МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^{14}7^{10}$, $bc$ делится на $2^{17}7^{17}$, $ac$ делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем $m$ могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на $m$?

3. [4 балла] Центр окружности $\omega$ лежит на окружности $\Omega$, хорда $AB$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $C$ так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину $AB$, если известно, что радиусы $\omega$ и $\Omega$ равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник $ABC$ вписан в окружность. Пусть $M$ – середина той дуги $AB$ описанной окружности, которая не содержит точку $C$; $N$ – середина той дуги $AC$ описанной окружности, которая не содержит точку $B$. Найдите расстояние от вершины $A$ до центра окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если расстояния от точек $M$ и $N$ до сторон $AB$ и $AC$ соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание N1

$a, b, c \in \mathbb{N}$ $\qquad abc_{min} - ?$

$ab \vdots 2^{14} 7^{10}$

$bc \vdots 2^{17} 7^{17}$

$ac \vdots 2^{20} 7^{37}$

Если мы перемножим ab на bc на ac $(a^2b^2c^2)$ это число будет точно делится $2^{51} 7^{64}$

Но также будет делится на самый маленький из тройки делитель — $2^{14} 7^{10}$ т.к. любой другой из тройки точно делится на него:

$$\frac{2^{17} 7^{17}}{2^{14} 7^{10}} = 2^3 7^7 \qquad \frac{2^{20} 7^{37}}{2^{14} 7^{10}} = 2^6 7^{27}$$

Поэтому число $a^2b^2c^2 \vdots 2^{14} 7^{10}$, а следовательно

$abc \vdots \sqrt{2^{14} 7^{10}}$

$abc \vdots 2^7 7^5 \Rightarrow$ наименьшее возможное значение abc это и есть делитель — $2^7 7^5$

Ответ: $2^7 7^5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание №2

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$\frac{a}{b}$ - несократимая дробь

$\exists\ \frac{a}{b}=k$, тогда $a=bk$

Подставим в дробь вместо $a$, $bk$.

$$\frac{bk+b}{(bk)^2-6\cdot bk\cdot b+b^2}=\frac{b(k+1)}{b^2(k^2-6k+1)}$$

чтобы дробь была сократима на

$$k+\cancel{1}=k^2-6k+\cancel{1}$$
$$k^2-4k=0$$
$$k(k-4)=0$$
$$\left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=4 \end{array}\right.$$

$m=k+1=k^2-6k+1$

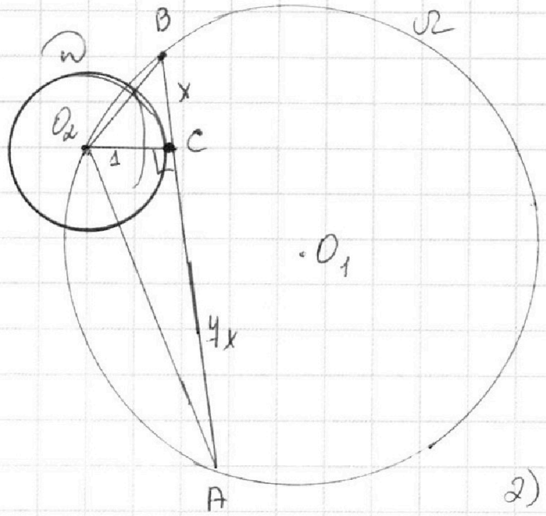
наибольшее значение $m$ достигается при наибольшем значении $k$, то есть при $k=4$

$$\Downarrow$$

$$m=4+1=8$$

Ответ: при $m=8$

Задание №3



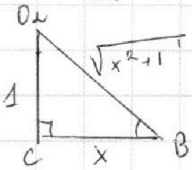

Дано:
Окр ω ц. $O_2$ r = 1
Окр Ω ц. $O_1$ R = 5
AB - хорда окр Ω
AB касат. ω в т. C
$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$

