



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} db : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}, \text{ где } a, b, c \in \mathbb{N}. \text{ Тогда } \begin{cases} m = \frac{ab}{2^{14} \cdot 7^{10}} \\ h = \frac{bc}{2^{17} \cdot 7^{17}} \\ k = \frac{ac}{2^{20} \cdot 7^{37}} \end{cases}$$

$$m, h, k \in \mathbb{N}. \text{ Тогда } a^2/b^2c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mnk, \text{ т.к. } \begin{cases} a, b, c \in \mathbb{N} \\ m, h, k \in \mathbb{N} \end{cases}, \text{ то}$$

$$abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2mnk}, \text{ т.к. } ac : 2^{20} \cdot 7^{37}, \text{ то } abc : 2^{20} \cdot 7^{37},$$

$$\text{а значит } \sqrt{2mnk} : 7^5, \text{ т.к. } abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2mnk}.$$

$$abc - \text{min, если } \sqrt{2mnk} - \text{min, тогда } \begin{cases} mnk : 2 \text{ (I)} \\ \sqrt{2mnk} : 7^5 \text{ (II)} \end{cases}$$

$$\text{(I) должно выполняться, т.к. } abc \in \mathbb{N}, \text{ а значит и } \sqrt{2mnk} \in \mathbb{N},$$

$$\text{тогда } abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2 \cdot (2 \cdot 7^{10})^1} = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Меньше не может быть, т.к. иначе  $\sqrt{2mnk} \notin \mathbb{N}$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2} \frac{a}{b}$  - несокр.  $\frac{(a+b)}{a^2-6ab+b^2}$  ~~не~~

$m$  - наиб., если  $\frac{(a+b)}{a^2-6ab+b^2} = 1$ , т.е.  $m = (a+b) = a^2-6ab+b^2$

$a+b = a^2-6ab+b^2 \Leftrightarrow a^2-a(6b+1)+b^2-b=0$

$D = (6b+1)^2 - 4(b^2-b) = 32b^2+16b+1$

$a = \frac{6b+1 \pm \sqrt{32b^2+16b+1}}{2}$ , т.к.  $a, b \in \mathbb{N}$ , то  $32b^2+16b+1$

$\begin{cases} (a+b) = mk \\ a^2-6ab+b^2 = mn \end{cases}$ , где  $\frac{k}{n}$  - несокр. дроби, т.е.  $\text{НОД}(k, n) = 1$  и  $\text{НОД}(a, b) = 1$ .  
 $a = mk - b$ ,  $m, n, k \in \mathbb{N}$ .

$m^2k^2+b^2-2mkb - 6mkb + 6b^2+b^2 = mn$

$m^2k^2-8mkb+8b^2-mn=0 \Leftrightarrow k^2 \cdot m^2 - m(8kb+n) + 8b^2 = 0$

$D = (8bk+n)^2 - 4k^2 \cdot 8b^2 = 64b^2k^2+n^2+16bkn - 32b^2k^2 = 16(2b^2k^2+bkn)+n^2$

$f'(m) = 2mk - 8kb + n$   ~~$f'(m) = 0$~~   $f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8bk-n}{2k} = 4b - \frac{n}{2k}$

$(a+b) = mk = \frac{8bk-n}{2}$

$m$  наиб., если  $a^2-6ab+b^2 : (a+b)$ , т.е.  $(a+b)^2 - 8ab : (a+b) \Rightarrow 8ab : a+b$ , т.е.

$8ab = ka + kb \Leftrightarrow b = \frac{a \cdot k}{8a+k}$ , где  $a, k \in \mathbb{N}$ , т.е.

$\begin{cases} a = 9 \\ b = 1 \end{cases}$ , тогда  $m = (a+b) = 10$

Ответ:  $m = 10$



|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4.  $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$ .

Рассм. каждую часть: При  $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3=0 \\ 2x^2+2x+1=0 \end{cases}$  - нет решений, т.к.  $2x^2+2x+1=0$   
 $\Delta = -4 < 0$ .

При  $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \neq 0$ :  
 $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = \frac{(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1})(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}}$   
 $= \frac{2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = \frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}}$ .

