



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{15} \cdot 7^4$$

$$bc: 2^{14} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\Rightarrow (abc)^2: 2^{45} \cdot 7^{68} \Rightarrow$$

$$abc: 2^{23} \cdot 7^{34}$$

Пусть α, β, γ - степени, 2^4 делит

a, b и c соответс. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, т.е. α, β, γ

- неотрицательные тогда

$$\begin{cases} \alpha + \beta \leq 15 \\ \beta + \gamma \leq 14 \\ \gamma + \alpha \leq 23 \end{cases}$$

$$\beta + \gamma \leq 14$$

$$\gamma + \alpha \leq 23$$

β | Макс. число делителей
которого α

0	15
1	14
2	13
3	12
4	11
5	10
6	9

Макс. число делителей
которого γ

14
16
15
14
13
12
11

$\alpha + \beta \leq 23$. Значит $\min(\alpha + \beta + \gamma)$ достигается при $\beta = 5$, т.е. после β увеличивается α , а $\alpha + \beta \leq 23$

$\beta = 5$; $\alpha = 11$; $\gamma = 12$ - подходит, т.е. $\alpha + \beta + \gamma \leq 28$

$$abc \geq 2^{28} \cdot 7^x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Т.к. степени "7" не являются ни
степенями "5", то переобозначим
 L, β, γ как степени "5" чисел
 a, β и c соотв. образом:

$$\begin{cases} L = \beta = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L + \gamma = 39 \end{cases}$$

L	Мин. число β такое которого "	Мин. число γ такое которого "
0	11	33
1	10	38
2	9	37
3	8	36
4	7	35
5	6	34
6	5	33
7	4	32
8	3	31
9	2	30
10	1	29
11	0	28
12	0	27

При $L \geq 12$ сумма $L + \beta + \gamma$ уменьшится
не будет (к L приб. 1, из γ убав. 1) значит
 $\min(L + \beta + \gamma)$ равно 39. ($L=12; \gamma=27; \beta=0$)

Ответ: $2^{28} \cdot 4^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$\frac{a}{b}$ - несократимая $\Rightarrow a$ и b - взаимно простые числа.

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$. Если $a+b:m$, то $a^2-7ab+b^2:m$ (цел., что $7ab$ сократима).
 $(a+b)^2-9ab = a^2-7ab+b^2$,

получается, что $7ab$ сократима, следовательно,

$7ab:m$. Если $m:a$ или $m:b$, то

$a+b:a$ или $a+b:b$, что невозможно,

т.к. a и b - взаимно просты. Значит

~~на~~ $m \leq 7$. Пример $m=9$:

$a=4; b=5$.

$$\frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 & (1) \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$1) D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 - 24 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$2) D = 9 - 4 \cdot 3 < 0$$

замечаем, что $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0$,

т.к. $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \geq 0$, а $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0$

$$(3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2})$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2})$$

$x = \frac{1}{9}$ или $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1$
(не подходит по ОДЗ)

$f(x) = 3x^2 + 3x + 1$. Найдем x_0 : $x_0 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{9}) = \frac{3}{9} - \frac{3}{2} + 1 = 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. Замечаем, что

при $x < 0$ $3x^2 - 6x + 2 \geq 2 > 1$, а при $x > 0$

$3x^2 + 3x + 1 \geq 1$; при $x = 0$: $3x^2 + 3x + 1 = 0 + 1 = 1$ и

$3x^2 - 6x + 2 = 2$; $\sqrt{1} + \sqrt{2} > 1$ при $x \in \text{ОДЗ}$
Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \text{ или } x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 1$ - окр. с ц. в точке $(0; 0)$ и $R = 1$

$x^2 + (y - 12)^2 = 16$ - окр. с центром в т. $(0; 12)$ и $R = 4$

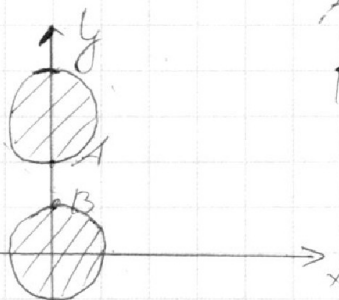
$y = -ax + 8b$ - прямая

$A(0; 8)$

Рассеиваясь идет

$B(0; 1)$

показ 2,



только если

$y = -ax + 8b$ - будет касательная к кругам, иначе либо не будет касательной, либо бесконечно много, либо 1.

