



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ЗАДАЧА N1

$$a, b, c : 2^{20} \cdot 7^{37} \rightarrow a, b, c : 7^{37}$$

пусть $a = 2^{x_1} \cdot 7^{y_1}$ ($x_1, y_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)
 $b = 2^{y_1} \cdot 7^{z_1}$ ($y_1, z_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)
 $c = 2^{z_1} \cdot 7^{x_1}$ ($z_1, x_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

заметим, что **минимальные** показатели в кратном разложении **каждого** из a, b, c **одно и то же** для 2 и 7 **вспомогательных** не могут **м.к.** тогда a, b, c **зависят** от 2 и 7 **как** **этих** **показателей** **показателей** (**м.к.** $a, b, c \in \mathbb{N}$), а они не **будут** **как** **зависят** **от** **показателей** 2 и 7 , а **каждый** **из** **них** **будет** **этим** **показателем**, но это **никак** **не** **соответствует** **каким-либо** **условиям**, а **просто** **увеличение** **каждого** **показателя**, (а для **смысла**, это **какие** **показатели** **наибольшие**)

$$\begin{cases} x_1 + y_1 \geq 14 \\ y_1 + z_1 \geq 17 \\ z_1 + x_1 \geq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 \geq 51 \\ x_1 + y_1 + z_1 \geq 51 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lfloor \frac{51}{2} \rfloor + 1 = 26$$

м.к. **наибольший** **из** **возможных** **произведений** **одно** **будет** **ка** 7^{37} **и** **ка** 2^{26} , а **значит** **одно** **будет** **не** **меньше** $7^{37} \cdot 2^{26}$

пример **какого**:

$$\begin{aligned} a &= 7^{10} \cdot 2^8 & ab &= 2^{17} \cdot 7^{10} : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ b &= 2^6 \cdot 7^6 & bc &= 2^{18} \cdot 7^{17} : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ c &= 7^{27} \cdot 2^{12} & ac &= 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

м.к. **наибольший** **произв.** **равно** $2^{26} \cdot 7^{37}$
Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №2

$\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$
 ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$)

Заметим, что $\text{НОД}(a+b, a) = \text{НОД}(a+b, b) = 1$

т.к. $a+b$ и a взаимно просты:

$\exists \alpha: \text{НОД}(a+b, a) = 1 \Rightarrow a+b - a \equiv 1 \pmod{\alpha} \Rightarrow b \equiv 1 \pmod{\alpha}$

\Rightarrow но $\text{НОД}(a, b) = 1, a \equiv 1 \pmod{\alpha} \Rightarrow b \equiv 1 \pmod{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{N}, \alpha > 1$)

?!:

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 8ab}$$

\exists этот дробь несократима на $\mathbb{N} \forall \alpha \in \mathbb{N}, m$, тогда

$\left. \begin{array}{l} a+b \equiv m \\ (a+b)^2 - 8ab \equiv m \end{array} \right\} \Rightarrow 8ab \equiv m$

т.о. $\left. \begin{array}{l} a+b \equiv m \\ 8ab \equiv m \end{array} \right\} \Rightarrow 8 \equiv m \Rightarrow m \leq 8$

пример, где $m=8$

~~$a=8^{100}, b=3, a+b=8^{100}+3, a^2-6ab+b^2=8^{200}-3$~~

сокр. т.к. $8^{100}-3 \not\equiv 3 \pmod{3}$ ($3 \equiv 3, 8^{100} \not\equiv 3$)

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8^{100}-3+3}{(8^{100}-3)^2-6(8^{100}-3)+3^2} = \frac{8^{100} \cdot 3}{8^{200}-8 \cdot (8^{100}-3)}$

