\le 29\end{cases}$ $\begin{cases}-20\le -\Delta x\le 6\\ -29\le\Delta x\le 29\end{cases}$ $\begin{cases}6\le\Delta x\le 20\\ -29\le\Delta x\le 29\end{cases}$

$\begin{cases}-26\le\Delta y\le 26\\ 6\le\Delta x\le 20\\ 2\Delta x+\Delta y=14\end{cases}$ $\begin{cases}\\ \Delta x=\dfrac{14-\Delta y}{2}\end{cases}$ $\Rightarrow 6\le\dfrac{14-\Delta y}{2}\le 20$; $12\le 14-\Delta y\le 40$; $-2\le -\Delta y\le 26$; $-26\le\Delta y\le 2$

$\cancel{\Delta y-2\Delta x}$ $-26\le 14-2\Delta x\le 2$, $-40\le -2\Delta x\le -12$; $12\le 2\Delta x\le 40$; $6\le\Delta x\le 20$;

$\begin{cases}6\le\Delta x\le 20\\ -2\le\Delta y\le 26\\ 2\Delta x+\Delta y=14\end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(1) $a \cdot b = 2^{15} 7^{11} \cdot K_1$ $\quad a \cdot b = 2^{15} \cdot 7^{11} K_1$ $\quad a \cdot b = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot K$

$b \cdot c = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot K_2$ $\quad \frac{b}{a} = \frac{1}{2^6 \cdot 7^{21}} \cdot \frac{1}{K_1}$ $\quad \frac{a}{b} = 2^6 \cdot 7^{21} \cdot K_4$

$a \cdot C = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot K_3$

$a^2 = 2^{21} \cdot 7^{32} K_3$ $\quad a = 7^{16} \cdot 2^{10} \sqrt{2} \cdot K_3$

15
17
23
40

$168 | 8$, 16, 21, 01

(4) $D_1 = 36 - 4 \cdot 32 = 12;$

$240 - 516 =$
$= -336$

$1 - 9x;$

$D_2 =$

$336 = 168$

$168 + 168 = 336$

$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 =$
$= -9x + 1 = 1 - 9x;$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1 - 9x$

$a^2 - b^2 = 1 - 9x$ $\quad a^2 - b^2 = a - b;$ $\quad (a-b)(a+b) = (a-b);$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b;$ $\quad \left[\begin{array}{l} a = b \\ a + b = 1 \end{array}\right.$

$105 | 15$, 21

$14 \cdot 24 = 56 + 28 = 336$

$289 + 26 = 315$

(2) $m - max - ?$ $\quad gcd(a, b) = 1;$ $\quad gcd(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = m;$

$b^3 (a+b) = 0 \mod m;$

$-9ab \vdots m;$

$a^2 - 7ab + b^2 = 0 \mod m$

$\Downarrow$

$(a+b)^2 - 9ab \vdots m$ $\quad \underline{m_{max} = 9ab}$

$289 - 49$

-49, -26, 23

$24 \cdot 24 = 96 + 48 = 576$

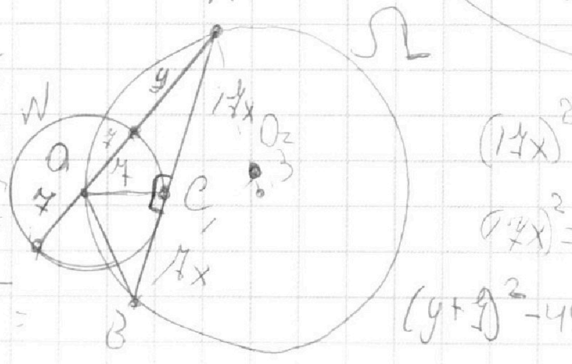
$289 + 23 = 312$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0 \mod m;$

$9ab \vdots m$

$\frac{a}{b}$ $\quad -9\frac{a}{b} \vdots \frac{m}{b^2}$

$17 \cdot 17 = 119 + 17 = 289$



(3) $AB - ?$ $\sqrt{7^2 + 7^2 x} = 7\sqrt{x+1}$

$O_1 A = \sqrt{(17x)^2 + 7^2} = \sqrt{289x^2 + 49}$

$(17x)^2 = y \cdot (y + 14)$

$(17x)^2 = (7+y)^2 - 49$

$(y+7)^2 - 49 = y^2 + 14y$, $\quad y^2 + 49 + 14y = y^2 + 14y$

26

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~4~~ ~~5~~

6 $\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\leq 0; \end{cases}$

I сл) $\begin{cases} (x-0)^2+(y-12)^2\leq 16 \ (1) \\ x^2+y^2\leq 1 \ (2) \\ ax+y-8b=0 \end{cases}$ эскиз:

(1) и (2) - не пересекаются =)

=) нет решений

II сл) $\begin{cases} (x-0)^2+(y-12)^2\geq 16 \\ x^2+y^2\geq 1 \\ ax+y-8b=0 \end{cases}$

$y=8b-ax$; $y=-ax+8b$; - наклон. прямая