



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

Пусть  $a_1, b_1, c_1$  - степени входящие тройки

В тройке  $a, b, c$  совпадают. Тогда минимальная система:  
т.е.  $abc$  минимална, т.е. минимальная степень входящие 2, 3, 5 в

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 6 \\ b_1 + c_1 \geq 14 \\ c_1 + a_1 \geq 16 \end{cases} \quad \text{откуда} \quad a_1 + b_1 + c_1 \geq 18, \text{ заметим} \\ \text{что равенство достигается}$$

~~Пусть  $a_2, b_2, c_2$  - степени~~ при  $a_1 = 4, b_1 = 2, c_1 = 12$

Пусть  $a_2, b_2, c_2$  - степени входящие тройки

в  $a, b, c$  совпадают, откуда имеет

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 13 \\ b_2 + c_2 \geq 21 \\ c_2 + a_2 \geq 25 \end{cases} \quad \text{сложив, имеет: } a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{53}{2}, \\ \text{т.е. } a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ то } a_2 + b_2 + c_2 \geq$$

$\geq 30$ . Заметим, что  $a_2 = 8, b_2 = 5, c_2 = 17$  удовлетв.

имеет, и их сумма равна 30.

Пусть  $a_3, b_3, c_3$  - степени входящие четверки

в  $a, b, c$  совп., откуда имеет.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 11 & (1) \\ b_3 + c_3 \geq 13 & (2) \\ c_3 + a_3 \geq 28 & (3) \end{cases}$$

Сумма первых трех неравенств:  
 $a_3 + c_3 + 2b_3 \geq 24$   
но из (3)  $c_3 + a_3 \geq 28$ , тогда

min сумма  $a_3 + b_3 + c_3 = 28$  при  $a_3 = 13, b_3 = 0, c_3 = 15$

(все значения выполнены)

Тогда min значение  $abc = 2^{18} \cdot 3^{20} \cdot 5^{28}$

( $a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{13}, b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0, c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$ )

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

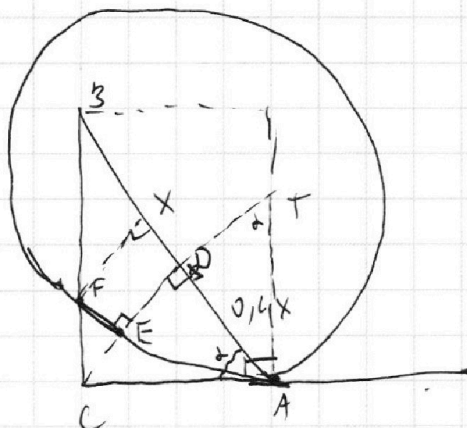
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~2.



$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} \rightarrow$$

$$BD = x, AD = 1,4x - x = 0,4x$$

$$CD = \sqrt{x \cdot \frac{2}{5}x} = x\sqrt{\frac{2}{5}}$$

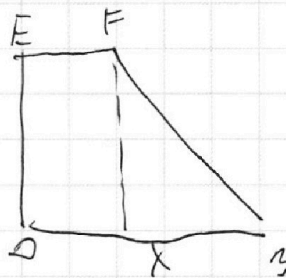
$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF}$$

$$AD^2 = CD \cdot DT$$

$$\frac{4}{25}x^2 = \sqrt{\frac{2}{5}}x \cdot DT$$

$$DT = CD = \frac{2}{5}x$$

$$DT = \frac{x^2 \cdot \frac{4}{25}}{x\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{x \cdot 4}{25\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{4\sqrt{5}x}{25\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{10}x}{25 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{10}}{25}x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

Возьмем  $\cos$  от обеих частей, а затем приведем к одному знаменателю.

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)\right) = \sin\left(\frac{5\pi - 9\pi + 2x}{10}\right) =$$

$$= \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\sin x - \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) = 0$$

$$2 \sin \frac{x - \left(x - \frac{2\pi}{5}\right)}{2} \cos \frac{x + \left(x - \frac{2\pi}{5}\right)}{2} = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{5x - x + 2\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{6x - 2\pi}{10}\right) = 0 \quad | :2$$

$$\sin\left(\frac{2x + \pi}{5}\right) \cos\left(\frac{3x - \pi}{5}\right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{2x + \pi}{5}\right) = 0 \quad ① \\ \cos\left(\frac{3x - \pi}{5}\right) = 0 \quad ② \end{array} \right.$$

$$① \quad \sin\left(\frac{2x + \pi}{5}\right) = 0$$

$$\frac{2x + \pi}{5} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x + \pi = 5\pi k$$

$$2x = -\pi + 5\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

проверим полученную серию решений:

при  $k \leq -1$   $x \leq -3\pi$ , тогда в интервал

уравнения  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$  не будет решений

$\geq 15\pi$ , но т.к.  $0 \leq \arccos(x) \leq \pi$ , то левая

часть  $\leq 10\pi$ , следовательно при  $k \leq -1$  решений нет

при  $k=0$   $x = -\frac{\pi}{2}$  (1)

$$10 \arccos(\sin(-\frac{\pi}{2})) = 10 \arccos(-1) = 10\pi$$

$$9\pi - 2 \cdot (-\frac{\pi}{2}) = 10\pi$$

при  $k=1$ : при  $k \geq 1$

$x = \pi$ :

$$x = -\frac{\pi}{2} + 5\pi = 2\pi$$

$$10 \arccos(0) = 10$$

$$9\pi - 2 \cdot 2\pi = 5\pi$$

$5\pi \neq 10$ , не реш.

