



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} db : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}, \text{ где } a, b, c \in \mathbb{N}. \text{ Тогда } \begin{cases} m = \frac{ab}{2^{14} \cdot 7^{10}} \\ h = \frac{bc}{2^{17} \cdot 7^{17}} \\ k = \frac{ac}{2^{20} \cdot 7^{37}} \end{cases}$$

$$m, h, k \in \mathbb{N}. \text{ Тогда } a^2/b^2c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mnk, \text{ т.к. } \begin{cases} a, b, c \in \mathbb{N} \\ m, h, k \in \mathbb{N} \end{cases}, \text{ то}$$

$$abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2mnk}, \text{ т.к. } ac : 2^{20} \cdot 7^{37}, \text{ то } abc : 2^{20} \cdot 7^{37},$$

$$\text{а значит } \sqrt{2mnk} : 7^5, \text{ т.к. } abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2mnk}.$$

$$abc - \text{min, если } \sqrt{2mnk} - \text{min, тогда } \begin{cases} mnk : 2 \text{ (I)} \\ \sqrt{2mnk} : 7^5 \text{ (II)} \end{cases}$$

$$\text{(I) должно выполняться, т.к. } abc \in \mathbb{N}, \text{ а значит и } \sqrt{2mnk} \in \mathbb{N},$$

$$\text{тогда } abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2 \cdot (2 \cdot 7^{10})^1} = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Меньше не может быть, т.к. иначе $\sqrt{2mnk} \notin \mathbb{N}$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2} \frac{a}{b}$ - несокр. $\frac{(a+b)}{a^2-6ab+b^2}$ ~~не~~

m - наиб., если $\frac{(a+b)}{a^2-6ab+b^2} = 1$, т.е. $m = (a+b) = a^2-6ab+b^2$

$a+b = a^2-6ab+b^2 \Leftrightarrow a^2-a(6b+1)+b^2-b=0$

$D = (6b+1)^2 - 4(b^2-b) = 32b^2+16b+1$

$a = \frac{6b+1 \pm \sqrt{32b^2+16b+1}}{2}$, т.к. $a, b \in \mathbb{N}$, то $32b^2+16b+1$

$\begin{cases} (a+b) = mk \\ a^2-6ab+b^2 = mn \end{cases}$, где $\frac{k}{n}$ - несокр. дроби, т.е. $\text{НОД}(k, n) = 1$ и $\text{НОД}(a, b) = 1$.
 $a = mk - b$, $m, n, k \in \mathbb{N}$.

$m^2k^2+b^2-2mkb - 6mkb + 6b^2+b^2 = mn$

$m^2k^2-8mkb+8b^2-mn=0 \Leftrightarrow k^2 \cdot m^2 - m(8kb+n) + 8b^2 = 0$

$D = (8bk+n)^2 - 4k^2 \cdot 8b^2 = 64b^2k^2+n^2+16bkn - 32b^2k^2 = 16(2b^2k^2+bkn)+n^2$

$f'(m) = 2mk - 8kb + n$ ~~и~~ $f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8bk-n}{2k} = 4b - \frac{n}{2k}$

$(a+b) = mk = \frac{8bk-n}{2}$

m наиб., если $a^2-6ab+b^2 : (a+b)$, т.е. $(a+b)^2 - 8ab : (a+b) \Rightarrow 8ab : a+b$, т.е.

$8ab = ka + kb \Leftrightarrow b = \frac{a \cdot k}{8a+k}$, где $a, k \in \mathbb{N}$, т.е.

$\begin{cases} a = 9 \\ b = 1 \end{cases}$, тогда $m = (a+b) = 10$

Ответ: $m = 10$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4. $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$.

Рассм. каждую часть: При $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3=0 \\ 2x^2+2x+1=0 \end{cases}$ - нет решений, т.к. $2x^2+2x+1=0$
 $\Delta = -4 < 0$.

При $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \neq 0$:
 $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = \frac{(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1})(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}}$
 $= \frac{2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = \frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}}$.