$$x^2 + (8b - ax)^2 = 1; \quad x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 1 = 0$$

$$x^2(1 + a^2) + x(-16ab) + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = (16ab)^2 - 4(1 + a^2)(64b^2 - 1) = 0 \text{ (касательная)}$$

$$48a^2b^2 + (1 + a^2)(1 - 64b^2) = 0$$

$$48a^2b^2 + a^2 - 64a^2b^2 + 1 - 64b^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

Пусть $k = -a$ и $8b = \frac{1}{b}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = kx + \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow x^2 + k^2 x^2 + 2kx \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} = 1 = 0$$

$$x^2(1+k^2) + x(2k/b) + \frac{1}{b^2} - 1 = 0$$

$$D = 4k^2 \frac{1}{b^2} - 4(1+k^2)(\frac{1}{b^2} - 1) = 0 \text{ (усл. для}$$

касания). $k^2 \frac{1}{b^2} - (\frac{1}{b^2} - 1 + k^2 \frac{1}{b^2} - k^2) =$

$$= -\frac{1}{b^2} + k^2 + 1; \text{ значит } k^2 = \left(\frac{1}{b^2} + 1\right) \frac{1}{b^2} = \frac{1}{b^2} + 1$$

$$\begin{cases} x^2 + (y-12)^2 = 16 \\ y = kx + \frac{1}{b} \end{cases} \quad k \neq 0, \text{ так как прямая, пер-}$$

ая осей Ox не явл. касат. к окружности.

$$x = \frac{y - \frac{1}{b}}{k}, \quad \frac{y^2 - 2y \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}}{k^2} + y^2 - 24y + 128 = 0$$

$$y^2 - 2y \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + k^2 y^2 - 24k^2 y + 128k^2 = 0$$

$$y^2(1+k^2) + y(-24k^2 + \frac{1}{b^2}) + \frac{1}{b^2} + 128k^2 = 0$$

$$D = 4(12k^2 + \frac{1}{b^2})^2 - 4(1+k^2)(\frac{1}{b^2} + 128k^2) = 0$$

$$(12k^2 + \frac{1}{b^2})^2 - (1+k^2)(\frac{1}{b^2} + 128k^2) =$$

$$= (13k^2 + 1)^2 - (1+k^2)(128k^2 + 1) =$$

$$= 169k^4 + 26k^2 + 1 - (128k^2 + 1 + 128k^4 + k^2) =$$

Пусть $k^2 = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$169a^2 + 26a + 1 - (123a^2 + 130a + 1) =$$
$$= 46a^2 - 104a = 0; \text{ т.к. } a \neq 0$$

$$46a = 104; \quad a = \frac{104}{46} = \frac{52}{23} = \frac{26}{11.5} = \frac{13}{5.75}$$

Сокращенная запись:

$$k^2 = \frac{13}{5}; \quad b^2 = \frac{18}{5}$$

Сокращенная запись:

$$a^2 = \frac{13}{5}; \quad 64b^2 = \frac{18}{5}$$

Заметим, что при $a = \pm \sqrt{\frac{13}{5}}$ существуют
b, являющиеся решением параметра, при
котором ровно 2 решения
Счет: $\pm \sqrt{\frac{13}{5}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$a^2 - 6ab^2 - 12a^2b^2 + 1 = 0$$

$$b^2(-6a - 12a^2) + 1 - a^2 = 0$$

$$D_b = 4(6a + 12a^2)(1 - a^2)$$

Но $a=0$ не подходит; т.е. прямая, касаясь
ок не является общей касательной

$$x = \frac{8b-y}{a}$$

$$\left(\frac{8b-y}{a}\right)^2 + (y-12)^2 = 16$$

$$\frac{64b^2 - 16by + y^2}{a^2} + y^2 - 24y + 144 - 16 = 0;$$

$$64b^2 - 16by + y^2 + y^2a^2 - 24a^2y + 128a^2 = 0$$

$$y^2(1+a^2) + y(-16b - 24a^2) + 64b^2 + 128a^2 = 0$$

$$D = (8b + 12a^2)^2 - 4(1+a^2)(64b^2 + 128a^2) = 0$$

$$4b^2 + 6a^2b + 3a^4 - 4(1+a^2)(4b^2 + 8a^2) = 0$$

$$4b^2 + 6a^2b + 3a^4 - 16b^2 - 32a^4 - 16a^2b^2 - 32a^2 = 0$$
$$-12b^2 - 23a^4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

d	37	87	
0	11	38	
1	10	38	
2	9	34	
3	8	36	
4	7	35	
5	6	39	
6	5	33	
7	4	37	
8	3	31	
9	2	30	
10	1	29	40
11	0	28	39
12			
13	0	27	