можно сокр. на 8

Ответ: при $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

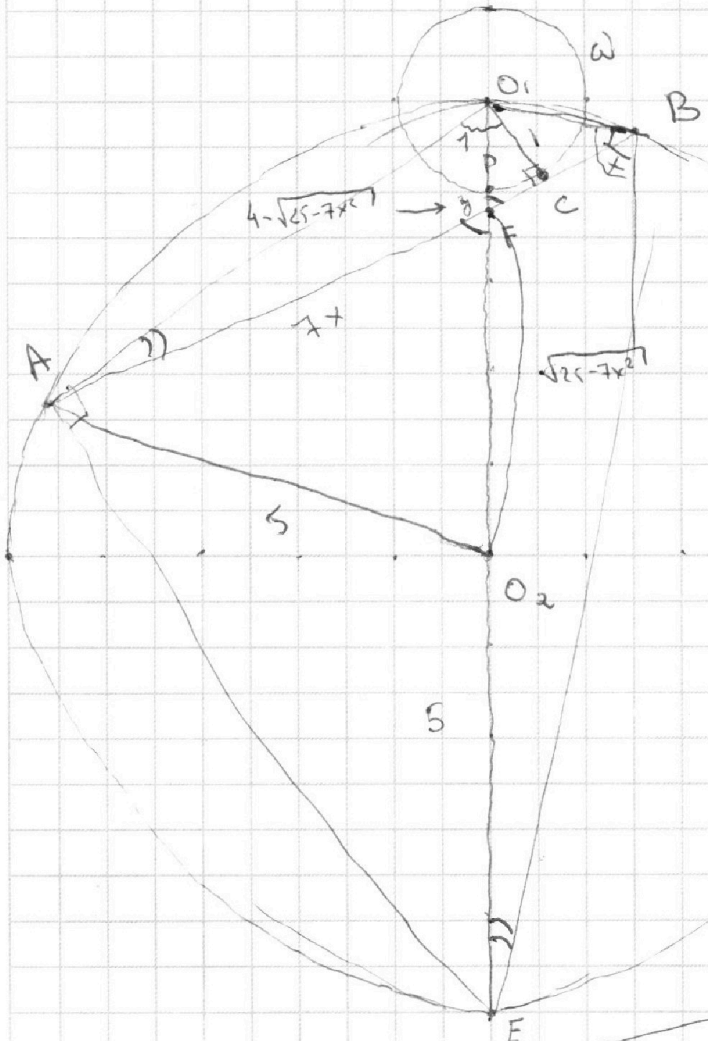
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ЗАДАЧА №3



$AC : CB = 7$
 $AC = 7x$
 $CB = x$
 $DF = y$
 по теор. о секущих:
 $7x \cdot x = (OD + y) \cdot (ED - y)$
 $\cdot (10 - (1 + y)) \cdot (-y)$
 $\Leftrightarrow 7x^2 = (1 + y) \cdot (-y)$
 $\Omega \cdot (10 - (1 + y)) \cdot (-y)$
 $\Leftrightarrow 7x^2 = -(1 + y) \cdot (-y)$
 $\Leftrightarrow 7x^2 = y + 8y - y^2$
 $\Leftrightarrow y^2 - 8y - (5 + 7x^2) = 0$
 $\Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot (5 + 7x^2)}}{2}$
 $\Leftrightarrow y = 4 \pm \sqrt{25 + 7x^2}$
 $\Leftrightarrow y = 4 - \sqrt{25 + 7x^2}$
 (из условия $y < 4$ и $OD + y < 5$)
 " "
 (DF секущая, если $AB \perp EO_1$,
 но $AD = AB$) $D = C$ и $AE = AB$)

FC по теор. мур = $\sqrt{(5 + \sqrt{25 + 7x^2})^2 - 1} = FC = \sqrt{(4 + \sqrt{25 + 7x^2})^2 - 1}$
 $= \sqrt{5 - 25 + 7x^2 - 10\sqrt{25 + 7x^2} + 1} = 1$

$\angle EAO_1 = \angle EBO_1$ (один кр. угол, вертикал.)
 $\angle O_1EB = \angle O_1AB$ (один кр. угол, вертикал.)
 $\triangle ACO_1 \sim \triangle O_1BE$ (по двум углам и катету)