Имеем: $\frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2-7x) \frac{1 - \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1}}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 0 \quad \left[\begin{array}{l} 2-7x=0 \text{ (I)} \\ \sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1} \text{ (II)} \end{array} \right]$

(II): $\sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3 = 1 + 2x^2+2x+1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1} \\ 2x^2-5x+3 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x-1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1} \\ 2x^2-5x+3 \geq 0 \end{cases}$ т.к. $2x^2+2x+1 \geq 0$ $f(x) = 2x^2+2x+1$
 $f'(x) = 4x+2, f'(x)=0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}) = 2 \cdot (-\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 = \frac{1}{2}$, т.е. $2x^2+2x+1 \geq 0$, то

$\Leftrightarrow \begin{cases} 49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 7x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 41x^2 - 22x - 3 = 0 \\ x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \\ x \geq \frac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 41x^2 - 22x - 3 = 0 \text{ (III)} \\ \frac{1}{7} \leq x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \end{cases}$$

$$\text{(IV): } 41x^2 - 22x - 3 = 0.$$

$$D = (-22)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 41 = 484 + 492 = 976$$

$$\begin{cases} x = \frac{22 + \sqrt{976}}{2 \cdot 41} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{22 - \sqrt{976}}{2 \cdot 41} = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}, \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}, \text{ т.к. } \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < 0.$$
$$\begin{cases} \frac{1}{7} \leq x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \end{cases}$$

$$\text{Имеем: } \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7} \text{ или } x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

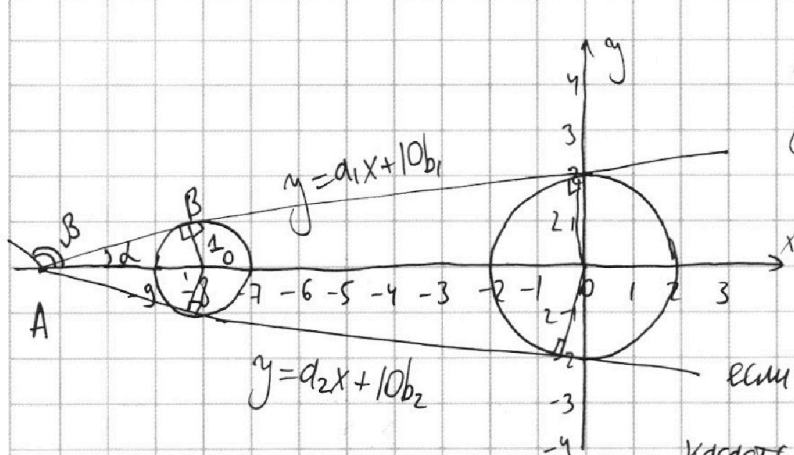
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



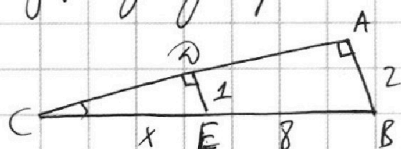
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (I) \\ ((x+8)^2 + y^2 = 1) \cap (x^2 + y^2 = 4) \leq 0 & (II) \end{cases}$$

$$(I): y = ax + 10b.$$

Два решения дадут, если прямая $y = ax + 10b$ касается обеих окружностей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ если}$$

она пересекает одну из них, то решений бесконечное кол-во, если касается только одной, то 1 решение, если не касается ни одной, то 0 решений, т.е. существуют два решения (две касательные)



$\triangle DCE \sim \triangle ACB$ по 2 углам, т.е.

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB}. \quad \frac{1}{2} = \frac{x}{x+8} \Rightarrow x=8.$$

Тогда $A(-16; 0)$ $DE = -16x + 8 \Rightarrow B = 16k$.

$$0 = -(6a_1 + 10b_1) \Rightarrow 10b_1 = 16a_1. \text{ Тогда } y = a_1x + 16a_1.$$

Или: $\begin{cases} y = a_1x + 16a_1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ (точка на окружности)

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha, \text{ где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{OB}{AB}, \text{ т.е. } a_1 = \frac{1}{\sqrt{63}}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{OB}{\sqrt{AO^2 - OB^2}} \text{ (по т. Пифагора } AB = \sqrt{AO^2 - OB^2}, \text{ т.к. } OB - \text{ радиус к кас.)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{64 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{63}}, \text{ т.е. } a_1 = \frac{1}{\sqrt{63}}.$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{63}}. \text{ Ответ: } a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$\frac{a}{b}$ - несократима

$$\text{НОД}(a,b) = 1.$$

$$\text{НОК}(a,b) = ab.$$

$$a \in \mathbb{N}$$

$$b \in \mathbb{N}.$$

$$m(a+b) = a^2 - 6ab + b^2 \quad m = ?$$

$$a^2 - 6ab - am + b^2 - bm = 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \frac{2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} =$$

$$= \frac{-7x + 2}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}}$$

$$= 2 - 7x, \text{ т.е.}$$

$$2 = 7x - \text{решение}$$

$$x = \frac{2}{7}.$$

$$\begin{array}{r} 528 \\ 264 \\ 132 \\ 66 \\ 33 \\ 3 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 11 \\ 13 \\ 1 \end{array}$$

