



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① 1) Заметим, что если  $\exists k \in \mathbb{N}: k \geq 1, k \neq 2, k \neq 3$   
 $a: k^{\alpha} \cdot 7^{\beta}; b: k^{\gamma} \cdot 7^{\delta}; c: k^{\epsilon} \cdot 7^{\zeta}$ , то мы можем  
 заменить числа на  $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}$  или  $\frac{c}{k}$ , и от этого условие не  
 перестанет выполняться. То есть ~~то~~ все числа пред-  
 ставим в виде  $2^x \cdot 7^y$ .

$$\begin{aligned} 2) \text{ I)} \quad & a = 2^{\alpha} \cdot 7^{\beta} & ab &= 2^{(\alpha+\gamma)} \cdot 7^{(\beta+\delta)} = 2^{14} \cdot 7^{10} \Rightarrow \begin{cases} x+d \geq 14 \\ y+\beta \geq 10 \end{cases} \\ & b = 2^{\gamma} \cdot 7^{\delta} & bc &= 2^{(\gamma+\epsilon)} \cdot 7^{(\delta+\zeta)} = 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow \begin{cases} d+k \geq 17 \\ \beta+m \geq 17 \end{cases} \\ & c = 2^{\epsilon} \cdot 7^{\zeta} & ac &= 2^{(\alpha+\epsilon)} \cdot 7^{(\beta+\zeta)} = 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow \begin{cases} x+k \geq 20 \\ y+m \geq 37 \end{cases} \end{aligned}$$

$(x, y, d, \beta, k, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \leftarrow$  все степени  $\geq 0$ , т.к. числа  $a, b, c \in \mathbb{N}$

3)  $abc = 2^{(x+d+k)} \cdot 7^{(m+y+\beta)}$

4) Заметим, что условия по степеням 2 и 7 независимы,  
 т.е. мы можем отдельно минимизировать каждый сомножитель

5)  $\begin{cases} x+d \geq 14 \\ d+k \geq 17 \\ x+k \geq 20 \end{cases} \quad 2(x+d+k) \geq 51$ , т.к. все числа ~~натуральные~~ целые, то  $2(\ )$  - четно и мин. 52.  
 9)  $(x+d+k) \geq \frac{51}{2} = 25,5 \Rightarrow (x+d+k) = 26$

6) Аналогично для 7.

2)  $\begin{cases} y+\beta \geq 10 \\ \beta+m \geq 17 \\ y+m \geq 37 \end{cases} \quad 2(y+\beta+m) \geq 64 \quad m+\beta+y \geq 32$

$abc = 2^{x+d+k} \cdot 7^{m+y+\beta} \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$  по доказанному.

Пример:  $\begin{cases} x=8 \\ d=6 \\ k=12 \end{cases}$

однако, заметим, что решая систему (2), мы получим, что  $y-\beta \geq 20$  в то время как  $y+\beta \geq 10$ , т.е. в примере для минимума

$y \geq 20+\beta, \beta \leq y-20, 10 \leq y+\beta \leq 2y-20 \Rightarrow y \geq 15 \Rightarrow$  но из условия  $\beta \geq 0$  (степени неотрицательны)  $y \geq 20$

$\Rightarrow y \geq 20 \Rightarrow m \geq 17 \Rightarrow \beta \geq 0$  и

$\beta=0, m=17, y=20$  удовлетворяет всем условиям, (при этом показав, потому  $y$  не меньше 20, а сумма  $\beta+m \geq 17$  по усл, при этом все нер-ва выполнены)

Ответ:  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ , при  $\begin{cases} a = 2^8 \cdot 7^{20} \\ b = 2^6 \cdot 7^0 \\ c = 2^{12} \cdot 7^{17} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Чертовик + Построение пример*

$$\begin{aligned} X+d &= 14 \\ d+k &= 18 \\ X+k &= 20 \end{aligned}$$

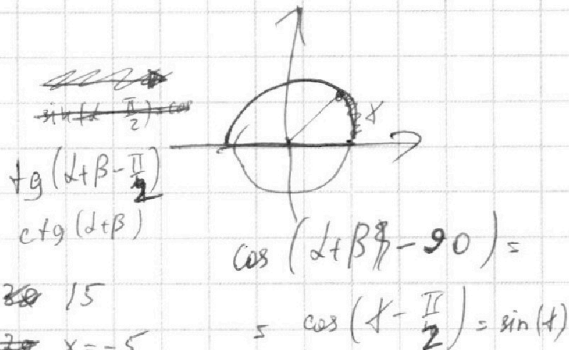
$$\begin{aligned} k-d &= 6 & k &= 12 \\ k+d &= 18 & d &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8+6 &= 14 \\ 12+6 &= 18 \\ 12+8 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y+\beta &= 10 \\ \beta+m &= 17 \\ y+m &= 37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m-\beta &= 2 \\ y-\beta &= 20 \\ y+\beta &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 15 \\ x &= -5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta - 90) &= \\ &= \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin(\alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{4x}{5} = \frac{1}{\sqrt{7x^2+1}}$$

