



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

Объем:  $2^{26} \cdot 7^{37}$

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$

$\min abc = ?$

1) Заметим, что т.к.  $ac: 7^{37}$ , то и  $abc: 7^{37}$

2)  $ab \cdot ac \cdot bc = (abc)^2: 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37} = 2^{51} \cdot 7^{64}$

Отсюда  $abc: 2^{26}$ , если  $abc \neq 2^{26}$ , то ст. входящих 2-ки  $a^2 b^2 c^2$  не больше 50.

Значит  $abc: 2^{26} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример:  $a = 2^9 \cdot 7^{10}$        $b = 2^5$        $c = 2^{12} \cdot 7^{27}$

Тогда  $ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{27}$

$ac = 2^{21} \cdot 7^{37}$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ . Все сошлось.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

Ответ: 8

$(a; b) = \text{НОД}(a; b)$   
выб., что  $(a; b) = (a; b + a \cdot k)$  - трив. св-во НОД

т.к.  $\frac{a}{8}$  - несократимая, то  $(a; b) = 1$ . Итого

$(a; a+b) = 1$  и  $(b; a+b) = 1$ , тогда  $(ab; a+b) = 1$

Заметим, что если  $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$  сокр. на  $m$ , то

$$(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = m^2 \cdot \frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = (a+b)^2 - 4ab$$

$$(a+b; (a-b)^2 - 4ab) = (a+b; -(a+b)^2 + (a-b)^2 - 4ab) =$$

$$= (a+b; -a^2 - b^2 - 2ab + a^2 + b^2 - 2ab - 4ab) =$$

$$= (a+b; 8ab)$$

Выше мы доказали, что  $(a+b; ab) = 1$ .

Поэтому  $(a+b; 8ab) \leq 8$ . То есть  $m \leq 8$ .

$$(a+b; 8)$$

Пример:

$$a=6 \quad b=2$$

$$\frac{6+2}{36 - 6 \cdot 6 \cdot 2 + 2^2} = \frac{8}{40 - 72} = \frac{8}{32} \quad \text{— сократимо на 8.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4.

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

Данными образом разделим левую часть на  $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}$

Получим:

$$\frac{2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$$

$$\frac{-7x+2}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$$

Итак:  $x=3,5$  - не годит  $\Rightarrow$  можно делить на  $2-7x$

$$\frac{-1}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 1$$

$$-1 = \underbrace{\sqrt{2x^2-5x+3}}_0 + \underbrace{\sqrt{2x^2+2x+1}}_0 \quad (?) \quad \text{Значит нет решения.}$$

При делении на  $2-7x$  область определ. уменьшась на  $\{3,5\}$ ,

но  $3,5$  - не годит, т.к. можно подставить и не сойдется, а

при делении на  $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}$  область определения не уменьшась, т.к.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

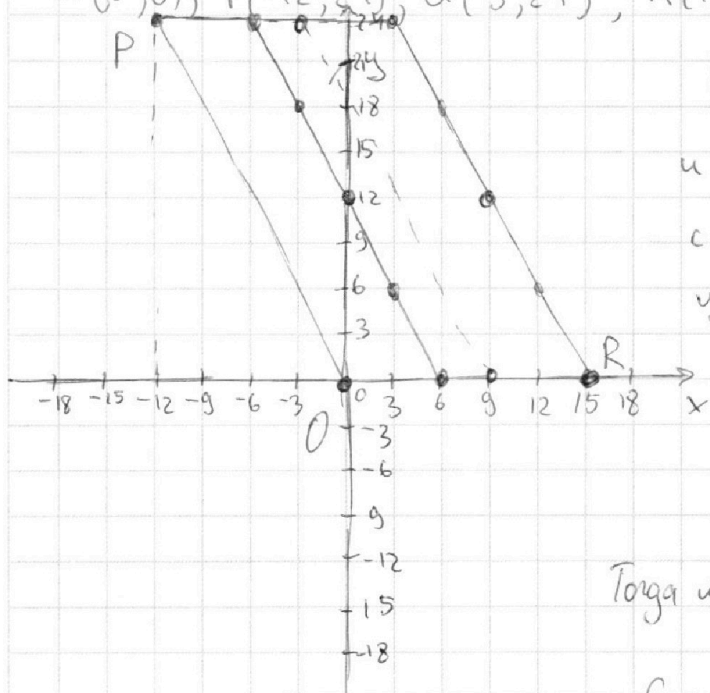
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5.