Имеем:  $\frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2-7x) \frac{1 - \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1}}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 0 \quad \left[ \begin{array}{l} 2-7x=0 \text{ (I)} \\ \sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1} \text{ (II)} \end{array} \right]$

(II):  $\sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3 = 1 + 2x^2+2x+1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1} \\ 2x^2-5x+3 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x-1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1} \\ 2x^2-5x+3 \geq 0 \end{cases}$  т.к.  $2x^2+2x+1 \geq 0$   $\left( \begin{array}{l} f(x) = 2x^2+2x+1 \\ f'(x) = 4x+2, f'(x)=0 \end{array} \right)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}) = 2 \cdot (-\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 = \frac{1}{2}$ , т.е.  $2x^2+2x+1 \geq 0$ , то

$\Leftrightarrow \begin{cases} 49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 7x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 41x^2 - 22x - 3 = 0 \\ x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \\ x \geq \frac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 41x^2 - 22x - 3 = 0 \text{ (III)} \\ \frac{1}{7} \leq x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \end{cases}$$

$$\text{(IV): } 41x^2 - 22x - 3 = 0.$$

$$D = (-22)^2 - 4(-3) \cdot 41 = 484 + 492 = 976$$

$$\begin{cases} x = \frac{22 + \sqrt{976}}{2 \cdot 41} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{22 - \sqrt{976}}{2 \cdot 41} = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}, \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}, \text{ т.к. } \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < 0.$$
$$\begin{cases} \frac{1}{7} \leq x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \end{cases}$$

$$\text{Имеем: } \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7} \text{ или } x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

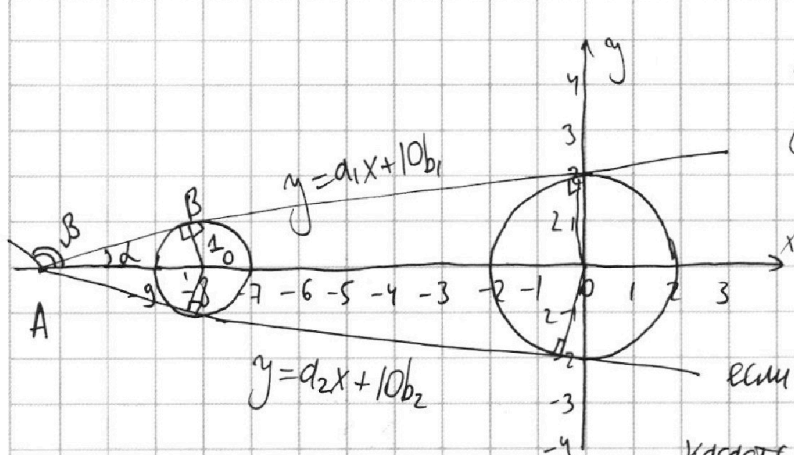
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



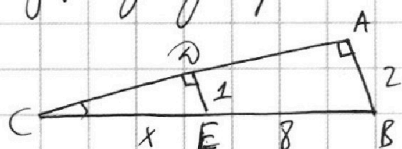
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (I) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (II) \end{cases}$$

$$(I): y = ax + 10b.$$

Два решения дадут, если прямая  $y = ax + 10b$  касается обеих окружностей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ если}$$

она пересекает одну из них, то решений бесконечно много, если касается только одной, то 1 решение, если не касается ни одной, то 0 решений, т.е. существуют два решения (две касательные).



$\triangle DCE \sim \triangle ACB$  по 2 углам, т.е.

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB}. \quad \frac{1}{2} = \frac{x}{x+8} \Rightarrow x=8.$$

Тогда  $A(-16; 0)$   ~~$AB = -16x + 8$~~   $B = 8k$ .

$$O = -(6a_1 + 10b_1) \Rightarrow 10b_1 = 16a_1. \text{ Тогда } y = a_1x + 16a_1.$$