$$\frac{4x}{5} = \frac{1 - 7x^2}{\sqrt{7x^2+1}}$$

$$4x \cdot \left( \frac{4}{7} + \sqrt{25 - 4x^2} \right) = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \sqrt{16x^2 + \frac{16}{7}}$$

$$\frac{7x}{1} = \operatorname{tg} \alpha \quad \frac{x}{4} = \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 7 \operatorname{tg} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{7 \operatorname{tg} \beta}{1 - 7 \operatorname{tg}^2 \beta}$$

$$\frac{4x}{h} = \frac{1 - 7x^2}{7x}$$

$$\frac{28x^2}{h} = 1 - 7x^2$$

$$h = \frac{28x^2}{1 - 7x^2} \quad 1 - 7x^2 \geq 0$$

$$\frac{(28x^2)^2}{(1 - 7x^2)^2} + 16x^2 = 25$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{7 \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta}{1 + 7 \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{6 \operatorname{tg} \beta}{1 + 7 \operatorname{tg}^2 \beta}$$

$$(28t)^2 + 16t(1 - 7t)^2 = 25(1 - 7t)^2$$

$$28^2 t^2 + 16t + 49 \cdot 16 t^3 - 2 \cdot 16 t \cdot 7t^2 =$$

$$28 \cdot \frac{7}{16} (35t)^2 + 25 - 350t - 16 \cdot 49 t^3 - 16t - 16 \cdot 14 t^2 = (28t)^2$$

$$\frac{28 \cdot 16}{9 \cdot 16} \frac{28}{9} + 16 \cdot 49 t^3 - 451 t^2 - 224 t^2 + 366 t - 25 = 0$$

$$1 - 7x^2$$

$$\frac{4x}{h} = \frac{7x}{1 - 7x^2}$$

$$\frac{7}{4} h = 1 - 7x^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2

$$1) \frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$2) \exists m: m\text{-макс и } \begin{cases} (a+b) \equiv_m 0 \\ (a^2 - 2ab + b^2) \equiv_m 0 \end{cases}$$

$$3) a \equiv_m -b \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \equiv_m (-b)^2 - 2(-b)b + b^2 \equiv_m 8b^2 \equiv_m 0.$$

4) Имеем 3 условия  $\begin{cases} 8b^2 \equiv_m 0 \\ a \equiv_m -b \\ \text{НОД}(a,b) = 1 \end{cases}$   $\exists m = 8 \cdot k$ , где  $k \geq 1$ , тогда по т.ч.  $8b^2 \equiv_m 0$ , то  $b^2$  кратно  $k$ . (т.е.  $b^2 = k \cdot x$ )

$(\exists) d, k, x, m \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $a \equiv_m -b \Leftrightarrow a^2 \equiv_m b^2 \quad a^2 \equiv_m k \cdot x$

$a^2$  также кратно  $k$ .  $\begin{matrix} k+1 \\ a^2 \div k \\ b^2 \div k \end{matrix}$   $\Rightarrow$  тогда  $\text{НОД}(a,b)$  не равен единице.

~~то~~ это противоречит условию.  $\Rightarrow$  предполож. неверно и  $m \neq 8k$ , где  $k \geq 1 \Rightarrow m \neq 8$ . т.е.  $m \leq 8$

Пример для  $m=8$ :

$b=1, a=7$ .  $\frac{8}{49 - 42 + 1} = \frac{8}{8} = 1 \quad m=8. \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{7}$  - несократимо

Ответ:  $m=8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

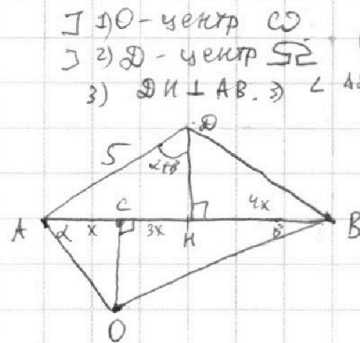
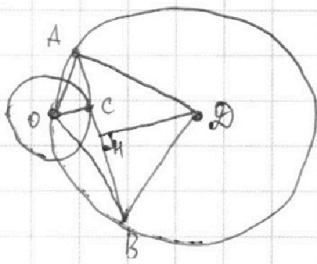
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3



1)  $O$  - центр  $\odot$   
 2)  $D$  - центр  $\odot$   
 3)  $OH \perp AB \Rightarrow \angle AOH = \angle BOH$ ;  $AO = BO = 5$   
 $(\triangle AOB - \text{равн.}, \text{т.к. } AO = BO = 5)$   
 $AO = BO = \frac{AB}{2}$  (св. ва равн.  $\triangle$ )