если нет, то

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1. \quad \text{нет решения!}$$

$$\begin{array}{r} 484 \\ + 492 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 & D = 25 - 24 = 1. \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 & D = 4 - 8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 492 \\ + 36 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \ 41 \\ \hline 164 \\ x \ 164 \\ \hline 3 \\ 1812 \\ 3 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$-7x + 1 = -2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 + 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 + 6x - 3 = 0. \quad D = 36 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 36 + 492 = 528$$

$$x = \frac{-6 \pm 4\sqrt{33}}{2 \cdot 41} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{33}}{41}$$

$$-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$f = 4x + 2$$

$$f' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$f(-\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{2}.$$

$$41x^2 - 22x - 3$$

$$\begin{array}{r} x \ 22 \\ \hline 82 \\ 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0.$$

$$D = 25 - 24 = 1.$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1,5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x \ 41 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 492 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Черновик.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$2(x^2 - 2.5x + \frac{25}{16})$$

$$3 - \frac{25}{16} = 32 + \frac{25}{16} = \frac{29}{16}$$

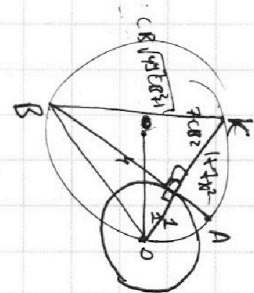
$$2(x^2 + x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{1}{8}} - \sqrt{2(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{2}} = 2 - 7x$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0. \end{cases} \quad a, b - ? \text{ Для } a \text{ нужна } b, \text{ то есть 2 решения}$$

$$196CB^4 + 4CB^2 - 25 = 0. \quad \sqrt{16 + 19600} = 196/6.$$

$$CB\sqrt{49CB^2 + 1} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4CB^2(49CB^2 + 1) = 25 \Leftrightarrow$$



$$\sqrt{49CB^4 + CB^2} = CB\sqrt{49CB^2 + 1}$$

$$\frac{AC}{CB} = 7. \quad AB = ?$$

$$AC \cdot CB = OC \cdot CK$$

$$7CB^2 = CK.$$

$$2 \left(\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \right)^2 = \frac{2(121 + 122 + 44\sqrt{61})}{1681} = \frac{486 + 44\sqrt{61}}{1681}$$

$$486 + 3 = 492 + \frac{486 + 44\sqrt{61}}{1681} - \frac{5 \cdot 41(11 + 2\sqrt{61})}{1681} + 3$$

$$2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{3} + 3 = \frac{8}{9} - \frac{10}{9} + \frac{49 \cdot 3}{9} = \frac{85}{9} - \frac{2 + \sqrt{2(1+x^2)}}{8}$$

$$2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 = \frac{8 + 28 + 49}{49} = \frac{85}{49}$$

$$1 - 2\sqrt{61} \approx 1 - 2 \cdot 7.5. \quad b = \frac{-16 + \sqrt{16 + 19600}}{64}$$

$$1 + 2\sqrt{61}$$

$$\frac{26}{41}$$

$$49x^4 + x^2 - 149x^2 - 14x^2 = 2^7(1+x^2)$$

$$7 < \sqrt{61} < 8$$

$$32b^2 + 16b + 1x^2 = 0.$$

$$256 - 4 \cdot 2 \cdot 16 \cdot (1+x^2) = 16(16 - 8 + 8x^2)$$

$$11 + 2\sqrt{61} \approx 11 + 2 \cdot 7.5 = 26. \quad = 16(8 + 8x^2) =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

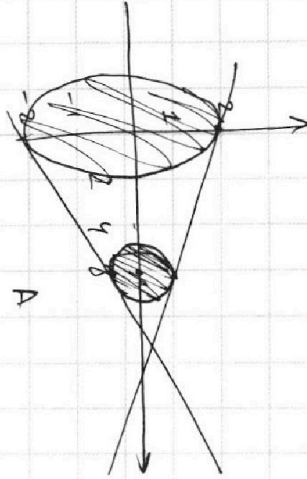


черновик

$$0 = -16k + b, \quad b = -16k$$

$$ax - y + 10b = 0$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = (x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$