Или:  $\begin{cases} y = a_1x + 16a_1 & (\text{точка на окружности}) \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha, \text{ где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{OB}{AB}, \text{ т.е. } a_1 = \frac{1}{\sqrt{63}}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{OB}{\sqrt{AO^2 - OB^2}} \text{ (по т. Пифагора } AB = \sqrt{AO^2 - OB^2}, \text{ т.к. } OB - \text{ радиус к кас.)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{64 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{63}}, \text{ т.е. } a_1 = \frac{1}{\sqrt{63}}.$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{63}}. \text{ Ответ: } a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$\frac{a}{b}$  - несократима

$$\text{НОД}(a,b) = 1.$$

$$\text{НОК}(a,b) = ab.$$

$$a \in \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N}.$$

$$m(a+b) = a^2 - 6ab + b^2 \quad m = ?$$

$$a^2 - 6ab - am + b^2 - bm = 0$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = \frac{2x^2-5x+3-2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} =$$

$$= \frac{-7x+2}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x, \text{ т.е. } 2 = 7x - \text{решение}$$

$$x = \frac{2}{7}.$$

если нет, то  $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$  - нет решения!

$$\begin{array}{r} 484 \\ + 492 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x^2-5x+3=0 & D=25-24=1. \\ 2x^2+2x+1=0 & D=4-8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 492 \\ + 36 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \ 41 \\ \times 164 \\ \hline 164 \\ 82 \\ 492 \\ \hline \end{array}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1} \quad 2x^2-5x+3 = 1 + 2x^2+2x+1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$-7x+1 = -2\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$49x^2 + 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 + 6x - 3 = 0 \quad D = 36 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 36 + 492 = 528$$

$$x = \frac{-6 \pm 4\sqrt{33}}{2 \cdot 41} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{33}}{41} \quad -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$f = 4x+2 \quad f' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \quad f(-\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

$$41x^2 - 22x - 3$$

$$\begin{array}{r} x \ 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ 484 \end{array}$$

$$2x^2-5x+3 \geq 0.$$

$$D = 25 - 24 = 1.$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1,5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x \ 41 \\ \times 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ 492 \end{array}$$

$$\Rightarrow 196x^4 + 9x^2 - 25 = 0 \quad \Delta = 16 + 19600 = 19616$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

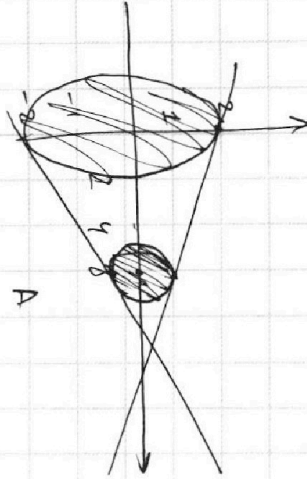


черновик

$$0 = -16k + b. \quad b = -16k$$

$$ax - y + 10b = 0$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = (x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$



$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 < 0 \\ x^2 + y^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 16x + 63 > 0$$

$$x^2 + y^2 < 4$$

$$x > -\frac{63}{16}$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = k$$

$$(2k+1)(y_2 - y_1) = 12$$

$$\frac{2(kx - x_1) + y_2 y_1}{(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1)} = 12$$

$$x^2 + y^2 + 16x + 63 \neq 0$$

$$A(-16; 0)$$

$$k = \frac{1}{2} = \frac{x}{x+8}$$

$$x = 8$$

$$0 = -16k + b$$

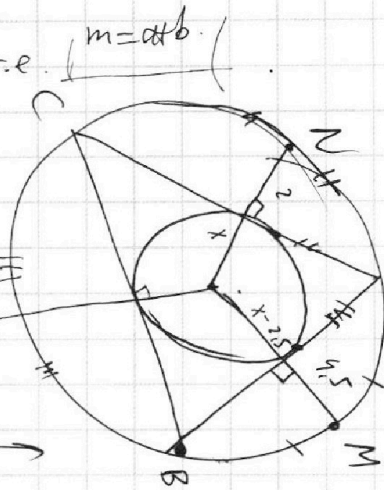
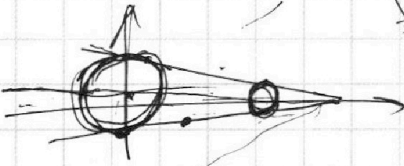
$$k = -\frac{1}{2} + \frac{6}{y_2 - y_1}$$