1)  $\angle AC = x$

2)  $\Rightarrow BC = 7x \Rightarrow HB = AH = 4x$

3)  $\angle OAB = \alpha$   
 $\angle ABO = \beta$

$\checkmark AB = 2\alpha + 2\beta$  (св. ва внеш. углов)

$\Rightarrow \angle ADB = 2\alpha + 2\beta$  (центр углов)

4)  $\Rightarrow \angle AOH = \angle BOH = \frac{\angle AOB}{2} = \alpha + \beta$  (DH - диаметр)

5)  $\text{ctg } \alpha = \frac{x}{4x}$ ,  $\text{ctg } \beta = 7x$

6)  $\text{ctg } \angle AOH = \frac{OH}{AH} = \frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{4x} = \text{ctg } (\alpha + \beta) = \frac{\text{ctg } \alpha - \text{ctg } \beta}{\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta} =$

$$= \frac{7x^2 - 1}{8x}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{25 - 16x^2} = 7x^2 - 1$$

$$100 - 64x^2 = 49x^4 - 14x^2 + 1$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, \text{ т.к. } x > 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{-99}{49} \notin \mathbb{R} \Rightarrow AB = 8x = 8 \text{ Ответ: } AB = 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④  $\exists$   ~~$2-7x=a$~~   $\Rightarrow$  ур-е можно записать в виде.  
 ~~$2x^2+2x+1=b$~~

$$\sqrt{b+a} - \sqrt{b} = a.$$

(x) видно, что при  $a=0$  ур-е верно. ( $\sqrt{b} - \sqrt{b} = 0$ ). *Домножим на сопряженные к левой части.*

~~$$b+a+b-2\sqrt{b^2+ab}=a^2$$~~

~~$$2-\sqrt{(b^2+ab)} = a^2+2b$$~~

*Заметим, что под корнем у нас  $\sqrt{b^2+ab}$  — квадратная форма.*

*Заметим, что под корнем у нас  $\sqrt{b^2+ab}$  — квадратная форма.*

решение 1:  $a=0$

решение 2:  $a=1$   $\sqrt{2-5+3} - \sqrt{2+2+1} = 2-4 \neq b$

~~$$b^2+ab = (2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)$$~~

~~$$a^2+2b = 2-7x-4x^2-4+4x+2x^2+2x+1 = -4x^2+9x-1$$~~

$$(\sqrt{b+a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{b+a} - \sqrt{b}) = a \cdot (\sqrt{b+a} + \sqrt{b})$$

*преобр равновесию, т.к.  $\sqrt{b+a} + \sqrt{b} > 0$*

$$(\sqrt{b+a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a \cdot (\sqrt{b+a} + \sqrt{b})$$

$$a = a(\sqrt{b+a} + \sqrt{b})$$

$$\Rightarrow \sqrt{b} + \sqrt{b+a} = 1$$

~~$$\sqrt{b} = 1 - \sqrt{b+a}$$~~

~~$$b = 1 - a - b$$~~

$$\sqrt{b} = 1 - \sqrt{b+a}$$

$$b = a + b + 1 - 2\sqrt{b+a}$$

~~$$a+1 = 2\sqrt{b+a}$$~~

~~$$a^2 + 2a + 1 = 4a + 4b$$~~

~~$$(3-7x)^2 = 4(2x^2-5x+3)$$~~

~~$$49x^2 - 42x + 9 - 8x^2 + 20x - 12 = 0$$~~

~~$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$~~

~~$$D = 121 + 3 \cdot 41 = 121 + 123 = 244 = 4 \cdot 61$$~~

~~$$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$~~

$b > 0$   $\Leftrightarrow$  при  $\forall x$

$$b+a = 2x^2-5x+3 = (2x-3)(x-1) > 0 \Rightarrow x < 1 \vee x > \frac{3}{2}$$

$$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \approx 1$$

$$2\sqrt{61} \approx 30$$

$$\sqrt{61} \approx 15$$

$$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \approx \frac{3}{2}$$

$$22+4\sqrt{61} \approx 123$$

$$\sqrt{61} \approx 24$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

итак. Зрешения.

$$a=0 \Rightarrow 2-7x=0 \quad x=\frac{2}{7}$$

$$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} > \frac{3}{2} \text{ (не подходит, это)}$$

и ограничения ( $b > 0$ , т.н.  $\sqrt{\quad}$  существуют)

$$b > 0 \text{ при } \forall x, \quad a+b > 0 \text{ при } \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \quad \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} < 1$$