при  $k \geq 2$

$$x \geq -\frac{\pi}{2} + 5\pi = \frac{11\pi}{2}$$

тогда левая часть в интервале удовлетворит

$$\leq 9\pi - 11\pi = -2\pi < 0, \text{ но } 10 \arccos(\sin x) \geq 0,$$

следовательно при  $k \geq 2$  решений нет

$$(2) \cos\left(\frac{3x-\pi}{5}\right) = 0$$

$$\frac{3x-\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$3x - \pi = \frac{5\pi}{2} + 5\pi m$$

$$3x = \frac{9\pi}{2} + 5\pi m$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi m}{3}$$

при  $m=0$ :

$$x = \frac{7\pi}{6} \oplus$$

$$9\pi - 2 \cdot \frac{7\pi}{6} = 9\pi - \frac{7\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$$

$$10 \arccos \left( \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 10 \arccos \left( -\frac{1}{2} \right) = 10 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$$

при  $m=1$ :

$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{17\pi}{6} \oplus$$

$$9\pi - 2 \cdot \frac{17\pi}{6} = 9\pi - \frac{17\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$$

$$10 \arccos \left( \sin \frac{17\pi}{6} \right) = 10 \arccos \left( \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{10\pi}{3}$$

при  $m=2$ :  $\oplus$

$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2}$$

$$9\pi - \frac{27\pi}{3} = 0$$

$$10 \arccos \left( \sin \frac{27\pi}{6} \right) = 10 \arccos \left( \sin \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

при  $m \geq 3$

$2x > 9\pi$  и пр. возьмем отрицательные значения

решения нет.

при  $m=-1$

$$x = \frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} \oplus$$

$$9\pi + \pi = 10\pi$$

$$10 \arccos \left( \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = 10\pi$$

при  $m \leq -2$

$x < -\frac{\pi}{2}$  и пр. возьмем  $> 10\pi$ , решение нет.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ:  $x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{9\pi}{2} \right\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 4.

$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 81 - 4) = 0 & (2) \end{cases}$$

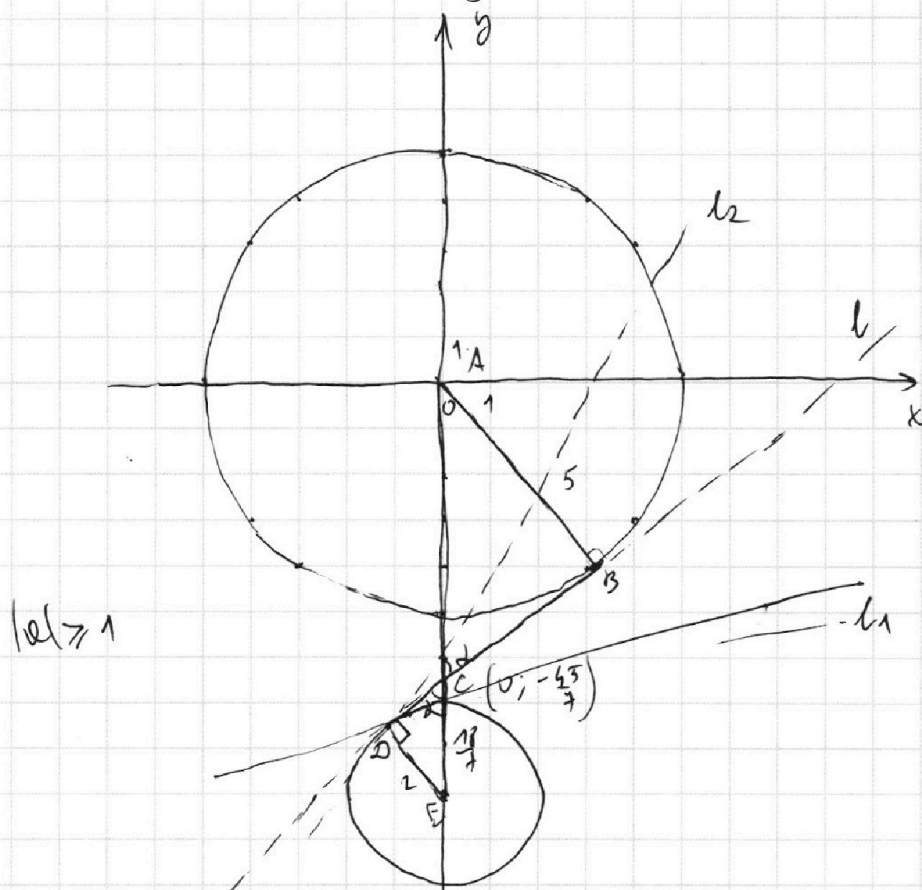
(2)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