по теор. мур $\sqrt{AC} \cdot \sqrt{CB} = 1 \Rightarrow AC \cdot CB = 1$

FC по теор. мур $\triangle O_1CF$
 $(7x + FC) \cdot (x - FC) = 1 \Leftrightarrow 7x^2 - 7x \cdot FC + FC^2 - FC^2 = 1 \Leftrightarrow 7x^2 - 7x \cdot FC = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

$$x \leq 1$$

$$2x^2-2x+1 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1} \quad \text{орз}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+3 = 1 + 2x^2+2x+1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7x+2 = 2\sqrt{2x^2+2x+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49x^2+4-28x = 4 \cdot (2x^2+2x+1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41x^2-36x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{36}{41} \end{cases}$$

$$\text{орз: } \begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (2x-3) \geq 0 \\ 2 \cdot (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus (1; \frac{3}{2})$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 0; \frac{2}{7}; \frac{36}{41} \right\} \quad \text{проверим корни:}$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{1} = 2 - 0 = \text{комб}$$

$$\sqrt{2 \cdot \left(\frac{36}{41}\right)^2 - 5 \cdot \frac{36}{41} + 3} + \sqrt{2 \cdot \left(\frac{36}{41}\right)^2 + 2 \cdot \frac{36}{41} + 1} = 1 \quad \text{комб}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{7} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ЗАДАЧА N 4

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &\Leftrightarrow a \\ 2x^2 + 2x + 1 &\Leftrightarrow b \end{aligned} \quad (*)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad (***)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \quad (***) \quad \text{цел. чл.}$$

~~Заметим, что как ОДЗ $\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{cases}$~~

~~ОДЗ:~~

~~$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$~~

~~$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot (x-1) \cdot (x-\frac{3}{2}) \geq 0 \\ 2 \cdot ((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus (1; \frac{3}{2})$$~~

~~$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1)} = 1 \quad (***)$$~~

~~$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 4 = -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1)} \quad (***)$$~~

~~$$\Leftrightarrow (4x^2 - 3x + 4)^2 = 4 \cdot (2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1) \quad (***)$$~~

~~$$\Leftrightarrow 16x^4 + 9x^2 - 9 - 18x + 24x^2 - 24x^3 = 16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12$$~~

~~$$\Leftrightarrow 33x^3 + 25x^2 - 22x - 41x^2 - 22x - 3 \Leftrightarrow 41x^2 - 22x - 3 \Leftrightarrow$$~~

~~$$\Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41}}{82} \quad \Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82}$$~~

~~Углубим $2x^2 - 5x + 3$ - парабола с ветв. вверх, укажем мин. значение в вершине.~~

~~если $x > \frac{3}{2}$, то $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > \sqrt{2x^2 + 2x + 1} >$~~

~~$$> \sqrt{2(\frac{3}{2})^2 + 2 + 1} > 1$$~~

~~если $x \leq 1$, то сох. чл. цел. чл.~~

② если $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow$

$7x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$

$\frac{2}{7}$ - корень ур-ния (онк в ОДЗ) ~~на +~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА N5

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$$

① ~~$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) = (15 - (-12)) = 27$~~

т.д. $(x_2 - x_1) \in [-27; 27] \Rightarrow 2 \cdot (x_2 - x_1) \in [-54; 54]$ число делится на 2

$$(y_2 - y_1) \in [-24; 24]$$

вариант:	$2 \cdot (x_2 - x_1)$	$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$
	-12	24	-6
	-10	22	-5
	-8	20	-4
			⋮
	36	-24	18

