МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a, b, c \in \mathbb{N}$, $ab \vdots 2^{14}7^{10}$, $bc \vdots 2^{17}7^{17}$, $ac \vdots 2^{20}7^{37}$, тогда:

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{51}7^{64}$, т.е. $(abc)^2 \vdots 2^{51}7^{64}$

abc ~~будет~~ $\in \mathbb{N}$, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, тогда abc будет минимальным натур. числом после $\sqrt{2^{51}\cdot 7^{64}} = 7^{32}\cdot 2^{25}\sqrt{2}$, ~~состоящим~~ являющееся произведением только из 2 и 7, и это будет $7^{32}\cdot 2^{26}$

Ответ: abc - минимальное значение это $7^{32}\cdot 2^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ОДЗ

$2x^2-5x+3\geq 0$

$2x^2+2x+1\geq 0$

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2-5x+3+(7x-2)}=2-7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2-5x+3-(2-7x)}=2-7x \Leftrightarrow$$

$t=2x^2-5x+3$

$m=2-7x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t}-\sqrt{t-m}=m \Leftrightarrow \sqrt{t}=m+\sqrt{t-m} \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} t=m^2+2m\sqrt{t-m}+t-m \Leftrightarrow m^2-m+2m\sqrt{t-m}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1=-2\sqrt{t-m} \\ m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1\leq 0 \\ m^2-2m+1=4t-4m \end{cases} \\ m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m\leq 1 \\ m^2+2m+1=4t \end{cases} \\ m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m\leq 1 \\ (m+1)^2=4t \end{cases} \\ m=0 \end{array}\right. \quad t=2x^2-5x+3 \Leftrightarrow m=2-7x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2-7x\leq 1 \\ (2-7x+1)^2=4(2x^2-5x+3) \end{cases} \\ 2-7x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq \frac{1}{7} \\ 9-42x+49x^2=8x^2-20x+12 \end{cases} \\ x=\frac{2}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq \frac{1}{7} \\ 41x^2-22x-3=0 \end{cases} \\ x=\frac{2}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq \frac{1}{7} \\ x=\frac{22\pm\sqrt{121\cdot 4+4\cdot 3\cdot 41}}{2\cdot 41} \end{cases} \\ x=\frac{2}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

См. прод. след. лист.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \frac{1}{7} \\ x = \frac{22 \pm 2\sqrt{121 + \cancel{164}\,123}}{2\cdot 41} \end{cases} \\ x = \frac{2}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \frac{1}{7} \\ x = \frac{11 \pm \sqrt{\cancel{285}\,244}}{41} \end{cases} \\ x = \frac{2}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \frac{1}{7} \\ x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} \end{cases} \\ x = \frac{2}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{array}\right. \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{array}\right.$$

$// \frac{11-2\sqrt{61}}{41} < \frac{1}{7} \Leftrightarrow 77 - 14\sqrt{61} < 41 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36 < 14\sqrt{61} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36^2 < 14^2 \cdot 61 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1296 < 11956$ — верно //

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \ge \frac{1}{7} \Leftrightarrow 77 + 4\sqrt{61} \ge 41 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underset{>0}{36} \ge \underset{\le 0}{-4\sqrt{61}}$ — верно //