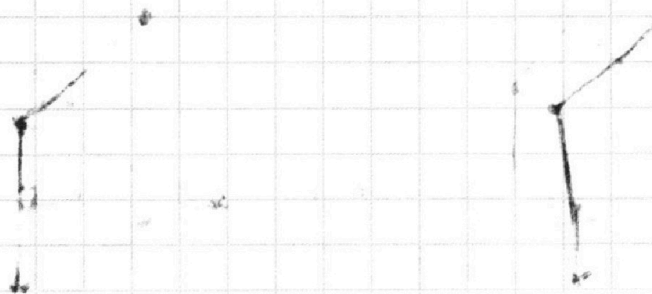
$$2\sqrt{61} < 41 - 11 = 30$$

$\Rightarrow$  оба числа корни.

$$\sqrt{61} < 15 = \sqrt{225}$$

Ответ:  $x = \frac{2}{7}$  (тоже подходит)

$$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6)  $(x - (-8))^2 + y^2 - 1 \leq 0$   
 $(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x + 8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

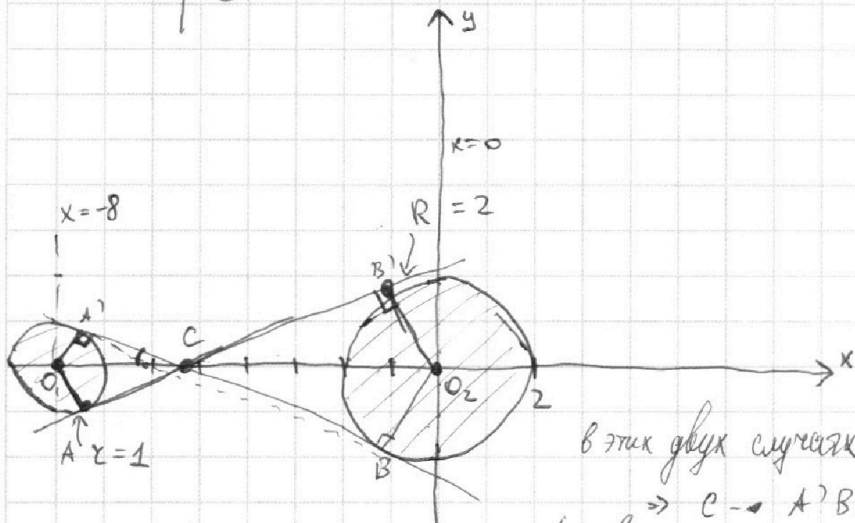
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ (x + 8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

это окруж. нарисуем и отметим соотв области.

если такие а есть, то прямая

$$y = ax + b$$

общая — это касательная этих окруж.



в этих двух случаях  $\Delta$ -ки.  $\triangle CA'O_1$  равны.

$\rightarrow C \rightarrow A'B \perp AB \Rightarrow C_x = 0$

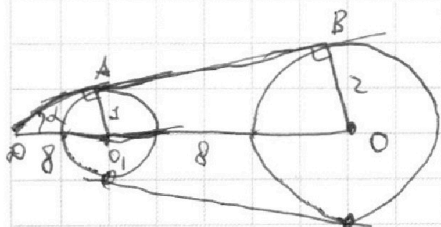
$\triangle O_1A'C \sim \triangle O_2BC, k = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{O_1C}{CO_2} = \frac{O_1A'}{O_2B'} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\frac{O_1C}{8 - O_1C} = \frac{1}{2} \Rightarrow O_1C = \frac{8}{3}$

Тогда для пр-й A'B ур-е имеет вид  $y = ax + k$ , где

$a = \text{tg} \angle A'CO_2 = -\text{tg} \angle A'CO_1 = -\frac{O_1A'}{A'C} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{64}{9} - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{55}{9}}} =$

$= -\frac{3}{\sqrt{55}}$  (или также пойдет противоположная  $a = \frac{3}{\sqrt{55}}$ , т.к. они задают две общие внутр. касательные (AB'))



$\triangle ABO_1 \sim \triangle O_2BD, \Rightarrow \frac{AO_1}{O_1D} = \frac{O_2D}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{64-1}} = \frac{O_2D}{BD} \Rightarrow O_2D = \frac{BD}{\sqrt{63}} = \frac{BD}{3\sqrt{7}}$

AB имеет ур-е прямой  $y = ax + k, a = \text{tg} \angle BAO_1 = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

также подходит  $a = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$ , он задает противоположную внешн. кас-ю

A'B'. других а нет, т.к. общие кас-ю окруж-тей всего 4. Ответ:  $\pm \frac{\sqrt{7}}{21}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ:  $\pm \frac{\sqrt{21}}{21}$   
 $+ \sqrt[3]{\frac{55}{55}}$