Ответ: 1690 пар.

$O(0;0); P(-12;24); Q(3;24); R(15;0)$

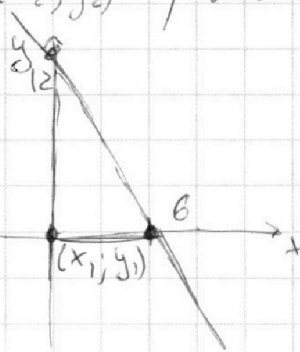


Пусть мы выбрали  $(\cdot)(x_1; y_1)$   
и хотим найти, какие  $(x_2; y_2)$   
с целыми коорд. удовлетворяют  
условию  $2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

Запишем  $x_1; y_1$ , НУД:  $x_1 = 0$   
 $y_1 = 0$

$$2x_2 + y_2 = 12 \quad y_2 = 12 - 2x_2$$

Тогда мы-во  $(\cdot)(x_2; y_2)$  - прямая:



Тогда заметим, что для любой целой  
точки на  $PO$  такая прямая совпадает,  
т.е.  $\forall (\cdot)$  целой  $\in PO$  кол-во целых,  
удовлетворяющих условию одинаково.

Аналогично  $\forall$  целых  $(\cdot) \in (11;0); (-11;24)$  кол-во целых равно  
и равно кол-ву для  $\forall$  целых на  $PO$ , так как параллельный  
перенос. Заметим, что для точек  $\in$  параллелограмме  
 $OPQR$ , правее  $(9;0); (-3;24)$  нет точек, удовлетворяющих условию  
вино (очевидно из картинки). Итого  $\forall (\cdot)$  целой в параллелогра-  
мме  $P, O, (9;0); (-3;24)$  количество подходящих в параллело-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 (продолжение).

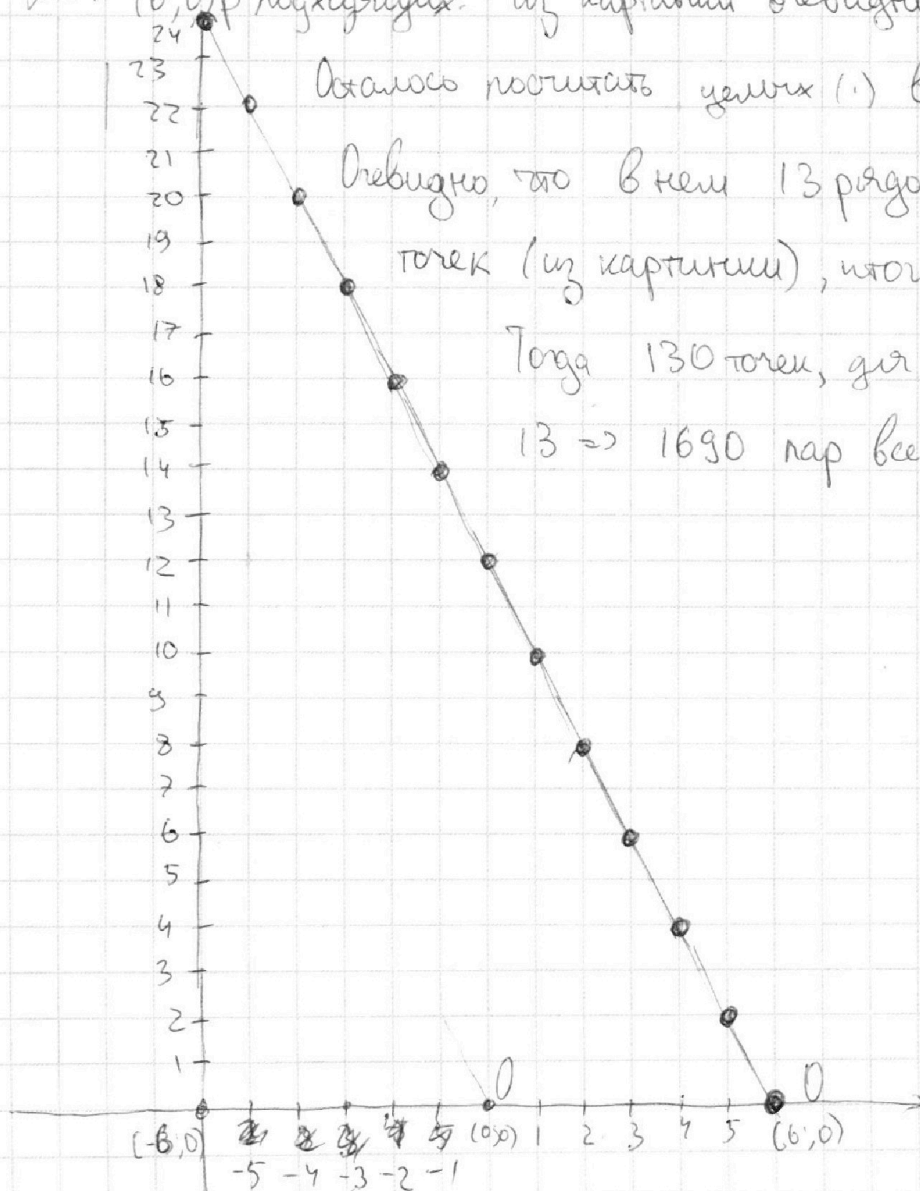
границе  $OPQR$  одинаково и подходящие есть только у  
этих точек.  $\Rightarrow$  достаточно посчитать кол-во подходящих  
для  $(\cdot) (0;0)$  и умножить это на кол-во точек  $(\cdot)$  в  
параллельно границе  $OP(9;0)(-3;24)$ .