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

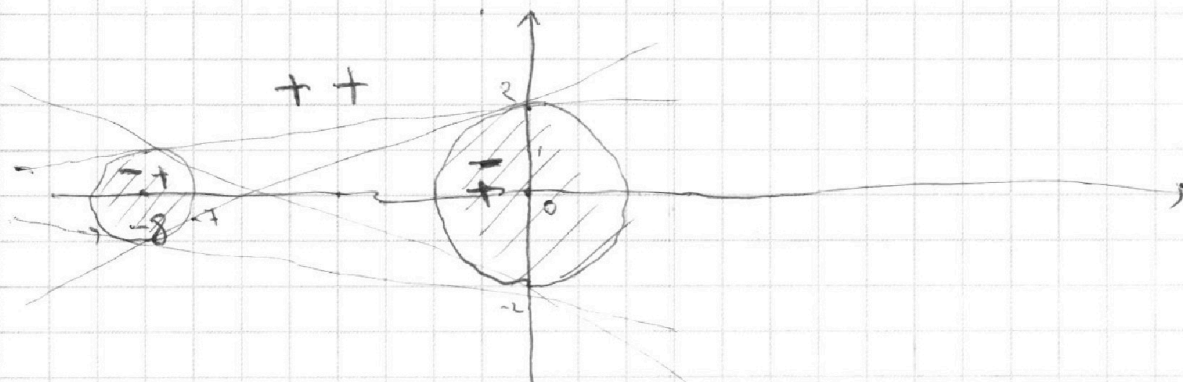
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ЗАДАЧА 6



$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$ - окружность центр: $(-8; 0)$ $R = 1$

$x^2 + y^2 - 4 = 0$ - окружность центр: $(0; 0)$ $R = 2$

неравенство $((x+8)^2 + y^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ означает

то что окружности касаются на границе окружностей

и так как касаются от одной стороны окружностей.

касание - и окружностей, и от обеих сторон. и касание

если касание имеет касательная имеет касательную 2 решения $\Rightarrow ax - y + 10b = 0$ - касательная для обеих окружностей

$ax - y + 10b = 0 \Leftrightarrow y = ax + 10b$

~~$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4$~~

~~$\Leftrightarrow 16x = -68 \Leftrightarrow x = -\frac{68}{16} = -\frac{17}{4}$~~

$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$
 $x^2 + y^2 - 4 = 0$
 $\Rightarrow x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4$
 $\Leftrightarrow 16x = -67 \Leftrightarrow x = -\frac{67}{16}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



касательная к окружности всего парами а касательная
касательная и касательная

касательная касательная для левой стороны

$$\left. \begin{aligned} y &= cx + d \\ (x+8)^2 + y^2 - 14 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

касательная касательная

$$\left. \begin{aligned} y &= Ex + F \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned} \right\}$$

и касательная касательная, когда $c = E, F = d$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y^2 - 8y - (9 - 7x^2) = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot (9 - 7x^2)}}{2} = 4 \pm \sqrt{16 + 9 - 7x^2} =$$

$$= 4 \pm \sqrt{25 - 7x^2}$$

⚠ $\sqrt{a^2} = |a|$

$$y = 4 - \sqrt{25 - 7x^2} \quad \text{из условия}$$

$$4 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

5x = 2 * a * b
b = 5 / (2 * a)

$$\sqrt{\left(\sqrt{2}x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 > 0 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{15}{2} + \frac{6}{2}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) > 0 \quad \frac{3}{2} - \frac{15}{2}$$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$
" "
 $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (a - b)$
 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1$

$$2x^2 + 2x + 1 > 0$$

$$-2 \pm \sqrt{4 - 8}$$

$$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2 \cdot \left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) = 2 - 7x$$

$$= 2 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x) + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{3}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = (2 - 7x)^2 + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 2 \cdot (2 - 7x)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 - (2 - 7x)^2 - 2x^2 - 2x - 1 = \left(4 - 14x\right) \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$(x - 1) \cdot (2x - 3) = 2x^2 - 2x - 3x + 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

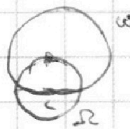
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