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\alpha + \beta + \gamma \approx 57 - \delta$$

$$\gamma \approx 23$$

$$\delta \approx 46 - \gamma$$

$$2\delta \approx 46$$

$$\delta = 23$$

$$\alpha = 16$$

$$\alpha + \beta + \gamma \approx 50 - \alpha$$

$$\alpha \approx 15 - \beta$$

$$\alpha = 0$$

$$\gamma \approx 39$$

$$\beta \approx 11$$

$$\alpha \approx 40$$

$$\alpha = 1$$

$$\gamma \approx 38$$

$$\beta \approx 10$$

$$\delta \approx 39$$

$$\alpha = 5$$

$$\beta \approx 6$$

$$\delta \approx 39$$

$$\gamma \approx 45$$

$$\alpha + \gamma \approx 38 - \beta - \alpha$$

$$\alpha + \gamma \approx 23$$

$$\beta + \alpha \approx 15$$

$$\alpha \approx 13 - \beta$$

$$\beta \approx 14 - \gamma$$

$$\gamma \approx 23 - \alpha$$

$$\beta = 0$$

$$\alpha \approx 15$$

$$\gamma \approx 14$$

$$\beta = 1$$

$$\alpha = 0$$

$$\gamma \approx 39$$

$$\beta \approx 10$$

$$\alpha = 1$$

$$\alpha + \beta + \gamma \approx 57 - \delta$$

$$\delta \approx 57$$

$$\alpha + \beta + \gamma \approx 37$$

$$\alpha \approx 14$$

$$\gamma \approx 16$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~min значение $L+B+T$~~ (значение $32-B$)

B	$L+B+T$	$32-B$
0	23	32
1	24	31
2	25	30
3	26	29
4	27	28
5	28	27
6	29	

Откуда видно, что при $B=5$ выполняется
необходимое усл. ($L+B+T \geq 32-B$),
значит $L+B+T \geq 28$ (подождем $L=11$; $B=5$; $T=12$)
т.к. степень „2“ не записывается от степени
„4“, то переобозначим L, B, T как
степени „4“ числа a, b и c соотв.
числам:

$$\begin{cases} L+B \geq 11 \\ B+T \geq 18 \\ T+L \geq 39 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

60: 2¹⁷ · 7¹⁸

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$(abc)^7 : 2^{45} \cdot 7^{68} \Rightarrow$$

$$abc: 2^{73} \cdot 7^{36}$$

Пусть α, β, γ - стороны "2" числа
 a, b с соотв. α, β, γ и μ, ν, ρ
 тогда

$$|\alpha + \beta| \approx 15$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 10 \\ \beta + \gamma \geq 14 \end{cases} \Rightarrow 2(\alpha + \beta + \gamma) \geq 45, \quad \alpha + \beta + \gamma \geq 23$$

$$(\gamma + \alpha) \geq 23$$

~~Exercise~~ $L + \sqrt{3} \cdot r = 23,70$ $\phi = 0$; $\beta = 15$; $r = 8$

~~уравнение, значит $L + B + f = 20$~~

~~$$d = 11; \beta = 5; r = 17$$~~

three $\beta = 0$; $\alpha = 15$; ~~$r = 8$~~

~~$$B=0: \begin{cases} x \geq 15 \\ y \geq 14 \end{cases} \quad L+B+y \geq 32$$~~

$$L + \beta + \gamma \geq 32 - \beta, \text{ spruce } L + \gamma \geq 23 \Rightarrow$$

$\beta \approx 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} \cdot 4^4$$

$$bc: 2^{14} \cdot 4^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 4^{39}$$

$$(abc)^2: 2^{45} \cdot 4^{68}$$

$$abc: 2^{23} \cdot 4^{34}$$

~~abc~~

$$2^2$$

$$2^5$$

$$2^8$$

$$2^{11}$$

$$2^5$$

$$2^{12}$$

$$abc \geq 2^{24} \cdot 4^{39}$$

$$2 \leq \beta = 11$$

$$\beta + \gamma = 18$$

$$2 + \gamma = 39$$

$$2^{11}$$

$$2 + \beta + \gamma \in [23, 24]$$

$$\beta \leq 4 \quad 28$$

$$2 \geq 11$$

$$2 + \gamma \geq 32 - 2\beta$$

$$2 + 2\beta + \gamma \geq 32$$

$$2 + 2\beta + \gamma \geq 32$$

$$5 + \gamma \geq 14$$

$$3 + 8 \geq 1$$

$$2 \geq 14$$

$$11 \geq 1$$

$$2(2 + \beta + \gamma) = 49$$

$$17 \geq 13$$

$$17 \geq 14$$

$$-11 \leq -1$$

$$ac: 4^{39}$$

$$4^{45}$$

$$\begin{cases} 2 + \beta = 33 \\ \beta + \gamma = 18 \\ 2 + \gamma = 40 \end{cases}$$