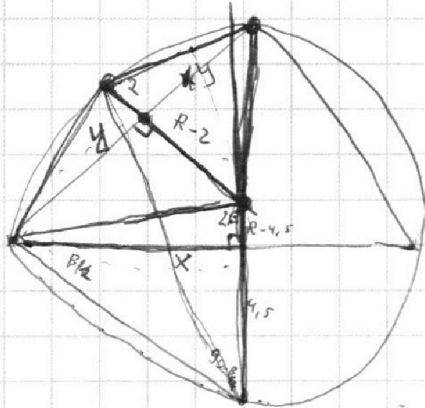
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \cancel{\text{tg } \beta} &= \frac{2}{x} \\ \text{tg } \beta &= \text{tg } \beta = \frac{2}{x} \\ \text{tg } 2\beta &= \frac{2 \cdot \frac{2}{x}}{1 - \frac{81}{x^2}} = \frac{4}{R - \frac{2}{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{36}{4 - \frac{81}{x^2}} = \frac{2x}{R - 2}$$

$$(9R - 81)(36) = 2x \left( \dots \right)$$

$$(9R - 81) \cdot 4 = 2x \left( 4 - \frac{81}{x^2} \right)$$

$$\left( \frac{81}{4} - x^2 - 81 \right) \cdot 2 = \left( 4x - \frac{81}{x} \right)$$

$$(81 - 4x^2 - 324) = \left( 8x - \frac{81 \cdot 2}{x} \right)$$

$$4x^2 - 243 = 8x - \frac{162}{x}$$

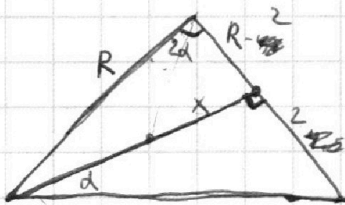
$$4x^3 - 8x^2 - 243x + 162 = 0$$

$$4 \cdot 8 - 8 \cdot 4 = 0$$

$$4 \cdot 216 - 8 \cdot 36 - 243 \cdot 6 = 0$$

~~...~~

$$x^2 = \frac{81}{4} - 9R$$



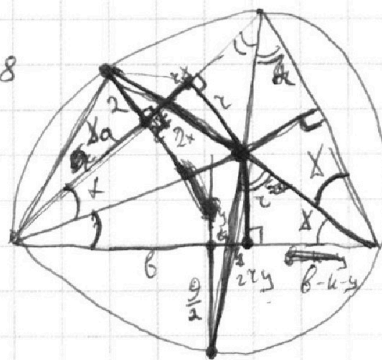
$$\text{tg } \alpha = \frac{2}{x}$$

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{4/x}{1 - \frac{16}{x^2}} = \frac{x}{R - 2}$$

$$\frac{4/x \cdot x^2}{x^2 - 16} = \frac{4x}{4R - 8}$$

$$\frac{4x}{x^2 - 16} = \frac{4x}{4 - x^2 - 8}$$

$$x^2 = 4 - 4R$$



$$\cancel{a + x(2+x) = b}$$

$$a + 2x + x^2 = b + 2y + 2xy$$

$$(a + 2x + x^2) + x^2 = \dots$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b - 2y - 2xy}{x}$$

$$\left( \frac{ax}{2} \right)^2 + x^2 = d^2$$

$$\frac{ax}{2} = 2a + 2x + 2xy$$

$$= \frac{a + 2x + 2xy}{x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

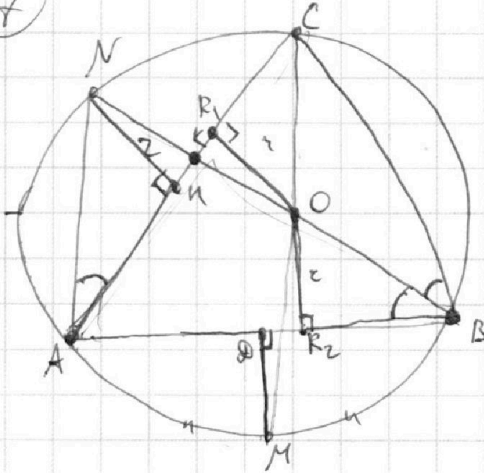
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



7



1)  $BN$  - диаметр, т.к.  $\sphericalangle NAC = \sphericalangle NAB$   
 $CM$  - диаметр

2)  $BN \perp CM = O$   
 $AO$  - диаметр  $P$ - $Q$  (По л.я. диаметра - центр сферы)  $PN \perp CM$

$\sphericalangle NAC = \sphericalangle OBA$  (на  $\sphericalangle NAC$ )

3)  $OR_1 \perp AC$      $OR_1 = OR_2 = r$   
 $OR_2 \perp AB$

4)  $AR_1 = AR_2$  (отрезки кас-х)

5)  $\sphericalangle NAC = \sphericalangle OBA$ , т.к.  $\sphericalangle NAC = \sphericalangle NAB$ , то  $\sphericalangle OBA = \sphericalangle NAC$

6)  $\frac{NH}{AH} = \frac{OR_2}{BR_2} = \frac{OR_2}{BR_2}$

$\triangle ANH \sim \triangle OR_2B$

$\frac{2}{AH} = \frac{r}{R_2B}$ , аналогично

$\frac{9}{2AD} = \frac{r}{R_1C}$

$\Rightarrow \frac{2R_2B}{AH} = \frac{9 \cdot R_1C}{2AD} = 2r$

(найти надо)

7)  $M \oplus N$ ,  $NH$  - сеп-тис, т.к.  $M, N$  - середины дуг.