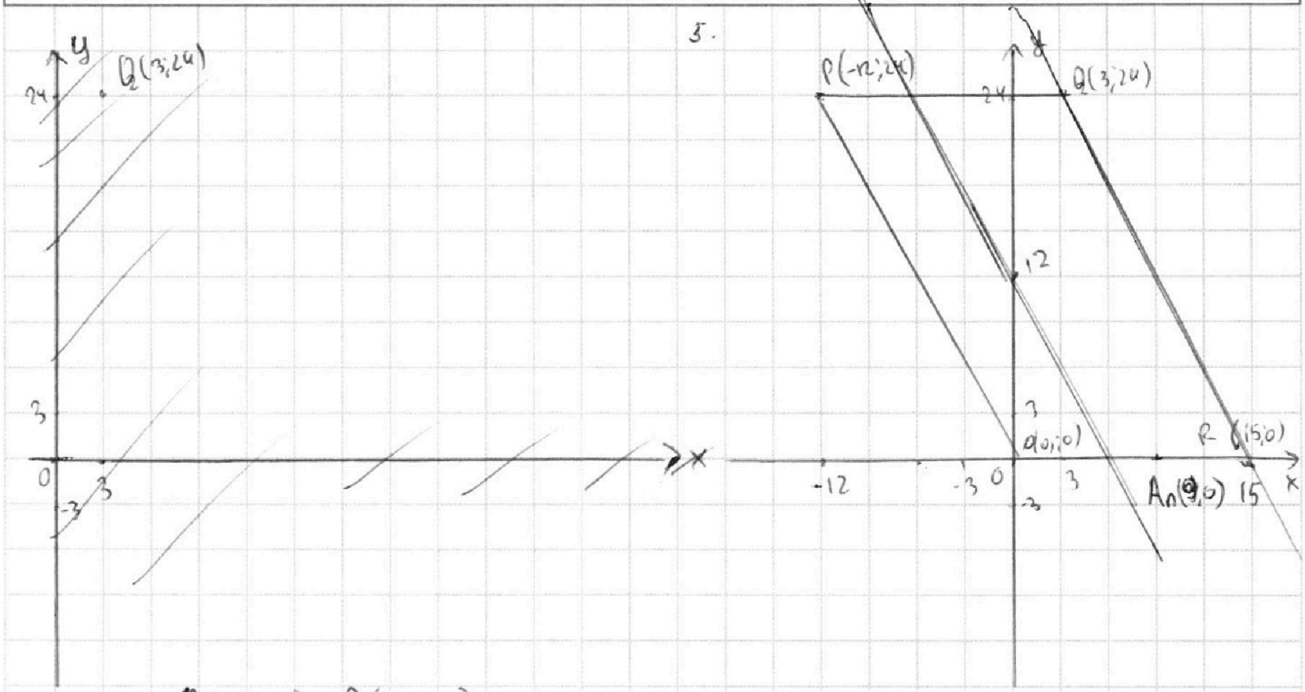
Ответ: $\left\{\frac{2}{7}; \frac{11+2\sqrt{61}}{41}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.



$A(x_1;y_1)$ $B(x_2;y_2)$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12 \Leftrightarrow 2x_2+y_2-(2x_1+y_1)=12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x_2+y_2=12+(2x_1+y_1)$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12 \Leftrightarrow y_2-y_1=12-2(x_2-x_1)$

построим прямую: $y=12-2x$

A и $B \in PQRO$

тогда нам подходят все точки точки, что $C(x_2-x_1; y_2-y_1)$ лежит на этой прямой

* тогда заметим, что для $A_1(0;0)$ подходят все B точки с целыми координатами на прям: $y=12-2x$, ~~для~~ для $A_2(1;0)$ все точки на прямой $14-2x=y$, ~~для~~ и т.д. до $A_n=(9;0)$, для которой подходит $30-2x=y$ и на каждой из этих прямых ~~будет~~ в параллелограмме //дальше прямая уже не будет входить в параллелограмм// будет равно кол-во точек $-4\cdot3=12$

тогда для 9 точек A_n в сумме будет $12\cdot9=108$

Теперь заметим, что ~~для~~ если мы будем рассматривать точки $B_1(0;0)$; $B_2(-1;2)$; $B_3(-2;4)$ ... $B_n(-12;24)$ то для них всех будет по 108 точек, т.е. общ кол-во $-108\cdot12=1296$

Ответ: 1296 пар точек A и B.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=ax+10b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+y^2\le 4 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2+y^2 \le 1 \\ x^2+y^2 \ge 4 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$ ← ①

$(x+8)^2+y^2 \ge 1$ – график всех точек не входящих в круг, с центром в ~~координатами~~ $(-8;0)$ и радиусом 1 и лежащих на окружности с таким же параметрами

$x^2+y^2\le 4$ – график всех точек, лежащих в ~~окр~~ круге с центром в ~~корд~~ координатами $(0;0)$ и рад. 2