$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 < 0 \\ x^2 + y^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 16x + 63 > 0$$

$$x^2 + y^2 < 4$$

$$x > -\frac{63}{16}$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = k$$

$$(2k+1)(y_2 - y_1) = 12$$

$$\frac{2(kx - x_1) + y_2 y_1}{(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1)} = 12$$

$$x^2 + y^2 + 16x + 63 \neq 0$$

$$A(-16; 0)$$

$$k = \frac{1}{2} = \frac{x}{x+8}$$

$$x = 8$$

$$0 = -16k + b$$

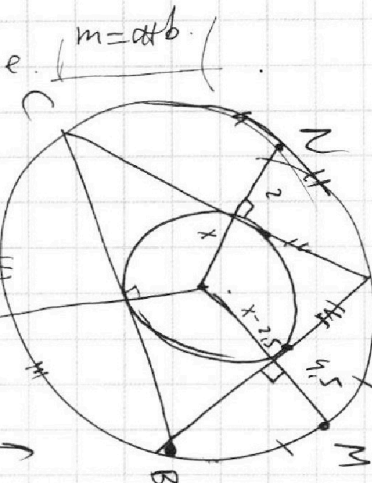
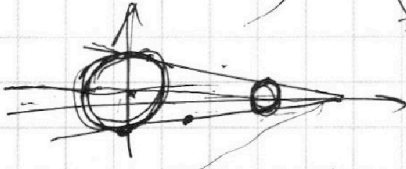
$$k = -\frac{1}{2} + \frac{6}{y_2 - y_1}$$

Решение

$$a^2 - 6ab + b^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2, \text{ т.е. } m = ab$$

$$y = kx - 16k$$

$$y^2 + x^2 = 2$$



$$b = 1: \quad a = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$m \text{ найдено, если } ab = (ab)^2 - 8ab$$