8)  $\frac{9}{2} \supset BN \cap AC = K$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



②  $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a^2}{b^2}-6\frac{a}{b}+1} \cdot \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} = \frac{b+1}{b^2-6b+1}$

$b^2-6b+1 = k(b+1) \quad 1400-31$

$b^2 - (6+k)b + (1-k) = 0$

$b^2 - 6ab + a^2 = m(a+b)k$

$b^2 - b(6a+k) + (a^2 - ak) = 0$

$D = 36a^2 + k^2 - 12ak - 4a^2 + 4ak = 32a^2 - 8ak + k^2$

$(4a^2 - k)(8a + k)$

$\frac{1+1}{1+1-6} = \frac{1+b}{b^2-6b+1} = \frac{1+k}{49-42+1} = 1$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = a \equiv -b$

$8b^2 \equiv 0$

$a \equiv -b$

$8a^2 \equiv 8b^2$

$a^2 - 6ab + b^2 \equiv b^2 + 6b^2 + b^2 = 8b^2 \equiv 0$

$9 \neq 2 \quad b = a = 9$

$389 = 350 + 39$

$340 + 49$

$\frac{9+9}{81-6 \cdot 81+81} = \frac{18}{81 \cdot (-4)}$

$8b^2 \equiv 0$

$a \equiv -b$

$m = 8$

$b \rightarrow 7$

$a \rightarrow 7$

$m > 8 \quad b^2 \equiv 0$

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

$a = m \cdot k$

$a+b = m \cdot k$

$\frac{a}{8} + \frac{b}{8} = \frac{m \cdot k}{8}$

$360 - 2d - 2B = x$

$8b^2 - 6mb - 2bm + m^2 - mk = 0$

$8b^2 - 8bm + (m^2 - mk) = 0$

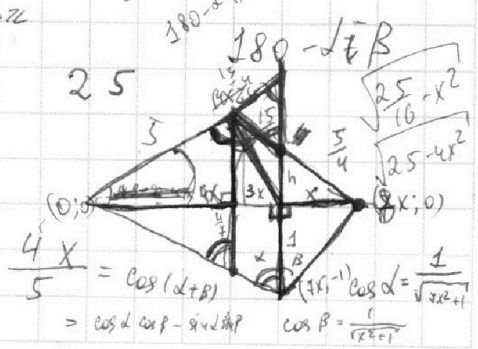
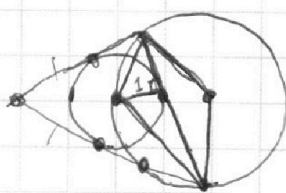
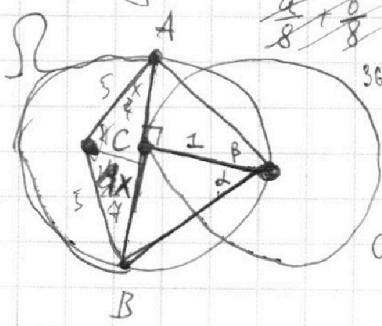
$D = 64m^2 - 32(m^2 - mk) = 32m^2 + 32mk$

$8b^2 \equiv 0$

$b = 3$

$a \equiv -b \equiv 3k$

$a = 24 + 3k$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

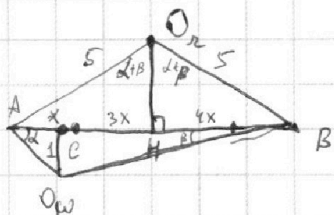
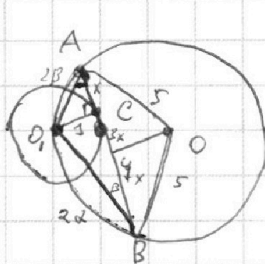
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



1) Соединим  $OA, OB$ .  
 $OA = OB = R_{\Omega} = 5$

2)  $OH \perp AB$  (построим)

3)  $OC \perp AB$  (радиус  $\perp$  к хорде)

4)  $\angle AC = x \Rightarrow CB = 7x \Rightarrow AH = HB = 4x = \frac{AB}{2} \Rightarrow CH = 3x$

5)  $\angle O_{\omega} AC = \alpha, \angle O_{\omega} BC = \beta \Rightarrow \angle A O_{\omega} = 2\alpha \Rightarrow \angle AB = 2\alpha + 2\beta$   
 $\angle B O_{\omega} = 2\beta$