Тогда их пересечение – Окруж. в $(0;0)$ с рад. 2

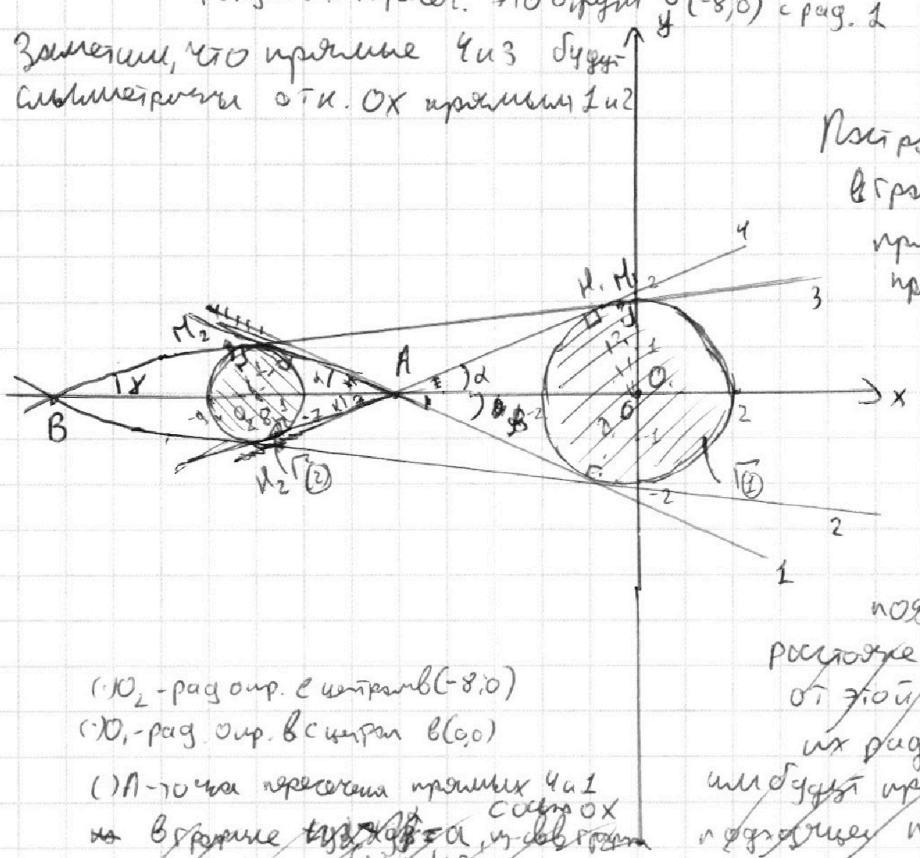
$(x+8)^2+y^2 \le 1$ – график всех точек круга с центром в коорд. $(-8;0)$ и рад 1

$x^2+y^2\ge 4$ – график всех точек а не входящих в круг, с центром в $(0;0)$ и рад. 2, но вход. в окружность с таким-же параметрами.

Тогда их пересеч. это окружн в $(-8;0)$ с рад. 1

Заметим, что прямые 4 и 3 будут симметричны отн. OX прямым 1 и 2

Построим график, тогда в граничными возможных прямых $ax+10b=y$, будут прямые 1, 2, 3, 4 (с граф.)



~~Т.к. они все касаются окружностей то будут им будут принадлежать точки касания, которые подходят под расстояние до центра окружности от этой прямой будет равно их радиусу.~~

им будут принадлежать точки, подходящие под ур.: $\begin{cases} ax+10b=y \\ ((x-8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)=0 \end{cases}$ ②

$()O_2$ – рад окр. с центром в $(-8;0)$

$()O_1$ – рад. окр. в с центром в $(0;0)$

$()A$ – точка пересечения прямых 4 и 1

~~на~~ в графике ~~tg~~ ~~α~~ $= a$, и совпад с tg угла OX прямой $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$

Они пересекутся в одной точке, т.к. симметричны отн. OX

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~(6) $\begin{cases} y=ax+10b \\ \left[\begin{array}{l}(x+8)^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=4\end{array}\right.\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=ax+10b \\ x^2+16x+64+a^2x^2+20abx+100b^2-1=0\end{cases} \\ \begin{cases} \\ \end{cases}\end{array}\right.$~~

(1) проведем высоты в из центров обоих окр. в точки касания с прямыми $\perp$ ~~АМ~~, они будут равны радиусам соответсв. окр. (O_1K_1 и O_2K_2)

~~Углы α а равны из-за симметрии отн. ох~~

~~$AO_2=8-AO_1$~~

~~из т. Пифагора: $AO_2^2=AK^2$~~ $\begin{cases} \angle O_2AK_2=\angle O_1AK_1 \text{ (верт.)} \\ \angle O_2K_2A=\angle O_1K_1A\ (=90^\circ) \end{cases}$ $\Rightarrow$

Из т. Пифагора:

$\Rightarrow \triangle O_2K_2A \sim \triangle O_1K_1A \Rightarrow$

$\Rightarrow AO_2 : AO_1 = O_2K_2 : O_1K_1 = 1:2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{AO_2+AO_1=8}{} \begin{cases} AO_2=\frac{8}{3} \\ AO_1=\frac{16}{3} \end{cases}$

из т. Пифагора: $AO_1^2=O_1K_1^2+\underbrace{AK_1^2}_{\text{обозн за } x}$, тогда: $\frac{16^2}{3^2}-4=x^2 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{16^2-3^2\cdot4}{3^2}=x^2 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\frac{\sqrt{(16-6)(16+6)}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{22\cdot10}}{3} \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{55}}{3}$

тогда $tg\,\alpha=\frac{2}{\left(\frac{2\sqrt{55}}{3}\right)}=\frac{3\sqrt{55}}{55}$

Из св-в графика прямой: $ax+10b=y$, $tg\,k=tg\,\alpha$, значит

а может принимать значения $\pm\frac{3\sqrt{55}}{55}$ в силу симметрии отн. ох

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(2) B – точка пересечения прямых 3 и 2 с осью OX, они пересекаются в одной точке, т.к. симметричны отн. OX.

Проведем высоты из центров на прямую 4 – O_1M_1 и O_2M_2. Они равны радиусам соот. окр.

Р/с $\triangle M_1O_1B$ и $\triangle M_2O_2B$

$\left.\begin{array}{l}\angle M_2BO_2 \text{ - общ.}\\ \angle BM_2O_2 = \angle BM_1O_1 \ (=90^\circ)\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BM_2O_2 \sim \triangle BM_1O_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow BO_1 : BO_2 = O_1M_1 : O_2M_2 = 2:1 \Rightarrow BO_1 = 2BO_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} BO_1 = BO_2 + O_2O_1 \\ BO_1 = 2BO_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BO_2 = 8 \\ BO_1 = 16 \end{cases}$

Из т. Пифагора: $BO_2^2 = M_2O_2^2 + BM_2^2 \Leftrightarrow 8^2 = 1^2 + BM_2^2 \Leftrightarrow BM_2 = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$

Тогда $tg\gamma = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{\sqrt{63}}{63}$

Из свойств графика $y = ax + 10b$, $tg\alpha = tg\gamma = \frac{\sqrt{63}}{63}$, а значит в силу симметрии a может принять значения $\pm\frac{\sqrt{63}}{63}$

Итого $a \in \left\{\pm\frac{\sqrt{63}}{63}; \pm\frac{3\sqrt{55}}{55}\right\}$

Ответ: $a \in \left\{\pm\frac{\sqrt{63}}{63}; \pm\frac{3\sqrt{55}}{55}\right\}$

МФТИ

$\Leftrightarrow \left(\frac{3\sqrt{4R-9}}{2}\right)^2 \cdot 9 = 9x + 20{,}25 \Leftrightarrow 9(4R-9) = 18x + 40{,}5 \Leftrightarrow$

$x = R - 4{,}5$

$\Leftrightarrow 36R - 81 = 18R - 18\cdot 4{,}5 + 40{,}5 \Leftrightarrow 36R - 40{,}5 = 18R - 81 -$

R

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{R-1}\right)^2 = 2(2R-2) \Leftrightarrow 4(R-1) = 4(R-1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

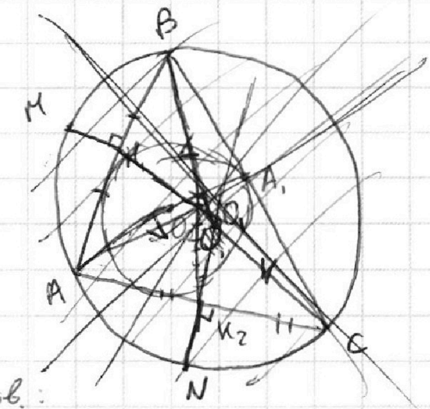
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\breve{AM} = \breve{MB}$, т.к. M — сер. $\breve{AB}$ $\qquad AO_2 - ?$

$\breve{AN} = \breve{NC}$, т.к. N — сер. $\breve{AC}$



$MK_1 = 4{,}5$, т.к. MK_1 — расст.

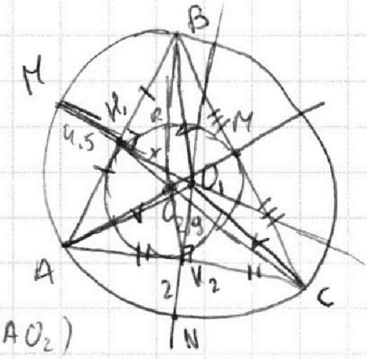
$NK_2 = 2$, т.к. NK_2 — расст.