Для  $(0;0)P$  подходящих: из картинки очевидно, что их 13.

Осталось посчитать точек  $(\cdot)$  в  $OP(9;0)(-3;24)$ ,

Очевидно, что в нем 13 рядов по 10 точек  
точек (из картинки), итого 130.

Тогда 130 точек, для каждой подходит  
13  $\Rightarrow$  1690 пар всего.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \end{cases}$$

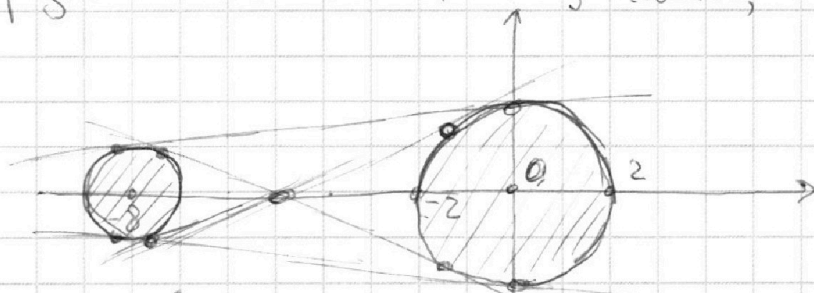
$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 < 0 & (2) \\ (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Посмотрим на (1)  $(x; y)$  удовлет-  
воряющие (2).

Заметим, что  $x^2 + y^2 - 4 = 0$  - оир. радиуса 2 с центром в  $(0; 0)$

$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$  - оир. радиуса 1 с центром в  $(-8; 0)$ .

Окружности разбьем м-во на 3 части, висящей



одинаковые знаки (т.к. знак ме-

няется при переходе через окружность). Тогда заметим,

что выражение отриц. внутри оир. Тогда мн-во ~~(1)~~ удовлет-

(2) это 2 круга. Заметим, что (1) - прямая. Прямая имеет

2 общие точки с 2 кругами тогда и только тогда, когда

она - общая касательная. Осталось посчитать ~~2~~ общие касательные.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