Найти: AB

1) ∃ AC = 7x BC = x

2) AB - касат к окр ω
$O_2C$ - радиус провед. в точку касания
по т. о радиусе, провед. в т. кас $O_2C \perp AB$

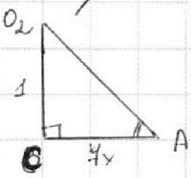
3) Рассмотрим прямоуг △ $BO_2C$




по т Пифагора
$BO_2 = \sqrt{BC^2 + CO_2^2} = \sqrt{x^2+1}$

$\sin\angle O_2BC = \frac{O_2C}{BO_2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

4) Рассмотрим прямоуг △ $CO_2A$ ($O_2C \perp AB$)




по т Пифагора
$AO_2 = \sqrt{49x^2+1}$

$\sin\angle O_2AC = \frac{O_2C}{O_2A} = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$

5) △$O_2BA$ - вписан в окр. Ω, все его вершины лежат на ней.
по т. синусов

$\frac{BO_2}{\sin\angle BAO_2} = 2R$ $\frac{AO_2}{\sin\angle O_2BA} = 2R$

$BO_2 = 2R\sin\angle BAO_2 = 2\cdot 5\frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} = \frac{10}{\sqrt{49x^2+1}}$

$AO_2 = 2\cdot 5\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{10}{\sqrt{x^2+1}}$

см на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

продолжение 3 задачи

б) $BO_2 = \frac{10}{\sqrt{49x^2+1}}$

$BO_2 = \sqrt{x^2+1}$

$\frac{10}{\underbrace{\sqrt{49x^2+1}}_{>0}} = \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{>0}$

$\frac{100}{49x^2+1} = x^2+1$

$49x^4 + x^2 + 49x^2 + 1 = 100$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

по схеме Горнера:

| | 49 | 0 | 50 | 0 | -99 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 49 | 49 | 99 | 99 | 0 | ⊕ | $x=1$ - корень |
| -1 | 49 | 0 | 99 | 0 | | ⊕ | $x=-1$ - корень |

$(x+1)(x-1)(49x^2+99)=0$

$49x^2+99>0$ при $\forall x$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \quad - \\ x=-1 \; - \text{ не подходит, т.к. } x>0 \end{array}\right.$

($x$ - сторона)
длина

7) $AB = AC + CB = x + 7x = 8x = 8 \cdot 1 = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4

$$\sqrt{2x^2-5x+3}^{\geq 0} - \sqrt{2x^2+2x+1}^{\geq 0} = 2-7x^{\geq 0}$$

(*): $\begin{cases} 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \\ 2-7x\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2-2x-3x+3\geq 0 \\ 7x\leq 2 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)(x-\frac{3}{2})\geq 0 \\ x\leq \frac{2}{7} \end{cases}$

$2x^2+2x+1=0$

$D=2^2-4\cdot 2<0$

⇓ коэффиц.

т.к. $a$ (старшего члена) $a>0$

то $y=2x^2+2x+1$ — парабола

$2>0 \Rightarrow$ ветви вверх ⇒

$2x^2+2x+1\geq 0$ при $\forall x$

$x\in(-\infty;\ \frac{2}{7}]$

Пусть $a=\sqrt{2x^2-5x+3}$ $\quad b=\sqrt{2x^2+2x+1}$

Заметим, что $a^2-b^2 = \cancel{2x^2}-5x+3-\cancel{2x^2}-2x-1 =$
$= -7x+2$

$\begin{cases} a^2-b^2 = 2-7x \\ a-b = 2-7x \end{cases} \Rightarrow$ $a-b=a^2-b^2$

$(a-b)(a+b)-(a-b)=0$

$(a-b)(a+b-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b=1 \end{array}\right.$