$$(ab)^2 - 8ab \geq -4ab$$

$$ab \geq 0$$

$$a = \frac{6b+1 + \sqrt{32b^2 + 16b+1}}{2}$$

$$m = 8$$

$$\sqrt{16^2 - 2^2} = \sqrt{252} = 15.87$$

$$y = 4.1x + 15.87$$

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

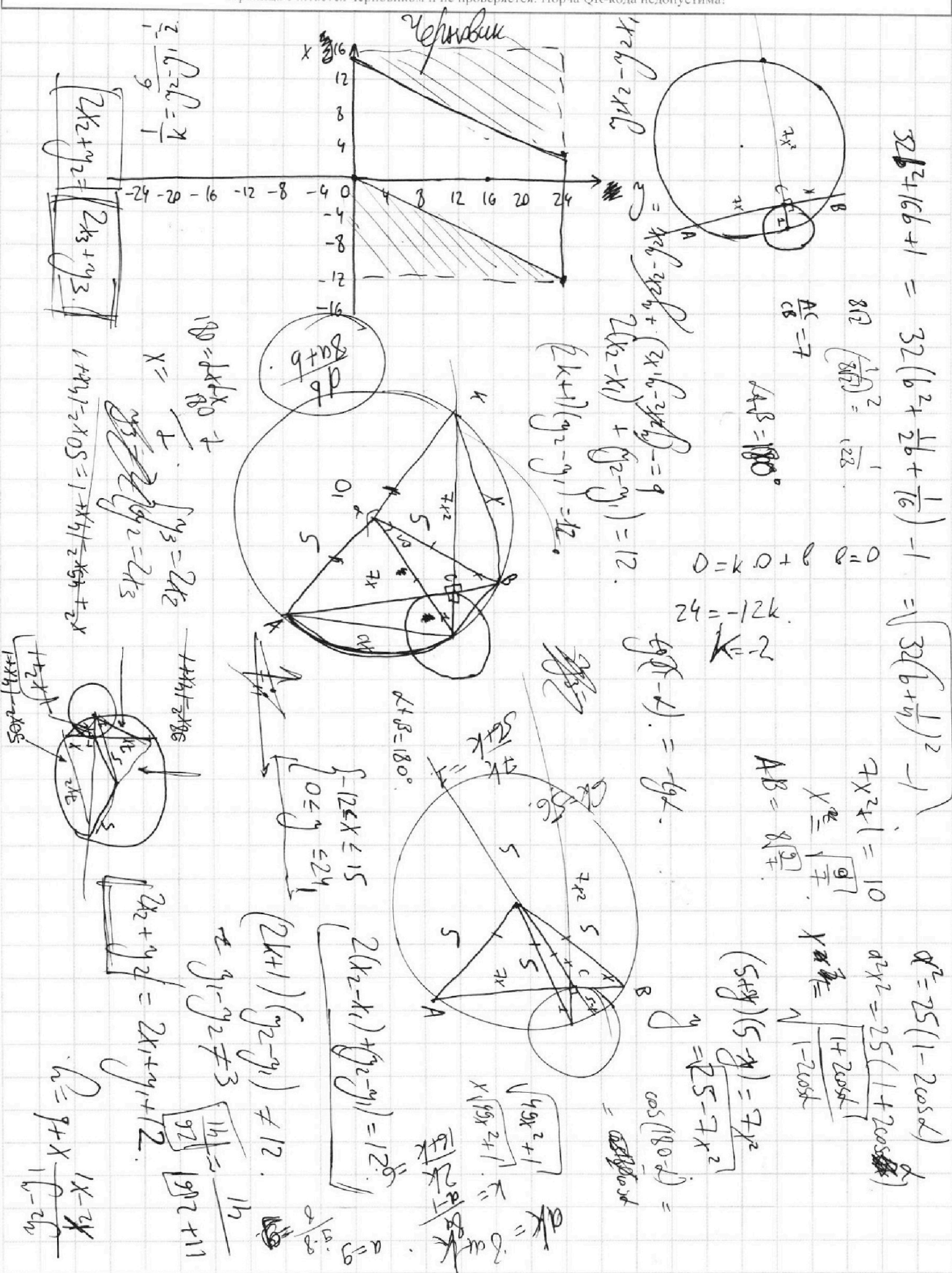


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$db = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k$$

$$a^2 b^2 c^2 = mnk \cdot 2^{51} \cdot 7^{66}$$

32

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot n$$

$$abc = 7^{30} \cdot 2^{25} \cdot \sqrt{2mnk}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot m$$

$$\text{т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ то } \sqrt{2mnk} \in \mathbb{N},$$

а также $m, n, k \in \mathbb{N}$ и $\sqrt{2mnk}$ - минимальн.

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2}$$

$$\sqrt{2mnk} \geq \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}} = \frac{4mnk}{mk + 2mn + 2nk + 2mk}$$

$$\min(abc), \text{ если } \sqrt{2mnk} = \sqrt{4}, \text{ т.е. } \begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ k=2 \end{cases}, \text{ тогда } abc = 7^{30} \cdot 2^{26} \cdot \frac{32}{128}$$

$$a^2 - 6ab + b^2. \Delta = 36b^2 - 4b^2 = 32b^2$$

$$a = \frac{6b \pm 4\sqrt{2}b}{2} = \frac{3b \pm \sqrt{2}b}{1} \quad (a - 3b - \sqrt{2}b)(a - 3b + \sqrt{2}b)$$

$$(a+b)^2 - 8ab. \quad \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} \text{ м-наиб, если } \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 6ab - a + b^2 - b = 0. \Delta = 36b^2 + 12b + 1 - 4b^2 + 4b = 32b^2 + 16b + 1$$

$$a = \frac{6b+1 \pm \sqrt{32b^2+16b+1}}{2} \quad 32b^2+16b+1 - \text{полный квадрат.}$$

$$b=0. \quad b=1. \quad b=$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

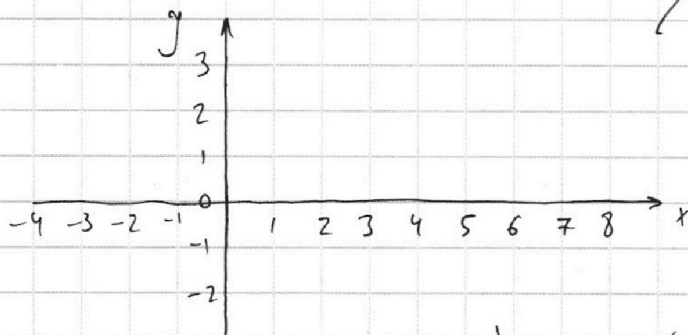
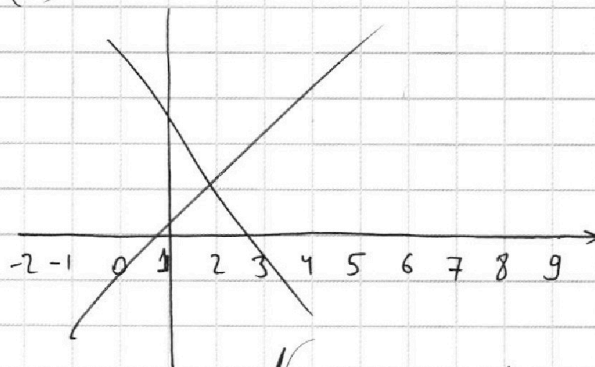