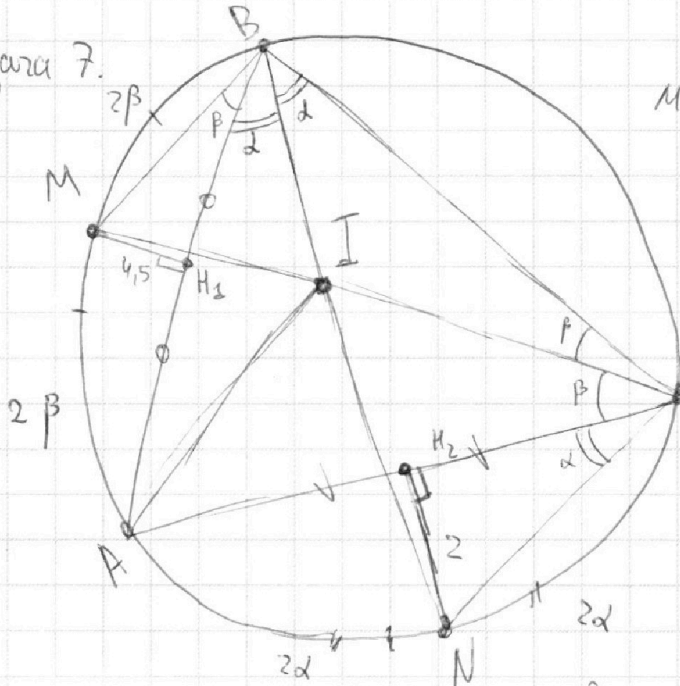
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



$$MH_1 = 4,5$$

$$NH_2 = 2$$

Заметим, что  $B, I, N$  - на одной прямой, т.к.

$BN$  - биссектриса  $\angle ABC$ , аналогично  $C, I, M$  - на одной прямой.

$$BH_1 = \frac{MH_1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{4,5}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$\text{Значит } BA = 2 \cdot BH_1 = \frac{9}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$AC = 2 \cdot CH_2 = 2 \cdot \frac{NH_2}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{\operatorname{tg} \alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = ((a-3b)^2 - 8b^2; a+b)$$

$$((a-b)^2 - 4ab; a+b) = m$$

$$AC:BC=7$$

$$((a-b)^2 - (a+b)^2 - 4ab; a+b) = m$$

$$(a^2 + b^2 - 2ab - a^2 - b^2 - 2ab - 4ab; a+b) = m$$

$$(-8ab; a+b) = m$$

$$7x^2 = 25 - y^2$$

$$(8ab; a+b) = m$$

$$(a, b) = 1 \Rightarrow (a+b, a) = 1 \text{ и } (a+b, b) = 1$$

$$(a+b, ab) = 1 \Rightarrow (8ab, a+b) = m$$

$$\max = 8$$

$$(8, a+b) \leq 8$$

$$a+b$$

$$\frac{5+3}{25 - 6 \cdot 5 + 9} = \frac{8}{34 - 30} = 2$$

$$6+2$$

$$36 - 6 \cdot 6 + 4$$

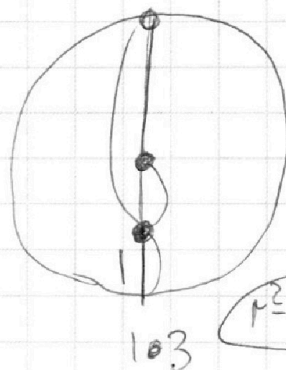
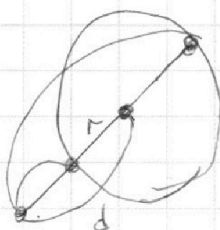
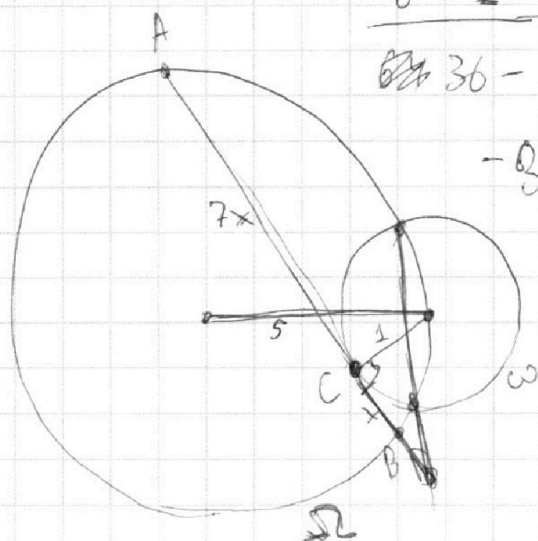
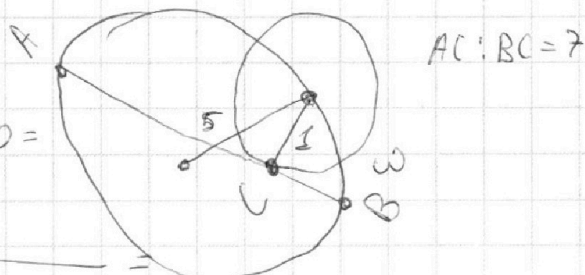
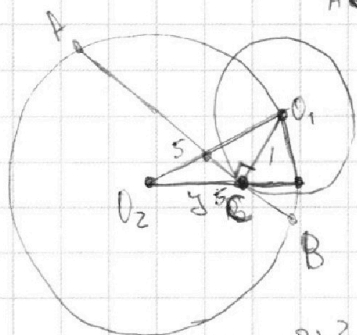
$$-36 + 4 = -32$$