$\Rightarrow \angle A O_{\omega} B = 2\alpha + 2\beta$ , а т.к.  $O_{\omega} H$  - высота в  $\triangle A O_{\omega} B$ , то  $\angle A O_{\omega} H = \beta = \angle B O_{\omega} H = \alpha + \beta$

6)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3x}{4x}, \operatorname{ctg} \beta = \frac{4x}{3x}$

$$\operatorname{ctg} \angle A O_{\omega} H = \frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{4x} = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} - 1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{7x^2 - 1}{8x}$$

$$\frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{4x} = \frac{7x^2 - 1}{8x} \quad \sqrt{100 - 64x^2} = 7x^2 - 1 \quad t = x^2, t > 0, \text{ т.к. } x > 0$$

$$100 - 64t = 49t^2 + 1 - 14t$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad (49 + 50 - 99 = 0)$$

$$\frac{D}{4} = \frac{25^2 + 4 \cdot 49 \cdot 99}{4} = \frac{625 + 490 \cdot 2 \cdot 49}{4} = \frac{625 + 980 \cdot 49}{4}$$

$$= \frac{1556}{4} = 389$$

$$t = \frac{-25 + 2\sqrt{389}}{49} \quad (+, \text{ т.к. } t > 0)$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{-25 + 2\sqrt{389}}{49}} \Rightarrow AB = 8x = \frac{8}{7} \sqrt{-25 + 2\sqrt{389}}$$

$$\frac{D}{4} = \frac{625 + 4900 - 49}{4} = \frac{5000 + 600 - 100 - 49 + 25}{4} = \frac{5476}{4} = 1369$$

$$t_2 = \frac{-99}{49} < 0 \Rightarrow \text{не корни}$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④  ~~$t = 2 - 7x$~~

~~$\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{(2x+1)(x+1)} = 2 - 7x$~~

~~$a = 2x - 3$~~   
 ~~$b = x$~~

~~$\sqrt{(a-2)(x-1)} - \sqrt{(a+2)(x+1)} = 2 - 7x$~~

~~$\sqrt{ax - 2x + a + 2} - \sqrt{ax + 2x + a + 2} = 2 - 7x$~~

~~$t = ax + 2$~~   
 ~~$k = 2x + a$~~

~~$k = 2x + 2x - 1 = 4x - 1$~~

~~$2 - 7x = \frac{t-k}{4} - \frac{t+k}{4} = \frac{1-7k}{4}$~~

~~$t - k - t - k - 2\sqrt{t^2 - k^2} = \frac{49k^2 - 14k + 1}{4}$~~

~~$49k^2 + 18k + 1 = -32\sqrt{t^2 - k^2}$~~

~~$D = 81 - 49 = 32$~~   
 ~~$t = \frac{-9 \pm 4\sqrt{2}}{49}$~~

$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 7x + 2 = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$a = 2 - 7x$

$b = 2x^2 + 2x + 1$

$\begin{cases} b \geq 0 \\ b \geq a \end{cases}$

$\sqrt{b+a} - \sqrt{b} = a \quad (1)$

~~$\sqrt{b+a} = a + \sqrt{b} \Rightarrow (b+a) = a^2 + 2a\sqrt{b} + b \Rightarrow a^2 = 2a\sqrt{b}$~~

~~$b - a = 2\sqrt{b^2 - ab} = a^2$~~

$D = 4 - 8$

~~$a^2 + a = 2\sqrt{b^2 - ab}$~~

$a^2 = 49x^2 - 14x + 4$

$24 + \frac{1}{2} - 4$

если Эйлера, то либо оба 0, либо  $a^2 + a < 0 \Rightarrow (-1; 0)$

~~$a = 0 \Rightarrow 0 = 2\sqrt{b^2} = 2|b| = 2b$~~

$a^2 = 48x^2 + 48x + 24 +$

$49x + 20,5$

~~$\Rightarrow x = \frac{2}{7}, a = -1 - 2\sqrt{b^2 + b}$~~

~~$2 - 7x = -1 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$~~

~~$(a - a^2) = 2\sqrt{b^2 + ab}$~~

$24,5b - 9a - 38,5$

~~$a^4 - 2a^3 + a^2 = 4b^2 + 4ab$~~

$10a$

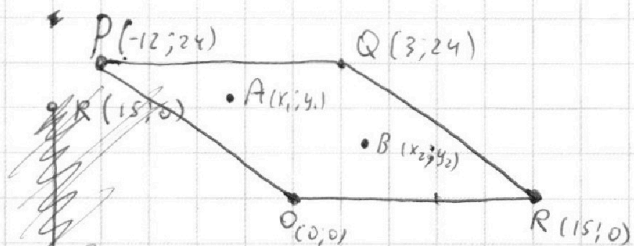
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