Решение

$$a^2 - 6ab + b^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2, \text{ т.е. } m = ab$$

$$y = kx - 16k$$

$$y^2 + x^2 = 2$$



$$b = 1: \quad a = \frac{7+7}{2} = 7$$

$$m \text{ найдено, если } ab = (ab)^2 - 8ab$$

$$(ab)^2 - 8ab \geq -4ab$$

$$ab \geq 0$$

$$a = \frac{6b+1 + \sqrt{32b^2 + 16b+1}}{2}$$

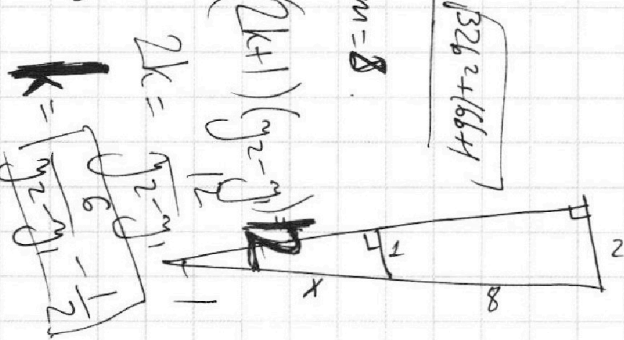
$$m = 8$$

$$\sqrt{16^2 - 2^2} = \sqrt{256 - 4} = \sqrt{252} = 14.18$$

$$\frac{7+1}{8^2 - 8 \cdot 7} = \frac{8}{64 - 56} = \frac{8}{8} = 1$$

$$y = 9.1x + \frac{16}{11}$$

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$



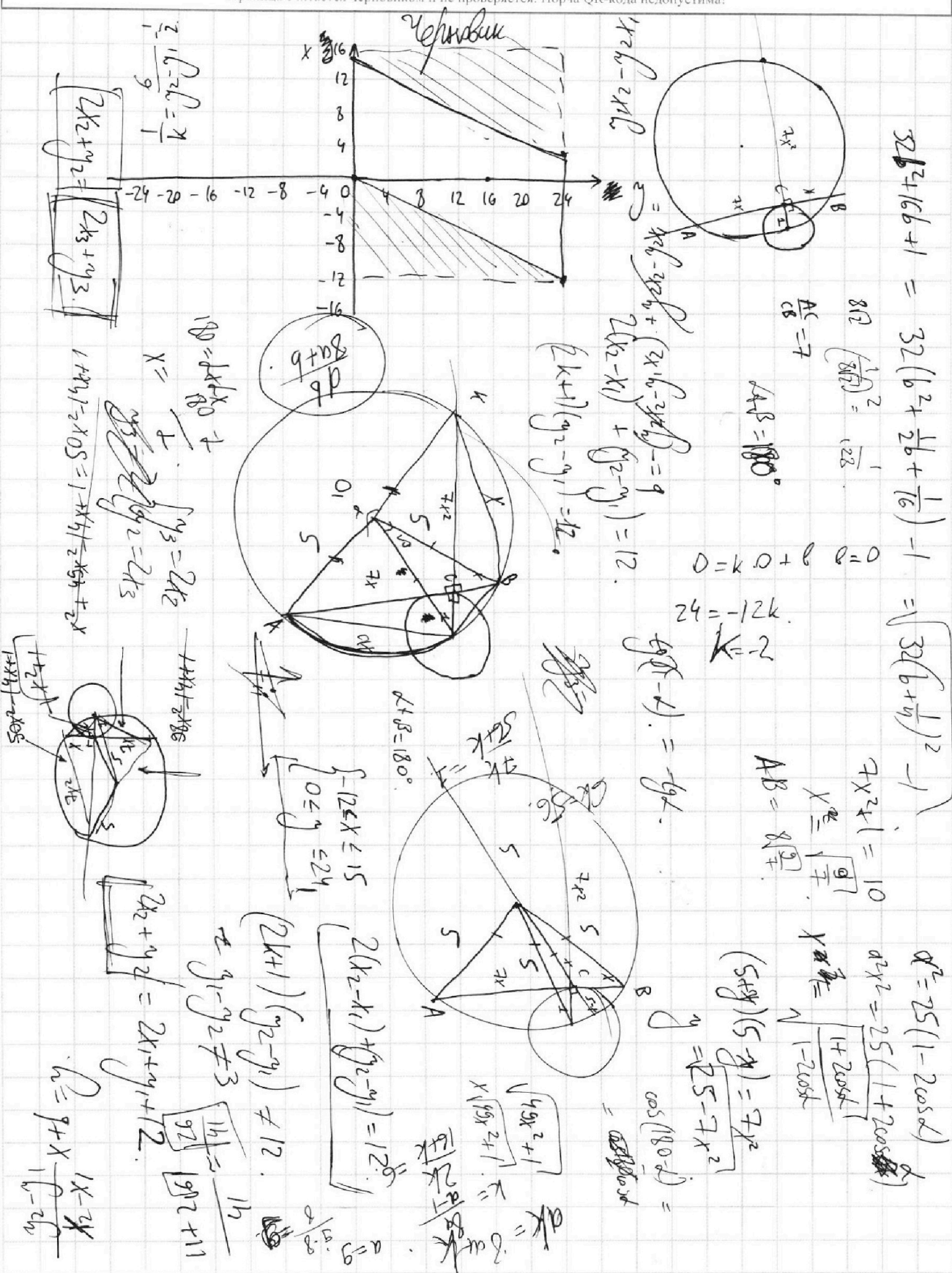
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Черновик*