$$R_{\omega} = 1$$

$$R_{\Omega} = 5$$

$$(d-r)(d+r) = \sqrt{d^2 - r^2}$$

$$r^2 = d^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{14} 7^{10}$$

$$ac: 2^{20} 7^{37}$$

$$bc: 2^{17} 7^{17}$$

$abc \min$

$\frac{a}{b}$  - несократима

$$(a; b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$4^7 b^7 c^2: 2^{53} 7^{64}$$

$$2^{36+17} = 2^{53}$$

max m:  $a+b: m$

$$a^2 - 6ab + b^2: m$$

$abc: 2^{26} 7^{32}$

54

51 (26)

$$54: 2 = 27$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a-b)^2 - 4ab$$

$$a_2 + b_2 \geq 16$$

$$b_2 + c_2 \geq 17$$

$$\Rightarrow c_2 - a_2 = 1 \Rightarrow c_2 = a_2 + 1$$

$$(a-b; a) = 1$$

$$(a-b; b) = 1$$

$$a_2 + b_2 \geq 14$$

$$(a-b; ab) = 1$$

$$a_2 + c_2 \geq 20 \Rightarrow 2a_2 + 1 = 20$$

$$+ a_2 + c_2 \geq 20$$

$$a_7 + b_7 = 10$$

лучше  $a_2 = 10$

$$b_2 + c_2 \geq 17$$

$$a_7 + c_7 = 37$$

$$b_7 + c_7 = 17$$

$$c_2 = 10$$

$$2 \Sigma \geq 51$$

$$\Sigma \geq 26 \quad 31$$

$$c_7 - a_7 = 7 \Rightarrow c_7 = a_7 + 7$$

$$2a_7 + 7 = 37$$

$$a_7 = 15$$

$$c_7 = 22$$

$$a + c = 37$$

$$c_2 = a_2 + 3$$

$$a \geq 10$$

$$2a_2 + 3 = 20$$

$$b \geq 17$$

$$14 + 12$$

$$a_2 = 9$$

$$b_2 = 5$$

$$c_2 = 12$$







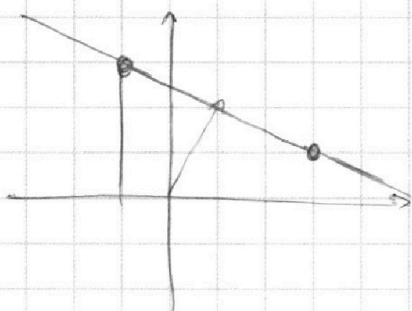
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(1; 2)

13

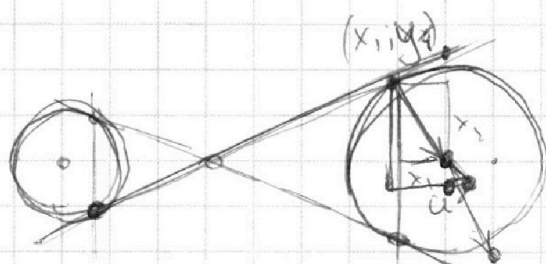
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-2}$$

$$x+1 = -2y+6$$

$$x+2y-5=0$$

$ax-y+10b=0$  - ось абсцисс  
касательная.