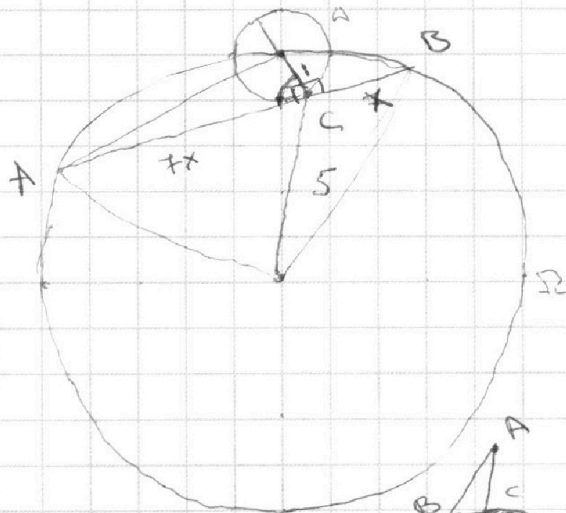
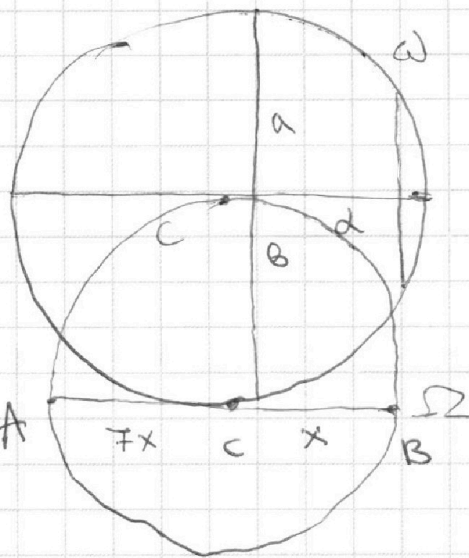
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



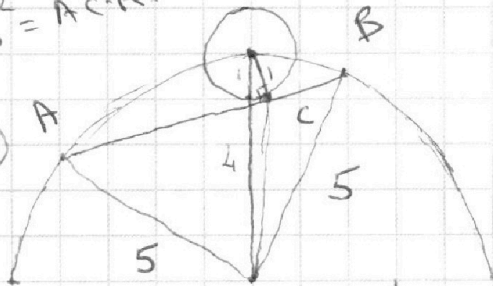
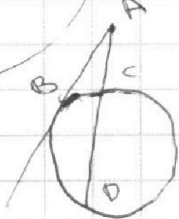
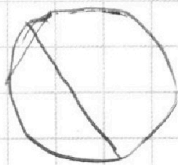
3



$$\left. \begin{array}{l} 4-3 \quad 12 \\ 5-5 \quad 15 \\ 6 \quad 6 \end{array} \right\} 33$$

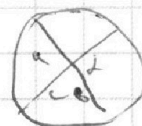


$$AB^2 = AC \cdot AD$$



$$ab = cd$$

$$y^2 - 8y - 9 + 7x^2 = 0$$



$$7x \cdot x = (9 - y) \cdot (1 + y)$$

$$7x^2 = 9 + 8y - y^2$$

$$y^2 - 8y - 9 + 7x^2 = 0$$

$$y = 8 \pm \sqrt{64 - 4(7x^2 - 9)}$$

$$y =$$

$$\left(5 - \sqrt{25 - 7x^2} \right) \cdot \left(-\sqrt{25 - 7x^2} \right) = 7x^2$$

$$\left(1 + \left(4 - \sqrt{25 - 7x^2} \right) \right) \cdot \left(4 - \left(4 - \sqrt{25 - 7x^2} \right) \right) = 7x^2$$

$$-5\sqrt{25 - 7x^2} + 25 - 7x^2 = 7x^2$$

$$14x^2 = 25 - 5\sqrt{25 - 7x^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}, \quad bc: 2^{17} \cdot 7^{17}, \quad ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\min(a \cdot b \cdot c) = ?$$

$$\forall k, l \in \mathbb{N} \quad kl \geq m \Rightarrow kl \geq m$$

$$\min(a \cdot b) = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$\min(b \cdot c) = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$\min(ac) = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\Rightarrow \min((a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (a \cdot c)) = 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37} =$$

$$= 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow \min(a$$

$$x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{N} \quad x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{N}$$