$$\beta + \gamma = 18$$

$$2 + \gamma = 40$$

$$\gamma - \beta = 8$$

$$\gamma = 8 + \beta$$

$$2 + \beta = 10$$

$$\beta = 5$$

$$2 = 24$$

$$\gamma = 13$$

$$(24) \begin{matrix} 30 \\ 29 \end{matrix}$$

$$2 + \beta + \gamma = 21$$

$$\beta + \gamma \geq 23$$

$$\beta = 0$$

$$\beta = 5$$

$$\beta = 1$$

$$\beta = 2$$

$$\beta = 3$$

$$\beta = 4$$

$$2 + \beta + \gamma \geq 29 - \beta$$

$$2 + \beta + \gamma \geq 54 - \beta$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$(abc)^2: 2^{45} \cdot 7^{68}$$

$$abc = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2^{\alpha} \cdot 7$$

$$b = 2^{\beta}$$

$$c = 2^{\gamma}$$

$$\alpha + \beta = 15$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$2\alpha + \beta + \gamma = 45$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 23$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \alpha = 23$$

$$a^2bc: 4^{50}$$

$$b^2ac: 4^{29}$$

$$c^2ab: 4^{57}$$

$$\gamma - \beta = 7$$

$$\gamma = 7 + \beta$$

$$2\beta = 10$$

$$\beta = 5$$

$$\gamma = 12$$

$$\alpha = 11$$

$$2\alpha + \beta + \gamma$$

$$2\alpha$$

$$\alpha + \beta = 11$$

$$\beta + \gamma = 18$$

$$\gamma + \alpha = 39$$

$$\gamma - \beta = 28$$

$$\gamma = 28 + \beta$$

$$2\beta = -10$$

$$\beta = -5$$

$$\alpha = 16$$

$$\gamma = 27$$

$$\gamma - \beta = 28$$

$$\gamma + \beta = 18$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 2 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$c \quad \alpha$$

$$\alpha \geq \gamma + \beta$$

$$\beta \geq 21 + \alpha$$

$$\gamma \geq 28 + \beta$$

$$\gamma$$

$$\gamma + \beta \geq 32 - 21 = 11$$

$$\gamma + \beta \geq 32 - 21 = 11$$

$$\gamma + \beta \geq 32 - 21 = 11$$

$$\gamma + \beta \geq 32 - 21 = 11$$

$$\gamma + \beta \geq 32 - 21 = 11$$

$$\gamma + \beta \geq 32 - 21 = 11$$

$$\gamma + \beta \geq 32 - 21 = 11$$

$$\gamma + \beta \geq 32 - 21 = 11$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = ax + 8b$$