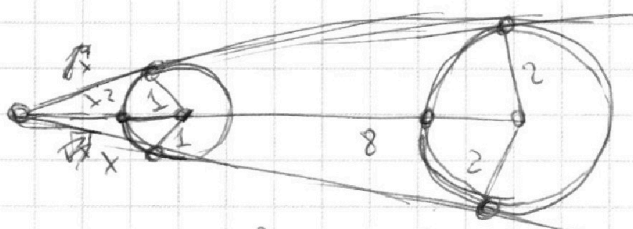
$(-x_1; -x_2)$

$$-x_1x - y_1y + c = 0$$

$$-x_1x - y_1y + c = 0$$

$$x_1x + y_1y + c = 0$$

$$\begin{cases} x_1x + y_1y + c = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 = 2 \end{cases}$$



$$x^2+6 \cdot 2 - 2x^2+12 = (x+8)^2$$

(-1)

$$x, x+y, y+c = (x+8)^2 + y^2 - 1 \quad (a, -1) \text{ - нормаль}$$

$$ax - y + 10b = x^2 + y^2 - 4$$

$$ax - y + 10b = (x+8)^2 + y^2 - 1 = x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1$$

$$ax - x^2 + 10b + 4 = y^2 + y$$

$$ax - x^2 + (a-16)x - x^2 + 10b - 63 = y^2 + y$$

$$(a-16)x - x^2 + 10b - 63 = ax - x^2 + 10b + 4$$

$$-16x = 69$$

$$x = -\frac{69}{16}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-2x$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-2x \\ & \sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1} + 2-2x \\ & \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-2x + \sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2+2x+1} \\ & \sqrt{2x^2-5x+3} = \frac{-7x+2}{\sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-2x \end{aligned}$$

$$D = 4 - 12 < 0$$

$$-\frac{2}{4} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \quad 25 - 24 = 1$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$\frac{5 \pm 1}{4} = 1$$

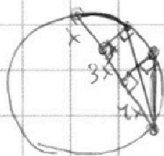
$$\frac{5 \pm 1}{4} = 1,5$$

$$x \in (1; 1,5)$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + 7x = 2 + \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 49x^2 + 2 \cdot 7x \cdot \sqrt{2x^2-5x+3} = 4 + 2x^2 + 2x + 1 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$51x^2 - 5x + 3 + 14x \sqrt{2x^2-5x+3} = 2x^2 + 2x + 5 + 4 \sqrt{2x^2+2x+1}$$



$$2x^2 + 2x + 1 = \sqrt{(x+1)^2 + x^2}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (x-a)^2 + (x-b)^2$$

$$\sqrt{3}$$

$$2$$

$$2$$

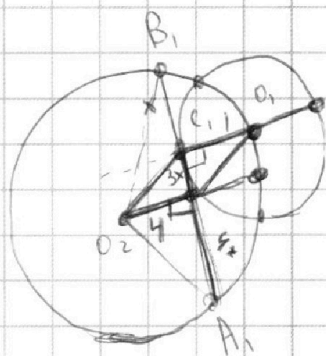
$$2 - 2 + 1$$

$$2(a+b) = 5$$

$$a^2 + b^2 = 3$$

$$1 \quad 2 - 5 + 3$$

$$2x^2 + 1 = 5$$



$$-1 \quad 2x^2$$

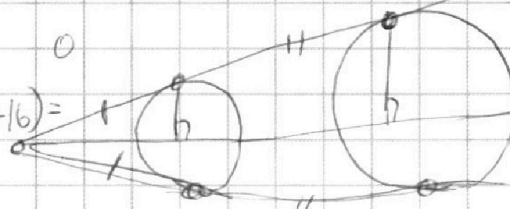
$$7x^2 = 5^2 - (9x^2 + 16) = 1$$

$$2 - 2 + 1$$

$$2 + 5 + 3 = 10$$

$$9x^2 = 25 - 16 - 9x^2$$

$$16x^2 = 9$$





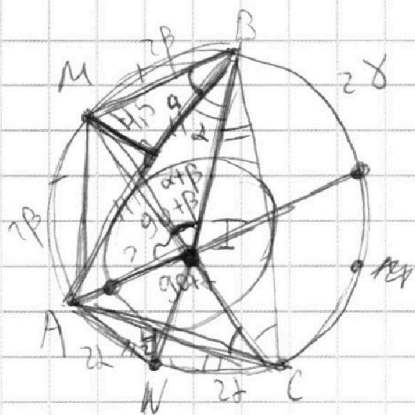
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