I. $a=b$

$\sqrt{2x^2-5x+3}=\sqrt{2x^2+2x+1}$

$\cancel{2x^2}-5x+3=\cancel{2x^2}+2x+1$

$7x=2$

$x=\frac{2}{7}$

II. $a+b=1$

$\sqrt{x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$

$\sqrt{x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}$

$\begin{cases} 1-\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0 \\ x^2-5x+3\geq 0 \\ \cancel{2x^2}-5x+3=1+\cancel{2x^2}+2x+1-2\sqrt{2x^2+2x+1} \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2+2x+\cancel{1}\leq\cancel{1}; \quad 2x(x+1)\leq 0 \\ x\in(-\infty;1]\cup[1{,}5;+\infty) \\ 2\sqrt{2x^2+2x+1}=7x-1 \end{cases}$

-1 0

1 1,5

См. на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

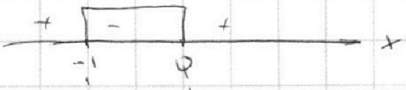
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

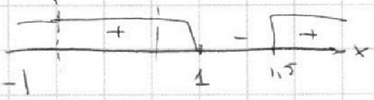
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

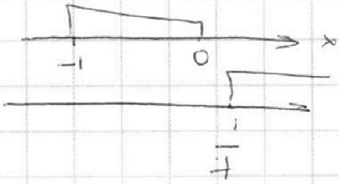
продолжение 4



$$\begin{cases} x \in [-1;0] \\ 2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \in [-1;0] \\ 7x-1 \geq 0 \quad ; \quad x \geq \frac{1}{7} \\ 4(2x^2+2x+1) = (7x-1)^2 \end{cases}, \text{ но}$$



$x \in \varnothing$

$x = \frac{2}{7}$

Ответ: $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание №6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \leq 0 \end{cases}$$

кол-во решений системы = кол-ву пересечений графиков

I $y = ax + 10b$

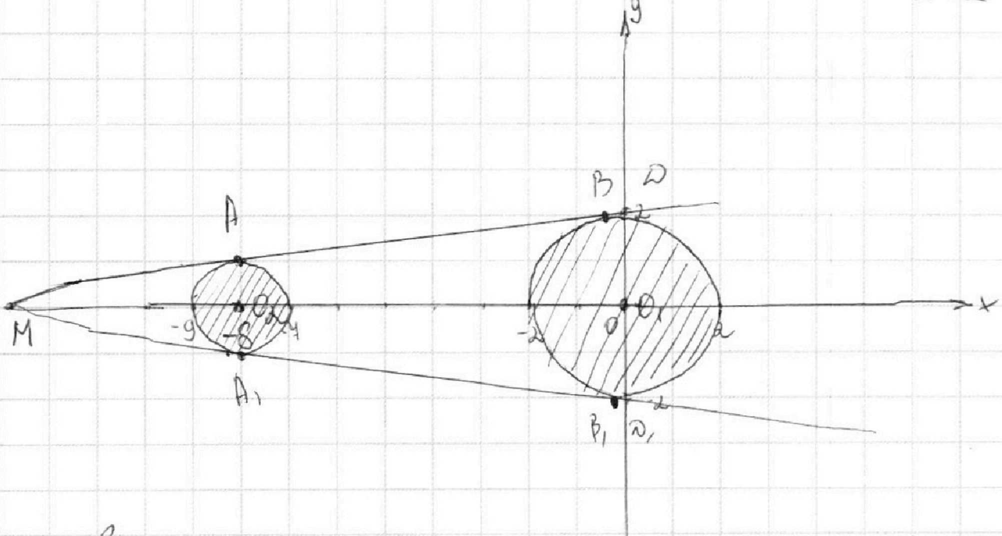
II $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \leq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 2^2 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 2^2 \end{cases} \end{array}\right.$$ – это все графики окружностей

$x^2 + y^2 = 2^2$ Окр. ц $(0;0)$ $R = 2$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ Окр. ц. $(-8;0)$ $R = 1$