$$x^2 + a^2 x^2 - 16axb + b^2 = 0$$

$$x^2(1+a^2) + x(-16ab) + b^2 = 0$$

$$D = 256a^2b^2 - 4(1+a^2)(b^2-1) =$$

$$= 256a^2b^2 + 4(1+a^2)(1-b^2) =$$

$$= 256a^2b^2 + 4(a^2 - a^2b^2 + 1 - b^2) =$$

$$= 252a^2b^2 + 4a^2 - 4b^2 + 4 = 0$$

$$16 \cdot 16$$

$$16 \cdot 4$$

$$64$$

$$a^2(63b^2 + 1) - b^2 + 1 = 0$$

$$64a^2b^2 + a^2 - a^2b^2 - b^2 + 1 = 0$$

$$63a^2b^2 + a^2 - b^2 + 1 = 0$$

$$b^2$$

$$4; 12$$

$$0; 1$$

$$y = kx + b$$

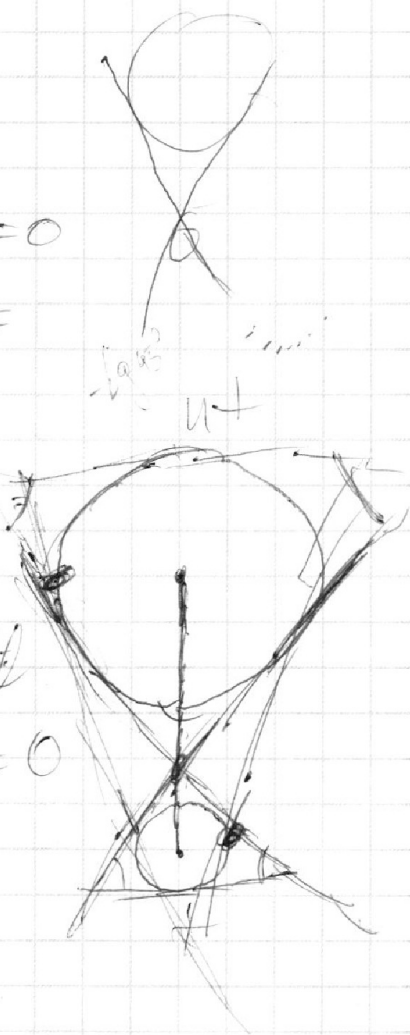
$$\begin{cases} 12 = 4k + b \\ 0 = k + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3k = 12 \\ 3b = 32 \end{cases}$$

$$k = 4 \quad b = -4$$

$$16 \cdot 4$$

$$y = 4x^2 - 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = kx + b$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2kxb + b^2 - 1 = 0$$

$$x^2(1+k^2) + x(2kb) + b^2 - 1 = 0$$

$$D = 4k^2 b^2 - 4(1+k^2)(b^2-1) = 0$$

$$k^2 b^2 - (b^2 - 1 + k^2 b^2 - k^2) = 0$$

$$k^2 - b^2 = 0$$

$$k^2 = b^2$$

$$y = kx + b ; x = \frac{y-b}{k}$$

$$x^2 + (y-kx)^2 = 1$$

$$\frac{y^2 - 2yb + b^2}{k^2} + y^2 - 2yk + 128 = 0$$

$$y^2 - 2yb + b^2 + y^2 k^2 - 2yk + 128k^2 = 0$$

$$y^2(1+k^2) + y(-2b-2k) + b^2 + 128k^2 = 0$$

$$D = 4(b+k)^2 - 4(1+k^2)(b^2+128k^2) = 0$$

$$(b+k)^2 - (1+k^2)(b^2+128k^2) = 0 \quad b \neq 0$$

$$b^2(1+12k) - b^2(1+k^2) \cdot 128 = 0$$



$$\begin{array}{r} 169 \overline{) 13} \\ -13 \\ \hline 39 \end{array}$$

109

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$ *Средняя*

$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$

$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$

$\sqrt[3]{2 \cdot 7}$
a

$\sqrt[3]{2 \cdot 7}$
b

$\sqrt[3]{2 \cdot 7}$
c

$x + y + z = 24$

$x + y = 15$

$y + z = 17$

$x + z = 23$

$x + y = 15$

$y + z = 17$

$x + z = 23$

$(a, b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$

$D = 49b^2 - 4b^2 = 45b^2$ $(a+b)(a+b)$

$a_1 = 7b - 3\sqrt{5}b$ $(a+b)^2 - 5ab$

$a_2 = 7b + 3\sqrt{5}b$

Рационализируем!

$9ab: m$ **9**

$\frac{a+b}{9ab} = \frac{1+\frac{b}{a}}{9b}$

$a+b: 9$ $\frac{3}{4}$

$a=4$ $b=5$

$\frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99} = \frac{1}{-11}$

$(abc)^2: 2^{55} \cdot 7^{68}$
 $abc \geq 2^{23} \cdot 7^{34}$ *не хор. 2²⁴ не хор. 7³⁴ не хор. 2²⁴ не хор. 7³⁴ не хор. 2²⁴ не хор. 7³⁴ не хор.*