O_1 — центр опис. окр.

1) Тогда по теореме о трёх равн. хв.:

$$\begin{cases} AK_1 = K_1B \\ K_1 \in MO_1 \end{cases}$$

аналог. $\begin{cases} AK_2 = K_2C \\ K_2 \in AC \end{cases}$



2) проведем AO_2 до пересеч. с BC

$(M = BC \cap AO_2)$

тогда, т.к. O_2 лежит на медиане $\angle BAC$ т.к. SO_2 — впис. окр.

$BM = MC$

т.к. O_2 — центр пересеч. мед., то $AO_2 : O_2M = 2:1 \Rightarrow AO_2 = \frac{2}{3}AM$

Обозначим K_1O_1 за x, тогда $x + 4{,}5 = R$

(R — рад. больш. окр.)

Обозначим O_1K_2 за y, тогда $y + 2 = R$

2)
$$\begin{cases} x^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 \ (\text{из } \triangle AK_1O_1) \\ y^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = R^2 \ (\text{из } \triangle AK_2O_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 - 9R + 20{,}25 = R^2 - \frac{AB^2}{4} \\ R^2 - 4R + 16 = R^2 - \frac{AC^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36R - AB^2 = 81 \\ 16R - AC^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = 36R - 81 \\ AC^2 = 16R - 16 \end{cases} \underset{AB>0}{\overset{AC>0}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} AB = 3\sqrt{4R-9} \\ AC = 4\sqrt{R-1} \end{cases}$$

~~$AK_2 \cdot K_2C = (2R-2)\cdot 2$~~

~~из т. о пересеч. хорд. $AK_1 \cdot K_1B = 4{,}5 \cdot (2x + 4{,}5)$ (из т. о пересеч. отр. в окр.) $\Leftrightarrow$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

ОДЗ:
$$\begin{cases} 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x-1\geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-3)}-\sqrt{2x^2+2x+0{,}5+0{,}5}=2-7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-3)}-\sqrt{2(x+0{,}5)^2+0{,}5}=2-7x \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (x-1)(2x-3)+2(x+0{,}5)^2+0{,}5-2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2(x+0{,}5)^2+0{,}5)}=(2-7x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+3+2x^2+2x+1-2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2(x+0{,}5)^2+0{,}5)}=$$

$\frac{2}{7}-1$ $\frac{4}{7}-3$

$$=4-28x+49x^2 \Leftrightarrow 4x^2-3x+4-2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2(x+0{,}5)^2+0{,}5)}=$$

$$=4-28x+49x^2 \Leftrightarrow 45x^2-25x=-2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)} \Leftrightarrow$$

$(x-1)(2x-3)$

$\frac{(2\sqrt{61}-30)}{3}$ 20 41

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (5x(9x-5))^2=4(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1) \Leftrightarrow$$

36 2x3

$$\Leftrightarrow 25x^2(81x^2-90x+25)=4(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) \Leftrightarrow$$

$36 \times 36 = 216$, 108, 1296

$\frac{22+4\sqrt{61}-123}{41}$

$$\Leftrightarrow 25\cdot 81\cdot x^4-90\cdot 25\cdot x^3+25^2\cdot x^2$$

$3t^2$

$m^2(m^2+2m+1)+4t^2-4m^2t-4mt=$

$=t^2-mt\ 0$

$$2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$$

$m^2(m^2+2m+1)+$
$+3t^2-4m^2t-3mt=0$

$t(3t$

$14 \times 14 = 56$, 14, 196

$$2x^2+2x+1=2x^2-5x+3+3x-2=(x-1)(2x-3)+(3x-2)=$$

$2x^2-5x+3$

61, 196, 1176, 1955

$$2x^2+2x+1=$$
$$=2x^2-5x+3+7x-2=$$

$(m(m+1)-2t)^2=$

$(x-1)(2x-3)=-(2-7x)$

$t(t-m) \Leftrightarrow$

t^2-tm

$$\Leftrightarrow m^2(m+1)^2+4t^2-$$
$$-4mt(m+1)=$$
$$=t(t-m)$$

$$(x-1)(2x-3)+(x-1)(2x-3)-(2-7x)-$$
$$-2\sqrt{(x-1)(2x-3)((x-1)(2x-3)-2-7x)}=(2-7x)^2$$

$$\sqrt{t}-\sqrt{t-m}=m \Leftrightarrow$$

$$t=m^2+t-m+2m\sqrt{t-m} \Leftrightarrow m^2-m=-2m\sqrt{t-m}$$

$m-1=-2\sqrt{t-m} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m^2-2m+1=4t-4m$

$$\Leftrightarrow t+t-m-\sqrt{t(t-m)}=m^2 \Leftrightarrow m^2-2t+m=2\sqrt{t(t-m)} \Leftrightarrow$$