$$a = 2^{x_1} \cdot 7^{y_1} \cdot 7^{z_1}$$

$$b = 2^{x_2} \cdot 7^{y_2} \cdot 7^{z_2}$$

$$c = 2^{x_3} \cdot 7^{y_3} \cdot 7^{z_3}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 14 \\ x_2 + y_2 = 10 \\ y_1 + z_1 = 17 \\ y_2 + z_2 = 17 \\ x_1 + z_1 = 20 \\ x_2 + z_2 = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 14 \\ x_1 - y_1 = 20 - 17 \\ x_2 + y_2 = 10 \\ x_2 - y_2 = 37 - 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 14 + 3 \\ 2x_2 = 10 + 20 \\ x_1 + z_1 = 20 \\ x_1 + y_1 = 14 \\ x_2 + z_2 = 37 \\ x_2 + y_2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 8,5 \\ x_2 = 15 \\ z_1 = 11,5 \\ y_1 = 5,5 \\ z_2 = 22 \\ y_2 = -5 \end{cases}$$

$$\frac{10 + 17 + 37}{2} = 32$$

$$x_1 + y_1 + z_1 = 26$$

$$x_2 + y_2 + z_2 = 32$$

$$\min((abc)^2) > 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 15 \\ x_2 + y_2 = 10 \\ y_1 + z_1 = 17 \\ y_2 + z_2 = 17 \\ x_1 + z_1 = 21 \\ x_2 + z_2 = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - z_1 = -2 \\ x_1 - z_1 = 21 \end{cases}$$

$$a + b \geq 14$$

$$b + c \geq 17$$

$$a + c \geq 20$$

$$2(a + b + c) \geq 51$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = d_1 \\ x_2 + y_2 = d_2 \\ y_1 + z_1 = d_3 \\ y_2 + z_2 = d_4 \\ x_1 + z_1 = d_5 \\ x_2 + z_2 = d_6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^{14} \cdot 7^{10} & a &= 2 \cdot 7^{17} \\ b &= 1 & b &= 2 \cdot 7^5 \\ c &= 2^{17} \cdot 7^{37} & c &= \end{aligned}$$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$(a+b+c) \geq \frac{51}{2}$$

$$abc \geq 7 \cdot 2^{20}$$

$$a, b, c \in \mathbb{N}_0 \quad a + b + c \geq 26$$

$$a = 2^{17} \cdot 7^{19}$$

$$b = 1$$

$$c = 7^3 \cdot 8$$

$$a = 7^{10} \cdot 2^3 \cdot 12$$

$$c = 7^3 \cdot 2^3 \cdot 6$$

$$b = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2. $\frac{a}{b}$ - несократ. ($a, b \in \mathbb{N}$)

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

max m : $\begin{cases} a+b \equiv m \\ a^2-6ab+b^2 \equiv m \end{cases}$

$$2 \cdot ((x-1,25)^2 - 0,625)$$

$\frac{a}{b}$ - не сократ \Rightarrow НОД(a, b) = 1 $2 \cdot (x^2 - 2,5x + 1,25 - 0,625)$

$$\frac{(a+b)}{(a^2-6ab+b^2)} = \frac{(a+b)}{(a-b)^2 - 4ab} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 8ab} \Rightarrow 8ab \equiv m$$

$$\frac{3}{7}$$

~~$$\frac{3+7}{3^2-6 \cdot 3 \cdot 7+7^2} = \frac{10}{9-49} = \frac{10}{-40} = -\frac{1}{4}$$~~

~~$$\frac{2}{3}$$~~

~~$$\frac{2+3}{2^2-6 \cdot 2 \cdot 3+3^2} = \frac{5}{4-36} = \frac{5}{-32}$$~~

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{m}{m}$$

$$\begin{cases} a \equiv m \\ b \equiv m \end{cases} \text{ - не верно}$$

$499 = 50 \cdot 9 - 9$

$$\frac{100}{101} = \frac{100+99}{100+99-100 \cdot 99 - 6} = \frac{199}{199-8 \cdot 100-99}$$

$$\frac{201}{102} = \frac{201}{102-6 \cdot 100-101} = \frac{201}{-597}$$

$$\frac{20}{201} = \frac{20}{201-8 \cdot 100-101} = \frac{20}{-599}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2 \cdot (x^2 - 2,5x + 1,5) = 2 \cdot (x^2 - 2 \cdot 1,25 \cdot x + 1,5625 - 0,625)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2-5x+3} = \frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{2} : \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = -0,125$$