Построим график №II




Заметим, что система будет иметь ровно 2 решения, когда $y = ax + 10b$ будет вн. общей касательной к 2ум окружн., таких касательных существ. 2. Пусть точка пересечения 2ух касательных – (.)M

центры окружностей (.)$O_1$ и (.)$O_2$

точки касания с окр. (.)A и (.)B, (.)$A_1$ и (.)$B_1$

точки пересечения с осью ординат (.)D и (.)$D_1$

см на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

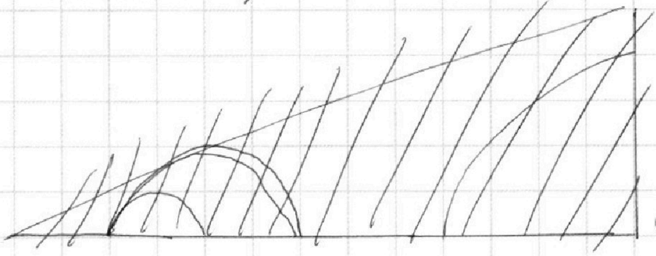
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

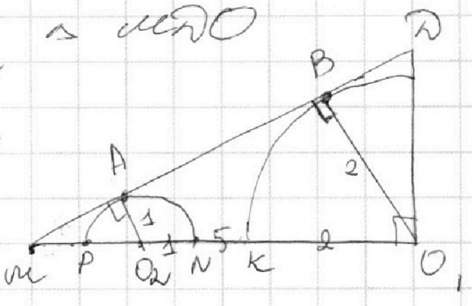
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение в задаче №1

Рассмотрим подобие △ MDO






Расставим точки пересечения окружностей с осью Ox

(.) P, N, K соответств.

1) $O_2O_1 = 8$, разница абсцисс $O_2(-8;0)$ $O_1(0;0)$

$O_2N = 1$

$KO_1 = 2$

⇓

$NK = 5$

$O_2A \perp MB$ радиус в точке касан

$O_1B \perp MB$ радиус в точке касан

2) Рассмотрим $\triangle O_2MA \sim \triangle MBO_1$ по I пр

$\angle BMO_1$ – общий

$\angle MAO_2 = \angle MBO_1 = 90°$

$$\frac{MO_2}{MO_1} = \frac{O_2A}{O_1B}$$

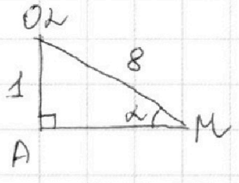
$\exists MO_2 = x$, тогда $\dfrac{x}{x+O_2O_1} = \dfrac{1}{2}$

$2x = x + 8$

$x = 8 \Rightarrow O_2M = 8$, $MO_1 = 8+8=16$

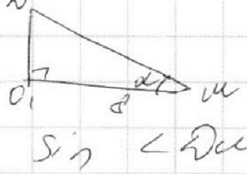
(.) $M(-16;0)$

3) △ $MAO_2$ – прямоуг $\sin\alpha = \dfrac{AO_2}{O_2M}$




$$\sin\alpha = \frac{1}{8}$$

4) △ $MO_1D$ – прямоуг




$\sin\angle DMO_1 = \sin\alpha$ $\sin\angle DMO_1 = \dfrac{DO_1}{MD}$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

см. на след. стр

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение 6 задачи № 2

$\cos\alpha = \frac{MO_1}{DM}$ $\quad DM = \frac{MO_1}{\cos\alpha} = \frac{16\cdot 8}{\sqrt{63}} = \frac{2\cdot 64}{\sqrt{63}}$

$\sin\alpha = \frac{DO_1}{DM}$

$DO_1 = \sin\alpha \cdot DM = \frac{1}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{128}\,^{16}}{\sqrt{63}} = \frac{16\sqrt{63}}{63} = \frac{48\sqrt{7}}{\cancel{63}_{21}} = \frac{16\sqrt{7}}{21}$