$abc \geq 2^{24} \cdot 7^{39}$

$\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

a $2^{13} \cdot 7$
b $2 \cdot 7$
c $2^{10} \cdot 7$

$a+b: m$

$a+b: m$

$9ab: m$

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$
:m

$\frac{a(a+b+b)}{a(a-7b+\frac{b^2}{a})}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 7} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\text{QED 3: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 7 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + 9x = 1 + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$D < 0$

$$36 - 8 \cdot 3 = 12$$

$$9 \quad x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$x \in (-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$x_B = 6$$

$$3x^2$$

$$\frac{3 - 6}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{1.5}$$

$$-1.5x$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq \sqrt{3x^2 - 6x + 7}$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 3x^2 - 6x + 7 \quad 3x^2 - 6x + 7 - 3x^2 - 3x - 1 =$$

$$9x \geq 6$$

$$= (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 7} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$x \geq \frac{2}{3}$$

$$1. \text{ ч. } \leq 0 \quad \text{а пр. ч. } \leq 0$$

$$-9x - 1$$

$$\frac{1}{9} - \text{корень}$$

$$3x^2 - 6x + 7 + 81x^2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$+ 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 7}$$

$$+ 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 - 9x + 1 \quad \underline{6}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{2} + 2$$

$$18 \cdot \frac{1}{9} = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 + 3x + 1 + 3x^2 - 6x + 1 + 2\sqrt{\dots} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 1 + 2\sqrt{\dots} = 0$$

$$2\sqrt{\dots} = 3x - 6x^2 - 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{2} + 2 = ax + y - 8b = 0$$

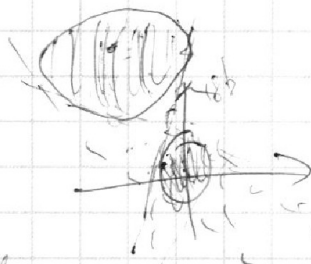
$$x < 0 \Rightarrow$$

$$x > 0$$

$$y = \underbrace{-ax + 8b}_{\dots}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y - 12)^2 = 16$$



$$(y_2 - y_1) = 14 - 2(x_2 - x_1)$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y - 12)^2 = 16$$

$$y = kx + b$$

$$x = \frac{y - b}{k}$$

$$x^2 + (kx + b - 12)^2 = 16$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2kxb + b^2 = 1$$

$$\frac{y^2 - 2yb + b^2}{k^2} + y^2 - 24y + 144 = 16$$

$$\Delta = 0$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$(-13; 26)$$

$$(3; 26)$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$4^2 + 2(14 - 4)^2$$

$$(0; 0)$$

$$(16; 0)$$

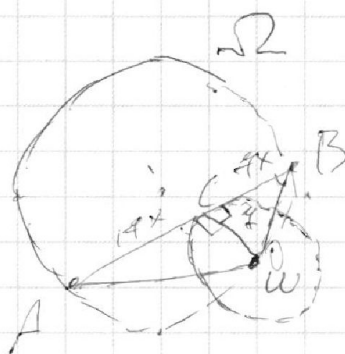
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

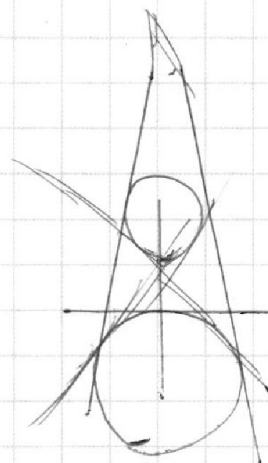
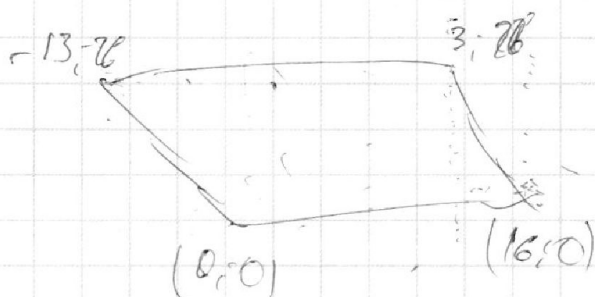
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$R = R =$$

$$R = 13 \quad W = 4$$

$$AB = \sqrt{t^2 + (14-2t)^2} = \sqrt{t^2 + 4(7-t)^2} = \sqrt{t^2 + 4(49 - 14t + t^2)} = \sqrt{t^2 + 196 - 56t + 4t^2} = \sqrt{5t^2 - 56t + 196}$$



$$V_2 - V_1 = 1$$

$$V_2 - V_1 = 1$$

$$V_2 - V_1 = a$$

$$g_2 - g_1 = b$$

$$a \in [-29; 29]$$

$$b \in [-26; 26]$$

$$2a + b = 14$$

$$a = \frac{14-b}{2} \Rightarrow b = 2c + 7$$

$$b = 2k$$

$$c + k = 4$$

$$a = 4 + k$$

$$a \in [-29; 29] \quad k \in [-13; 13]$$

24 решения