$$x \in (-\infty; 1]$$

$$(x-1) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

но не

$$\frac{2}{1} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Верши: $(1,25; -0,125)$ Верши: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$$\frac{10}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{2}{7} \cdot 5x + 3$$

go 1,25

$$\frac{2}{7} \cdot 2x + 1$$

am 1,25 go

$$7x = 2$$

$$x = 3,5$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

$$2 \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{35}{2} + 3 = \frac{49}{2} - \frac{35}{2} + \frac{6}{2} = \frac{10}{2}$$

$$2 \sqrt{\frac{49}{2} + \frac{6}{2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(4x^2 - 3x + 3) \cdot (4x^2 - 3x + 3) =$$

$$= 16x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 12x^3 + 9x^2 - 9x + 12x^2 - 9x + 9 =$$

$$= 16x^4 + 9x^2 + 9 - 18x + 24x^2 - 24x^3$$

$$(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1) =$$

$$= 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3 =$$

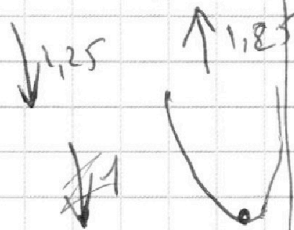
$$= 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 6x + 3$$

$$22 + 12 \cdot 41$$

$$2 \cdot (x^2 - 2,5x + 3)$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1484 \\ \times 492 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$976 = 2$$

$$\begin{array}{r} 976 \overline{) 244} \\ \underline{-8} \\ 17 \\ \underline{-16} \\ 16 \end{array}$$

$$4 \cdot 244 = 122$$

$$12$$

$$\begin{array}{r} 244 \\ \times 4 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$4 \cdot 4 \cdot 3 = 61,2$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times 96 \\ \hline 366 \\ 549 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$960 - 96 \cdot 60 + 96$$

121

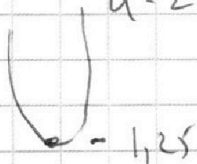
$$976$$

$$244 = 2 \cdot 122$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 3 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$-\frac{D}{4a}$$

$$-\frac{1}{8}$$



$$4 \cdot 2 \cdot 122 = 4 \cdot 4 \cdot 61$$

$$\sqrt{1,25} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}{8}$$

$$-0,125$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$x \leq 1$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow 2x \cdot (x+1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$x \in [0; 1]$$

$$(1, 25, -0, 125)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\uparrow \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$$

$$\uparrow (-\infty, 1, 25)$$

$$x \in [-1, 0]$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$(x+3)^2 - 8^2 - 1 \cdot (x^2 + y^2 - 4)$$

$$\begin{matrix} \text{пусть } 1 \\ -4, 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{пусть } 2 \\ 0, 0. \end{matrix}$$

$$x \in [-1, 0]$$

$$2x^2 - 5x + 3 = \left(1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right)^2$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{36 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$-7x + 2 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\sqrt{31} - \sqrt{1} = 2$$

$$x \cdot (41x - 36) = 0$$

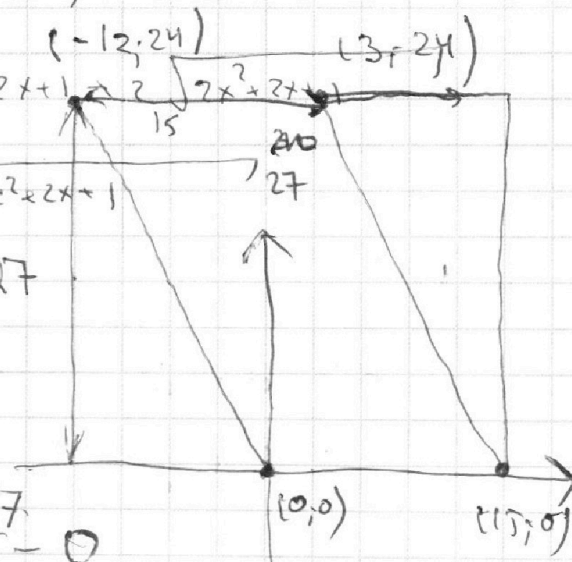
$$x = \frac{36}{41}$$

$$\begin{matrix} 27 \\ 27 - 0 \\ 27 - 0 \end{matrix}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2 \cdot (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$\begin{matrix} y_2 = y_1 \\ x_2 - x_1 = 6 \end{matrix}$$