5) т. D имеет координаты $\left(0; \frac{16\sqrt{7}}{21}\right)$

т.к. касательные и окруж симметрично отн OX, то т. $D_1$ $\left(0; -\frac{16\sqrt{7}}{21}\right)$

6) $y_1 = ax + 10b$ проходит через т. M и т. D

т. M $(-16; 0)$ $\quad$ т. $D_1\left(0; -\frac{16\sqrt{7}}{21}\right)$

$\begin{cases} -\frac{16\sqrt{7}}{21} = 10b \\ 0 = -16a + 10b \end{cases}$ $\quad \begin{cases} b = -\frac{\cancel{16}^{8}\sqrt{7}}{21\cdot\cancel{10}_{5}} = -\frac{8\sqrt{7}}{105} \\ a = \frac{10}{16}b \end{cases}$

$\begin{cases} b = \frac{-8\sqrt{7}}{105} \\ a = \frac{-\cancel{10}^{5}}{\cancel{16}_{2}} \cdot \frac{8\sqrt{7}}{\cancel{105}_{21}} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} b = \frac{-8\sqrt{7}}{105} \\ a = -\frac{\sqrt{7}}{21} \end{cases}$

$y_1 = -\frac{\sqrt{7}}{21}x + \frac{8\sqrt{7}}{105}$

касательные симметр $\Rightarrow$

$y_2 = \frac{\sqrt{7}}{21}x + \frac{8\sqrt{7}}{105}$

Ответ: при $a = \frac{\sqrt{7}}{21}$ и $b = \frac{8\sqrt{7}}{105}$

при $a = -\frac{\sqrt{7}}{21}$ и $b = \frac{8\sqrt{7}}{105}$

сист. уравнений имеет ровно 2 реш.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

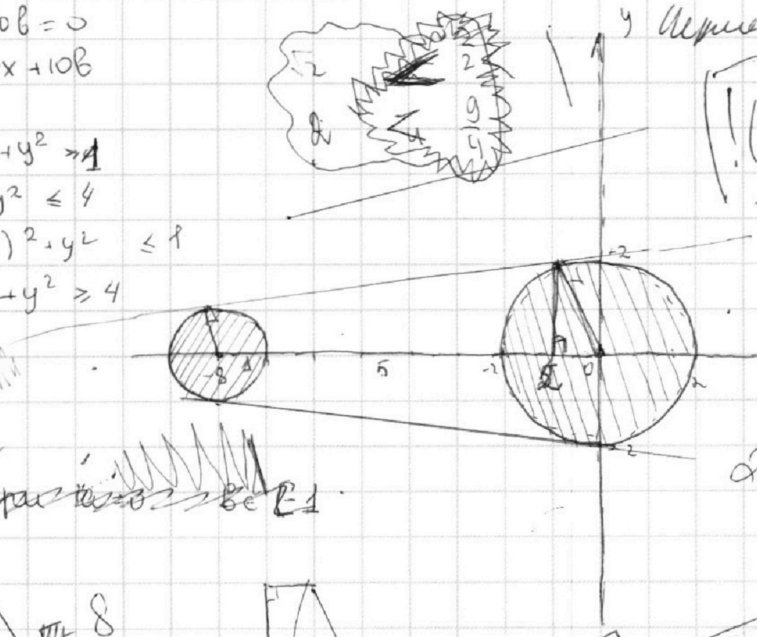
МФТИ

⑥ $ax - y + 10b = 0$

$y = ax + 10b$

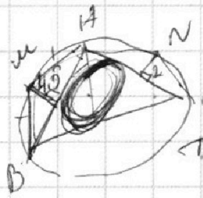
$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ (x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

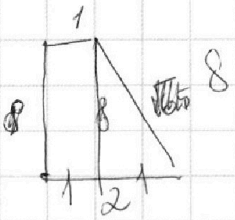
$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ (x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$