$$db = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k$$

$$a^2 b^2 c^2 = mnk \cdot 2^{51} \cdot 7^{66}$$

32

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot n$$

$$abc = 7^{30} \cdot 2^{25} \cdot \sqrt{2mnk}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot m$$

$$\text{т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ то } \sqrt{2mnk} \in \mathbb{N},$$

*а также*  $m, n, k \in \mathbb{N}$  и  $\sqrt{2mnk}$  - минимальн.

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2}$$

$$\sqrt{2mnk} \geq \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}} = \frac{4mnk}{mk + 2mn + 2nk + 2mk}$$

$$\min(abc), \text{ если } \sqrt{2mnk} = \sqrt{4}, \text{ т.е. } \begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ k=2 \end{cases}, \text{ тогда } abc = 7^{30} \cdot 2^{26} \cdot \frac{32}{128}$$

$$a^2 - 6ab + b^2. \Delta = 36b^2 - 4b^2 = 32b^2$$

$$a = \frac{6b \pm 4\sqrt{2}b}{2} = \frac{3b \pm \sqrt{2}b}{1} \quad (a - 3b - \sqrt{2}b)(a - 3b + \sqrt{2}b)$$

$$(a+b)^2 - 8ab$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$m - \text{найд, если } \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 6ab - a + b^2 - b = 0. \Delta = 36b^2 + 12b + 1 - 4b^2 + 4b = 32b^2 + 16b + 1$$

$$a = \frac{6b + 1 \pm \sqrt{32b^2 + 16b + 1}}{2}$$

$$32b^2 + 16b + 1 - \text{полный квадрат.}$$

$$b = 0. \quad b = 1. \quad b =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

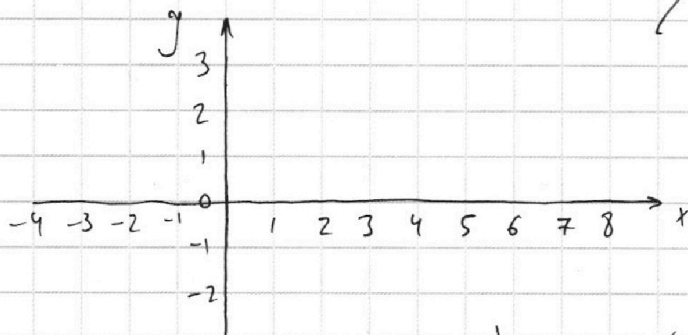
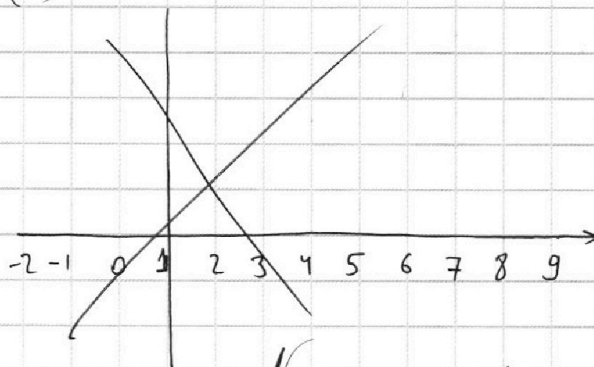