№6. $\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \quad (I) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (II) \end{cases}$

черновик

(I): $y = ax + 10b$

(II): $(x+8)^2 + y^2 - 1$
 $x^2 + y^2 - 4$



$$\frac{2(y_2 - y_1)}{12 - (y_2 - y_1)} = \frac{-2(12 - (y_2 - y_1)) + 24}{12 - (y_2 - y_1)} = -2 + \frac{24}{12 - (y_2 - y_1)}$$

$$\sim \frac{26}{41} \quad 2 \cdot \left(\frac{26}{41}\right)^2 - 5 \cdot \frac{26}{41} + 3 = \frac{8}{9} - \frac{20}{9} + 3 = \frac{15}{9}$$

$$\frac{8}{9} + \frac{12}{9} + 1 = \frac{39}{9}$$

$$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{39}}{2} = \frac{15}{3}$$

$$\sqrt{15} + \sqrt{39} \approx 10$$

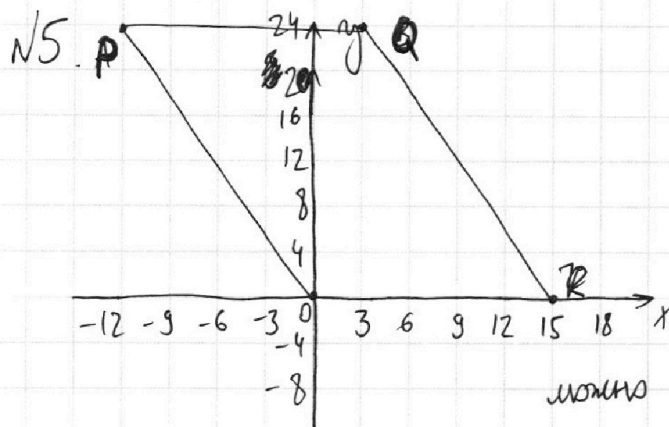
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} -12 \leq x \leq 15 \\ 0 \leq y \leq 24 \end{cases}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Т.к. через любые две точки
можно провести прямую и при этом

только одну, то: $y = kx + b$, где

$$\begin{cases} k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \end{cases}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}, \text{ где}$$

$$\begin{cases} k_{PQ} = 2 = k_{PO} \\ k_{PQ} = 0 = k_{OQ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{k} + 1\right)(y_2 - y_1) = 12 \\ (2 + k)(x_2 - x_1) = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{12}{x_2 - x_1} - 2$$

$$\begin{cases} k = \frac{1}{y_2 - y_1} - \frac{1}{2} \\ k = \frac{12}{x_2 - x_1} - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2y_2 - 2y_1}{12 - (y_2 - y_1)} \\ k = \frac{12}{x_2 - x_1} - 2 \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} \Delta y = y_2 - y_1 \\ \Delta x = x_2 - x_1 \end{cases}$. Тогда:

$$\Delta x = 1: k = 10 \quad \Delta y = 10$$

$$\Delta x = 2: k = 4 \quad \Delta y = 8$$

$$\Delta x = 3: k = 2 \quad \Delta y = 6$$

$$\Delta x = 4: k = 1 \quad \Delta y = 4$$

$$\Delta x = 5: k = 0,4 \quad \Delta y = 2$$

$$\Delta x = 6: k = 0 \quad \Delta y = 0 \quad \swarrow \text{но } \Delta y$$

$$\begin{aligned} \Delta x = 7 & \quad k = -\frac{2}{7} \quad \Delta y = -2 \\ \Delta x = 8 & \quad k = -\frac{1}{2} \quad \Delta y = -4 \\ \Delta x = 9 & \quad k = \\ \Delta x = 10 & \quad k = \\ \Delta x = 11 & \quad k = \\ \Delta x = 12 & \quad k = \\ \Delta x = 13 & \quad k = \end{aligned}$$

Аналогичным образом найдем k , прямая, тогда
каждой паре: $24 \cdot 2 = 48$ (каждая прямая дает две
точки)

Ответ: ~~54~~ пар. 48 пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