$m^2+2m+1=4t$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a, b, c \in \mathbb{N}$ $ab \vdots 2^{14}7^{10}$, $bc \vdots 2^{17}7^{17}$, $ac \vdots 2^{20}7^{37}$

т.к. ~~нам~~ нужно наименьшее значение произведения abc, нам нужно, чтобы: $ab = 2^{14}7^{10}$, $bc = 2^{17}7^{17}$, $ac = 2^{20}7^{37}$, т.к. если они будут больше, то

$$\begin{cases} ab \vdots 2^{14}7^{10} \\ bc \vdots 2^{17}7^{17} \\ ac \vdots 2^{20}7^{37} \end{cases} \Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{51}7^{64}$$

$a+b \vdots m$, $8ab \vdots m$

$\frac{a}{b}+1 \vdots \frac{m}{b}$, $8a \vdots \frac{m}{b}$ $\frac{2}{7} = k$

$a = mt - b$

$8(mt-b)b = km$

$\frac{2+7}{4-6\cdot2\cdot7+49} = \frac{9}{53-84} = \frac{9}{-31}$

$a = bk$ $bk = k+1$

$ab = 2^{14}7^{10}$
$bc = 2^{17}7^{17}$
$ac = 2^{20}7^{37}$

$\frac{a}{c} = \frac{1}{2^3 7^7} \Rightarrow a = c \cdot 2^3 \cdot 7^7$

$13 \cdot 19 =$

$ab \vdots a+b$

$b^2k = bk + b$

$\exists k(a+b), k^2 = \frac{2^{20}7^{37}}{2^3 7^7}$

$ab = m \cdot 2^{14}7$ $8ab \vdots k$

$a+b \vdots m$

$a+b \vdots 8$

$\Rightarrow a = \frac{2^{14}7^{10}}{8m} \Rightarrow \frac{2^{14}7^{10}c}{8m} \vdots 2^{20}7^{37} \Leftrightarrow$

$(a+b)^2 - 8ab \vdots m$

$8mt - 8b = km$

$\vdots m$ $\vdots m$ $\frac{a}{b}$ – темр, $a = m + b$

$\frac{c}{8m} \vdots 2^6 7^{27} \Rightarrow$

$a, b \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} a+b \vdots 8 \\ m > 8 \\ a+b \vdots m \\ ab \vdots m+b \end{cases}$

$-8b = m(k-8)$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a+b \vdots mt \\ 8ab \vdots m \end{cases}$$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+b^2+2ab-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} =$

$m = \frac{a+b}{k}$

$a = kb$

$= \frac{b(k+1)}{b^2(k+1)^2 - 8b^2k} = \frac{b(k+1)}{b^2((k+1)^2-8k)} =$

$\frac{8}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}$

$\frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b} =$

$= \frac{k+1}{b((k+1)^2 - 8k)} =$ $k+1 \vdots m$

$$\begin{cases} b(k+1) \vdots m \\ 8b^2k \vdots m \end{cases}$$

$= \frac{(a+b)^2}{a+b} - \frac{8ab}{a+b} =$

$= \frac{k+1}{b(k^2+2k+1-8k)} = \frac{k+1}{b(k^2-6k+1)}$

$$\begin{cases} a+b = mt \\ 8ab = km \end{cases}$$

$= a+b - \frac{8ab}{a+b} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

O_1 - центр ω

O_2 - центр Ω

$R_\Omega =$

$25x^4-31x^2+25=0$

$64x^4-160x^2+100=36x^2(1-x^2)$

$8x^2-10=-6x\sqrt{1-x^2}$

$100x^4-196x^2+100=0$

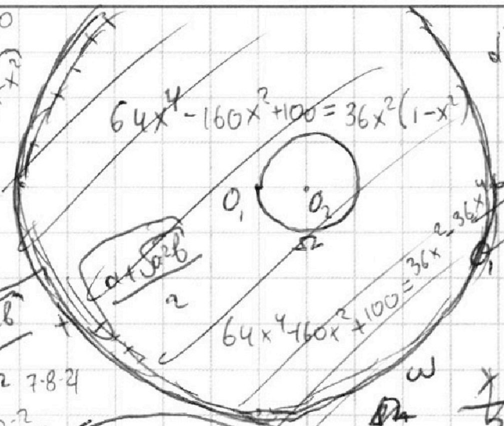
$\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}^2 = \sqrt{a^2-\sqrt{a^2-b}}$