№6.  $\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \quad (I) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (II) \end{cases}$

черновик

(I):  $y = ax + 10b$

(II):  $(x+8)^2 + y^2 - 1$   
 $x^2 + y^2 - 4$



$$\frac{2(y_2 - y_1)}{12 - (y_2 - y_1)} = \frac{-2(12 - (y_2 - y_1)) + 24}{12 - (y_2 - y_1)} = -2 + \frac{24}{12 - (y_2 - y_1)}$$

$$\sim \frac{26}{41} \quad 2 \cdot \left(\frac{26}{41}\right)^2 - 5 \cdot \frac{26}{41} + 3 = \frac{8}{9} - \frac{20}{9} + 3 = \frac{15}{9}$$

$$\frac{8}{9} + \frac{12}{9} + 1 = \frac{39}{9}$$

$$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{39}}{2} = \frac{15}{3}$$

$$\sqrt{15} + \sqrt{39} \approx 10$$

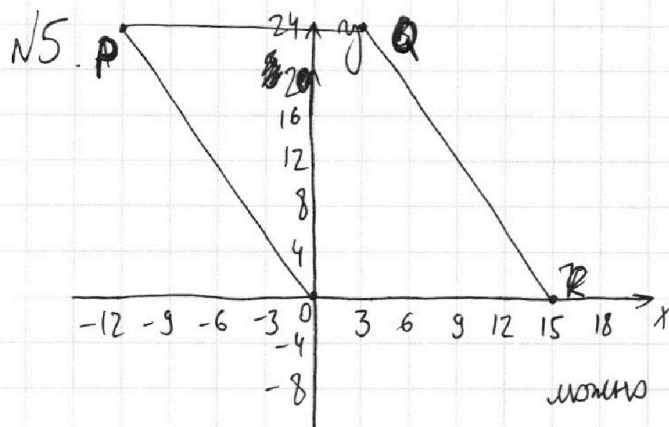
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} -12 \leq x \leq 15 \\ 0 \leq y \leq 24 \end{cases}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Т.к. через любые две точки  
можно провести прямую и при этом

только одну, то:  $y = kx + b$ , где

$$\begin{cases} k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \end{cases}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}, \text{ где}$$

$$\begin{cases} k_{QR} = 2 = k_{PO} \\ k_{RO} = 0 = k_{OR} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{k} + 1\right)(y_2 - y_1) = 12 \\ (2 + k)(x_2 - x_1) = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{12}{x_2 - x_1} - 2$$

$$\begin{cases} k = \frac{1}{y_2 - y_1} - \frac{1}{2} \\ k = \frac{12}{x_2 - x_1} - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2y_2 - 2y_1}{12 - (y_2 - y_1)} \\ k = \frac{12}{x_2 - x_1} - 2 \end{cases}$$

Пусть  $\begin{cases} \Delta y = y_2 - y_1 \\ \Delta x = x_2 - x_1 \end{cases}$ . Тогда:

$$\Delta x = 1: k = 10 \quad \Delta y = 10$$

$$\Delta x = 2: k = 4 \quad \Delta y = 8$$

$$\Delta x = 3: k = 2 \quad \Delta y = 6$$

$$\Delta x = 4: k = 1 \quad \Delta y = 4$$

$$\Delta x = 5: k = 0,4 \quad \Delta y = 2$$

$$\Delta x = 6: k = 0 \quad \Delta y = 0 \quad \swarrow \text{но } \Delta y$$

$$\Delta x = 7: k = -\frac{2}{7} \quad \Delta y = -2$$

$$\Delta x = 8: k = -\frac{1}{2} \quad \Delta y = -4$$

$$\Delta x = 9: k =$$

$$\Delta x = 10: k =$$

$$\Delta x = 11: k =$$

$$\Delta x = 12: k =$$

$$\Delta x = 13: k =$$

Аналогичным образом найдем  $k$ , учитывая, тогда  
каждый из нас:  $24 \cdot 2 = 48$  (каждая прямая дает две  
точки)

Ответ: ~~54~~ **48** пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