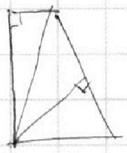


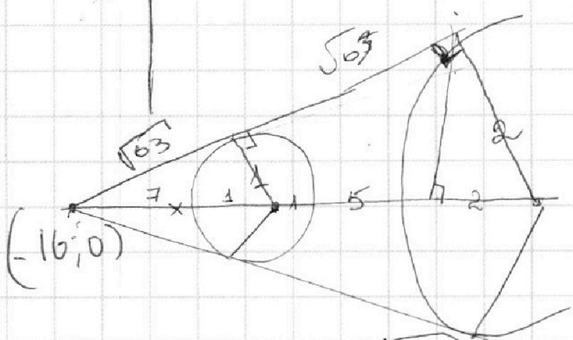
$\boxed{(-16;0)}$

2 реш - касн



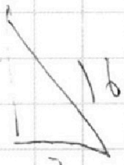






$(-16;0)$

$\sqrt{252}$



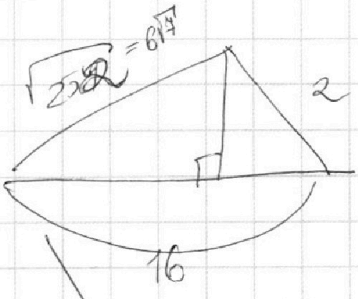
$\sqrt{27\cdot 2}$

$\frac{1}{2} = \frac{x}{x+8}$

$2x = x + 8$

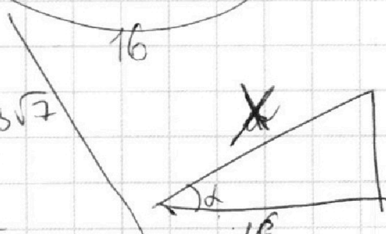
$x = 8$

$2\cdot 126 =$
$= 4\cdot 63 =$
$= 4\cdot 9\cdot 7$



$\sin = \frac{1}{8}$

$\cos = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{63}}{8}$



$\frac{1}{8} = \frac{N}{8^2}\cdot 3\sqrt{7}$

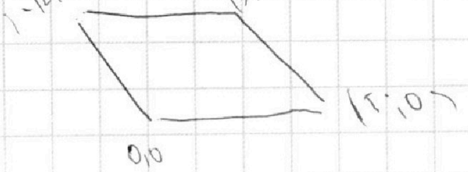
$N\cdot 3\sqrt{7} = 8^2$

$\frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{16}{x}$

$N = \frac{64\sqrt{63}}{63}$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$x = \frac{8\cdot 16}{\sqrt{63}} = \frac{8^3}{3\sqrt{7}}$



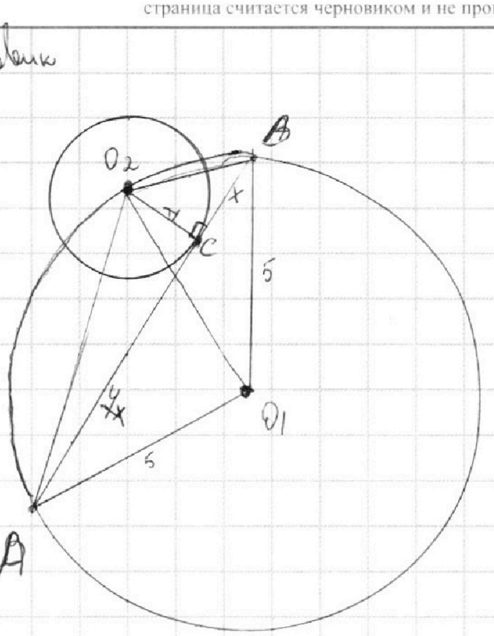
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик