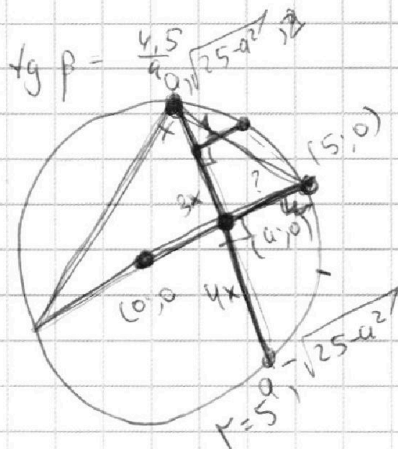


$$4\beta + 2\alpha$$

$$a = \frac{4,5}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$AB = \frac{9}{\operatorname{tg} \beta}$$

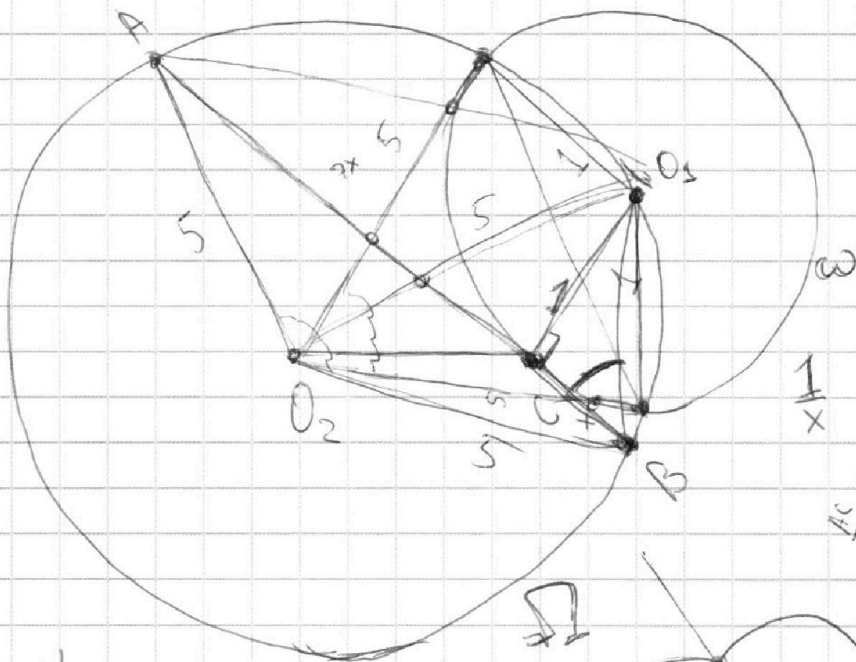
$$AC = \frac{4}{\operatorname{tg} \alpha}$$



$$AB = ? \quad x^2 + y^2 = 25$$

$$5^2 a^2 + y^2 = 25$$

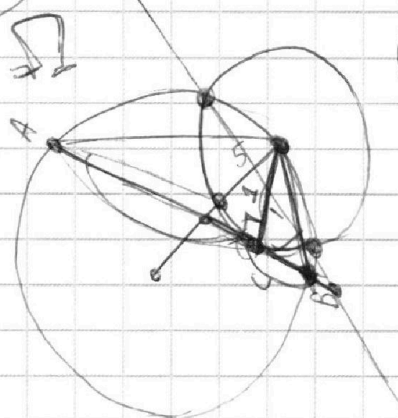
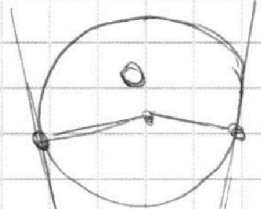
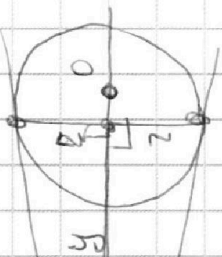
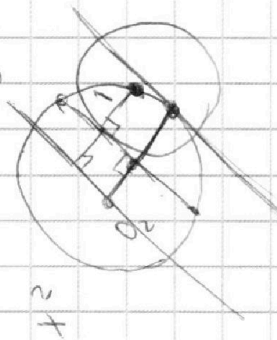
$$y = \pm \sqrt{25 - a^2}$$



$$\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{7x}$$

$$\frac{AC}{CB} = 7$$



$$x^2$$

$$\sqrt{2+x}$$