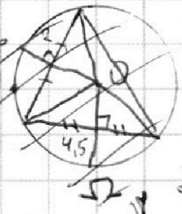
$d^2 = 1-x^2$

$8x^2+6x\sqrt{1-x^2}=10$

$7x^2+6x\sqrt{1-x^2}=1+x^2=9$

$x^2 = 1+d^2$





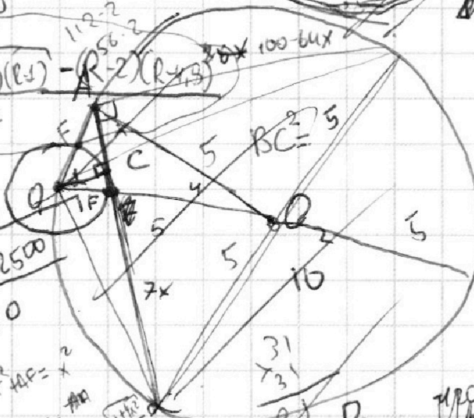
$2x_2-2x_1+y_2-y_1$

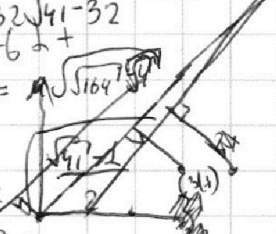
$AB = \sqrt{\frac{\sqrt{41}-1}{2}}$

$t = \frac{31 \pm \sqrt{31^2-2500}}{50}$

$x = \frac{-3d+\sqrt{16d+63}}{7}$

$=\sqrt{32\sqrt{41}-32}$





$\frac{-6d \pm 2\sqrt{9d^2+7d^2+63}}{7}$

$10-\sqrt{1+d^2}$

$\angle M \cdot MO_1 = AM \cdot MB = (x+d)\cdot(7x-d) = 9$

$\sqrt{1+d^2}$

$\frac{-6d \pm \sqrt{36d^2+28(1+9)}}{14}$

$(10-\sqrt{1+d^2})\sqrt{1+d^2} = (x+d)(7x-d) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10\sqrt{1+d^2} - 1 - d^2 = 7x^2+7xd-xd-d^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10\sqrt{1+d^2} - 1 = 7x^2+6xd \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7x^2+6xd-(10\sqrt{1+d^2}-1)=0$

$x = \frac{6d \pm \sqrt{36d^2+28(10\sqrt{1+d^2}-1)}}{}$

$O_1X \cdot CT = 7x^2$

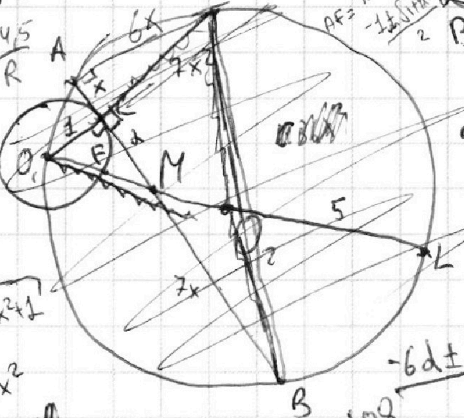
$CT = 7x^2$

$(x+8)^2+y^2-1=0$

$x^2+y^2-4=0$

$7x\sqrt{x^2+1}$

x^4+x^2



$100 = 49x^2+49x^4$

$\Leftrightarrow 49t^2+49t+100=0$

$t = x^2$

$\Leftrightarrow t = \frac{-49 \pm \sqrt{7^4+4\cdot 7^4\cdot 100}}{2\cdot 49}$

$\frac{-49 \pm 49\sqrt{1+40}}{2\cdot 49}$

$|ax_0+by_0+c|$

$R^2 = (R-2)^2 + 2\sqrt{R-1}^2$

$4(R-1)$