$\frac{AC}{BC} = \frac{7}{1}$

$R = 5$
$r = 1$
$AB - ?$

$\Delta BO_2C$

$\sin \angle O_2BC = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\frac{AO_2}{\sin \angle O_2BA} = 2R$

$AO_2 = \frac{2 \cdot 5}{\sqrt{\ }} = \frac{10}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Delta AO_2C$

$\sin \angle O_2AC = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$

$\cos =$

$\frac{BO_2}{\sin \angle} = 10$

$BO_2 = \frac{10}{\sqrt{49x^2+1}}$

$\frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta)}{2}$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

$5\sqrt{2}$

$\sqrt{49x^2+1} = \frac{10}{\sqrt{x^2+1}}$

$10 = \sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}$

$\cancel{100 = 49x^4}$

$49x^4 + x^2 + 49x^2 + 1 = 100$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

$t = x^2$ ; $x = \sqrt{t}$

$49t^2 + 50t - 99 = 0$

$50^2 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 4(25^2 + 49 \cdot 99) = 4 \cdot 5206$

$51x^2 - 99 = 0$

$3(17x^2 - 33) = 0$

$x = \sqrt{\frac{33}{17}}$

5206 | 2
2603 | 7

4581
+ 625
5206

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 49 | 0 | 50 | 0 | -99 |
| +1 | 49 | 49 | 99 | 99 | 0 |
| -1 | 49 | 0 | 99 | 0 | |

$x = 1$ $(49x^3 + 49x^2 + 99x + 99) = 0$

$(x+1)(x-1)(49x^2 + 99) = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

1) $ab \vdots 2^{14}7^{10}$ $\qquad a^2b^2c^2 \vdots 2^{51}7^{64}$ $\qquad abc$ - шит?

$bc \vdots 2^{17}7^{14}$

$ac \vdots 2^{20}7^{37}$ $\qquad abc \vdots 2^{25}7^{32}\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $abc \in \mathbb{N}$ $\boxed{abc \vdots 2^{26}7^{32}}$

13 12 11 14 23 17 20

2) $\dfrac{a+b}{a^2-6ab+b^2} =$ $\qquad \dfrac{a}{b}$ - несократима

$\dfrac{1}{a-6b+\frac{b^2}{a}} + \dfrac{1}{\frac{a^2}{b}-6a+b}$

$a^2-6ab+b^2 \,|\, a+b$

$-a^2+ab \,|\, a$

$-7ab+b^2$

$\dfrac{a}{b}=k \qquad a=bk$

$\dfrac{b+bk}{b^2k^2-6b^2k+b^2} = \dfrac{b(k+1)}{b^2(k^2-6k+1)}$

$m=4$

$x^2-6bx+b^2=0$

$D=36b^2-4b^2=32b^2$

$x_{1,2}=\dfrac{6b\pm4b\sqrt{2}}{2} \qquad x_{1,2}=3b\pm2b\sqrt{2}=b(3\pm2\sqrt{2})$