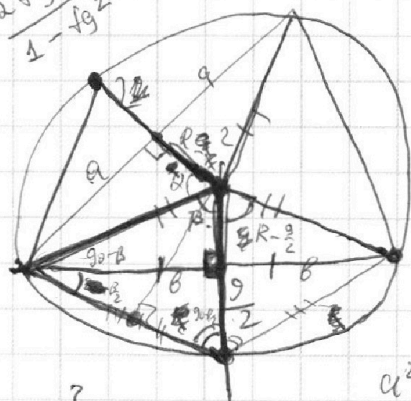
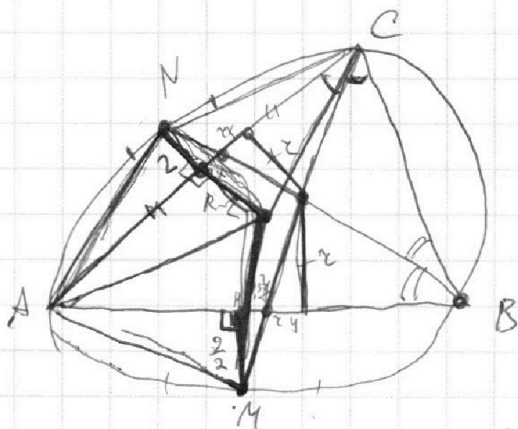
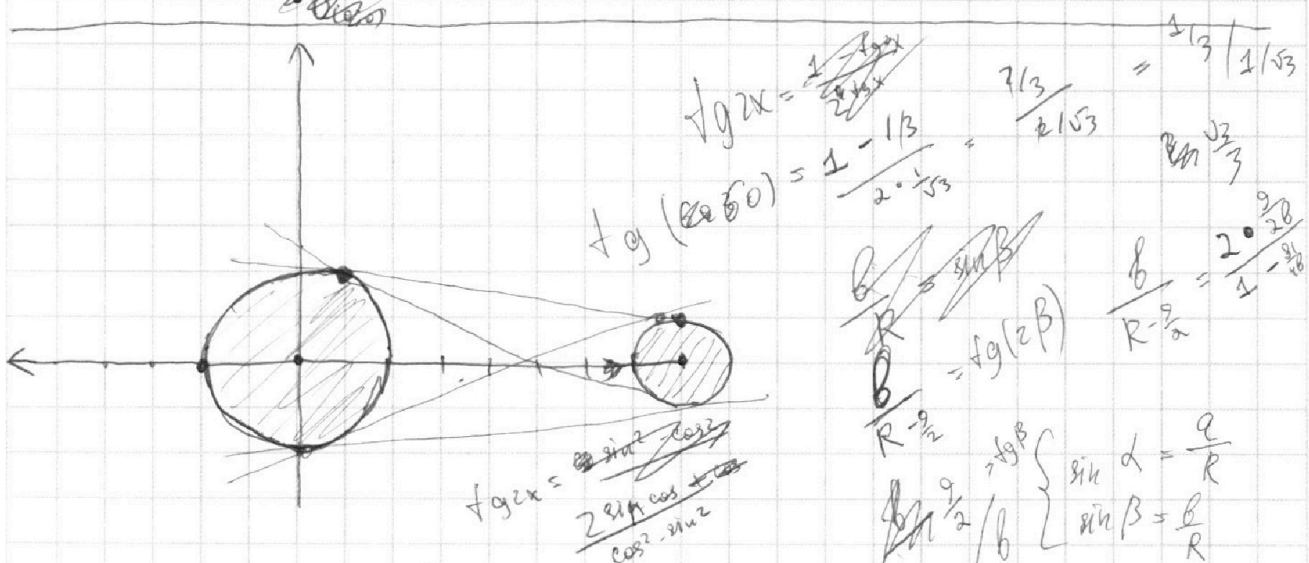
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$



$$b \cdot R =$$

$$b \left(1 - \frac{81}{4b^2}\right) = (R - \frac{9}{2}) \left(\frac{18}{2b}\right) (R - 2)^2 + a^2 = (R - \frac{9}{2})^2 + b^2$$

$$b^2 + (R - \frac{9}{2})^2 = R^2 \quad R^2 - 4R + 4 + a^2 = R^2 - 9R + \frac{81}{4} + b^2$$

$$b^2 = \frac{81}{4} - 9R = \left(\frac{9}{2} - 3R\right) \left(\frac{9}{2} + 3R\right)$$

$$5R + 4 + a^2 = \frac{81}{4} + b^2$$

$$a^2 + (R - 2)^2 = R^2$$

$$a^2 - 4R + 4 = 0$$

$$a^2 = 4 - 4R = \frac{(2 - 2\sqrt{R})(2 + 2\sqrt{R})}{(2 + 2\sqrt{R})}$$