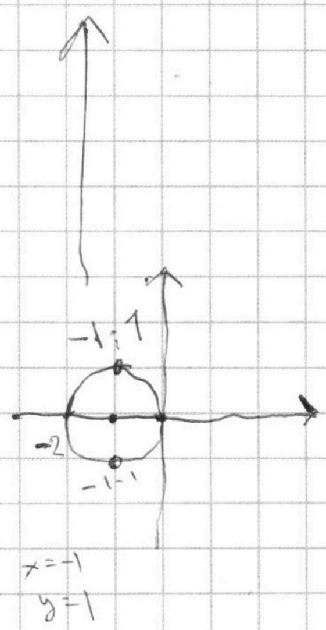
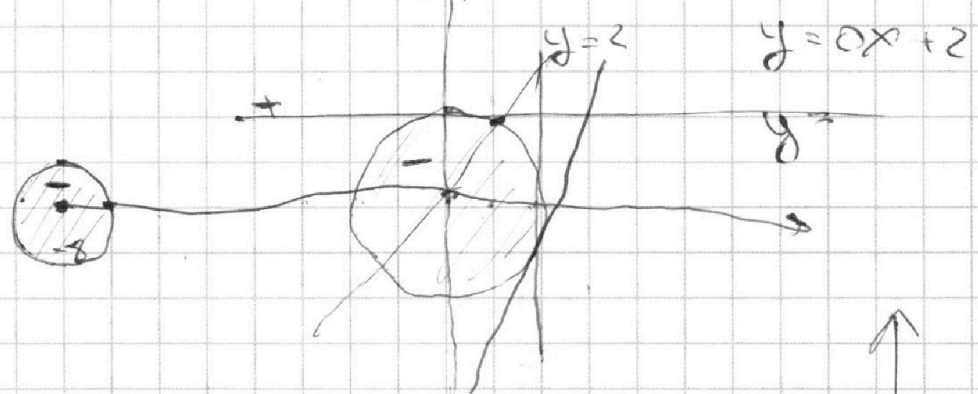
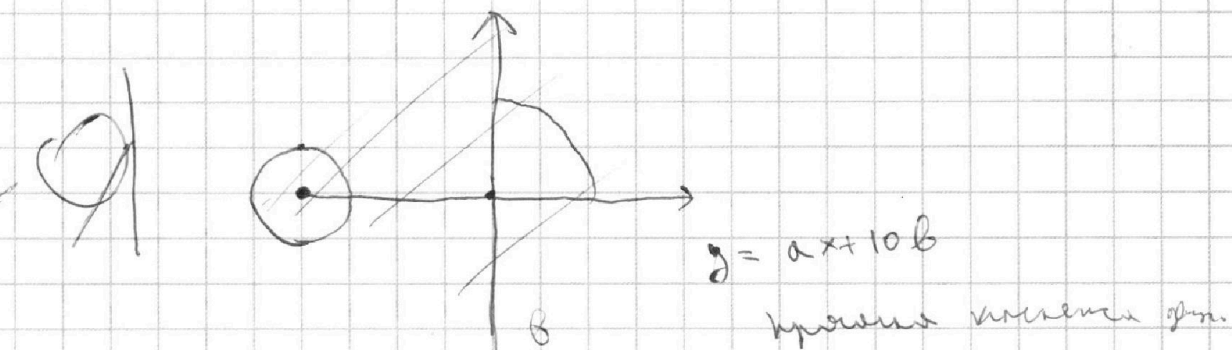
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



касательная 1

$$\left. \begin{aligned} & \text{касательная} = y = cx + d \\ & (x+8)^2 + y^2 = 1 \quad (*) \end{aligned} \right\}$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$