$k^2-6k+1=0$

$D=36-4=32$

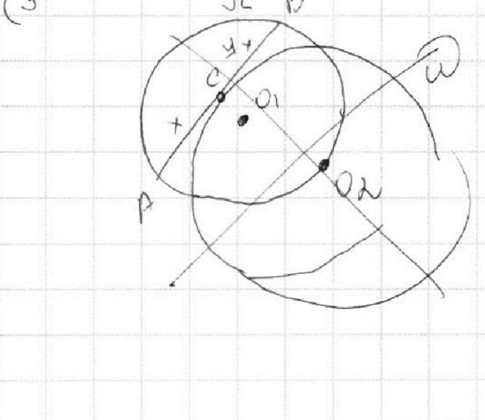
$k_{1,2}=\dfrac{6\pm4\sqrt{2}}{2}$

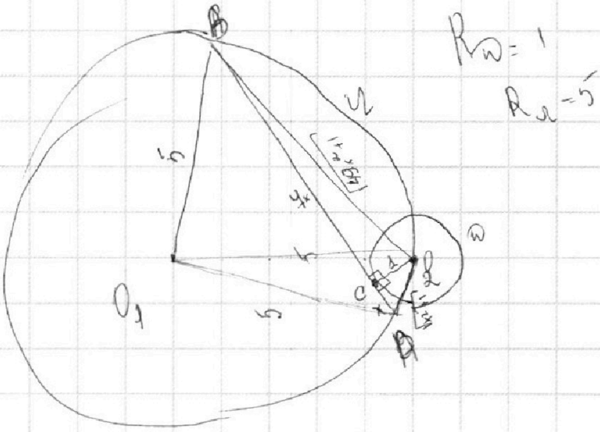
$(a-b(3-2\sqrt{2}))(a-b(3+2\sqrt{2}))$

$k_{1,2}=3\pm2\sqrt{2}$

$\dfrac{a+b}{(a-b(3-2\sqrt{2}))(a-b(3+2\sqrt{2}))} =$

3)




$R_\omega=1$

$R_\Omega=5$

$k+1=k^2-6k+1$

$k^2-7k=0$

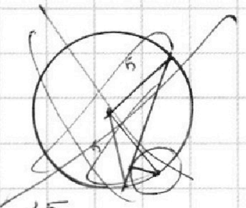
$k(k-7)=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$\begin{cases} 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$ $(x-1)(x-\frac{3}{2})\geq 0$ при $\forall x$ $>0$

$D = 4-8<0$

$\frac{9}{2} - \frac{15}{2}+3$

$+ \quad - \quad +$ ; $1 \quad \frac{3}{2}$

$x\in(-\infty;1]\cup[\frac{3}{2};+\infty)$

$2-7x\geq 0$

$7x\leq 2$

$x\leq\frac{2}{7}$

$x\in(-\infty;\frac{2}{7}]$

$\frac{14}{7}$ 10

~~$2-7x + 2\sqrt{\ }\sqrt{\ } = (2-7x)^2$~~

$a=\sqrt{2x^2-5x+3}$

$b=\sqrt{2x^2+2x+1}$

$a^2-b^2 = \cancel{2x^2}-5x+3-\cancel{2x^2}-2x-1 = -7x+2$

Ответ: $\frac{2}{7}$

$\frac{11-\sqrt{283}}{41}$

$\begin{cases} a^2-b^2 = 2-7x \\ a-b = 2-7x \end{cases}$

$a^2-b^2 = a-b$

$(a+b)(a-b)-(a-b)=0$

$(a-b)(a+b-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b=1 \end{array}\right.$

283 | 6
24 | 47
43

I $\cancel{2x^2}+2x+1 = \cancel{2x^2}-5x+3$

$7x=2$

$x=\frac{2}{7}$

II $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$

$\sqrt{2x^2-5x+3} = 1-\sqrt{2x^2+2x+1}$

$1-\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0$

$\cancel{2x^2}-5x+3 = 1+\cancel{2x^2}+2x+1 - 2\sqrt{\ }$

$2x^2+2x+1\leq 1$

$2x(x+1)\leq 0$

$+ \quad - \quad +$ ; $-1 \quad 0$

$+2\sqrt{\ } = 7x-1$

$x\geq\frac{1}{7}$

$\frac{11-\sqrt{283}}{41}$ и $<$ $\frac{2}{7}$

$77-7\sqrt{283}$ и $81$

$7\sqrt{283}$

$4(2x^2+2x+1) = 49x^2-14x+1$

$8x^2+8x+4 = 49x^2-14x+1$

$41x^2-22x-3=0$

$D = 22^2+4\cdot 3\cdot 41 = 4(11^2+123) = 4\cdot 283$

283

$x_{1,2} = \frac{22\pm 2\sqrt{283}}{2\cdot 41}$ $\quad x_{1,2} = \frac{11\pm\sqrt{283}}{41}$