(1):

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{6}{6a} \quad \text{при } a \neq 0$$

$$\text{при } a = 0 \quad x = \frac{6}{5}$$



Взяв за основу с функцией  $\cos$  и  $\sin$ , или  
можно параллельно перенести ее (за ~~этом~~  
касательная B)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если прямая - такая линия  
(окрест. касается её с  
разных сторон)  
касательная к прямой, как прямая  $l$ , то также  
касательная или не пройдет, т.е. параллельно  
прямой  $l$ , мы будем получать не более 2  
точек пересечения с одной из окружностей  
(при касании - с обеими). Заметим, что если  
мы увеличим угол  $\alpha$  кр. прямой (по мере  $\alpha$ ),  
относительно  $\downarrow$  прямой  $l$  (пр.  $l_1$  на рисунке),  
то система также не будет иметь более 2  
решений (пересекать только одну окр.).  
Если увеличим угол  $\alpha$  кр. прямой (по  
мере  $\alpha$ ) от пр. прямой  $l$  (пр.  $l_2$  на рисунке),  
то система будет иметь 4 решения при некотором

$\alpha$  (пересекать обе окружности)

1  $\triangle ABC \sim \triangle EDC$  по 2 углам;  $AB=5$  (радиус),  $ED=2$

(радиус), тогда  $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{ED} = \frac{5}{2}$

$$AE = 9$$

$$AB = \frac{5}{7} \cdot 9 = \frac{45}{7}$$

$$DE = \frac{2}{7} \cdot 9 = \frac{18}{7}$$

Площа  $\triangle$  пропорции через  $\angle C (0; -\frac{45}{7})$

$$S_{\triangle DCE} = \frac{18}{7 \cdot 2} = \frac{18}{7} \quad \text{или} \quad S_{\triangle DCE} = \frac{2}{\frac{45}{7}} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle DCE = \alpha$ , тогда <sup>нельзя</sup> "углы наклона" прямой к бугру равен

$$\angle (y_0^\circ - \alpha) = \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9} \right)$$

$$k = -\frac{5}{6a} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9} \right)$$

$$a = -\frac{6}{5} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9} \right)$$

при  $|k| \leq \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9} \right)$  решение

не имеет 4 решения (кроме случая  $a=0$ ,

тогда это вырожденное решение  $x = \frac{6}{5}$ , которое

можно считать 4 решения), при остальных  $a$

решения имеют 4 решения.

Итак: ~~если~~  $a=0$ ; ~~тогда~~  $\rightarrow \frac{6}{5} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9} \right)$

$|k| \geq \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9} \right)$ , где  $k = -\frac{5}{6a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_m^4 x - 6 \log_x^{11} = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5 \\ \log_m^4 (0,5y) + \log_{0,5y}^{11} = \log_{0,125y}^3 (11^{-11}) - 5 \end{cases}$$

(\*):

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ 0,5y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_x^{11} = \frac{1}{\log_m x}$$

$$\log_x^3 \frac{1}{121} = -\log_x^3 11^2 = -\frac{2}{3} \log_x^{11} = \frac{-2}{3 \log_m x}$$

$$\begin{aligned} \log_{0,125y}^3 (11^{-11}) &= \log_{(0,5y)^3} (11^{-11}) = \frac{-11}{3} \log_{0,5y}^{11} \\ &= \frac{-11}{3 \log_m 0,5y} \end{aligned}$$

$$\log_m x = a, \log_{11} 0,5y = b$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \quad | \cdot 3a \neq 0 \\ b^4 + \frac{1}{b} = \frac{-11}{3b} - 5 \quad | \cdot 3b \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 11 = 0 \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 11 = 0 \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 \end{cases}$$

$$3a^5 + 15a = -3b^5 - 15b \quad | :3$$

Решение

$$a^5 + 15a = (-b)^5 + 5(-b)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3a^5 + 15a + 3b^5 + 15b = 0 \quad | :5$$

$$\cancel{a^5} + 3a + \cancel{b^5} + 3b = 0$$

$$a^5 + 3a = (-b)^5 + 3(-b)$$

Введи  $f(t) = t^5 + 3t$

$$f'(t) = 5t^4 + 3 > 0, \text{ значит } f(t) \text{ монотонно}$$

возрастает, т.е. каждый знаменатель минимален

1 раз

$$f(a) = f(-b), \text{ значит } a = -b$$

$$\log_m x + \log_m 0,5y = 0$$

$$\log_m 0,5xy = 0$$

$$0,5xy = 1$$

$$xy = 2$$

Ответ: 2.

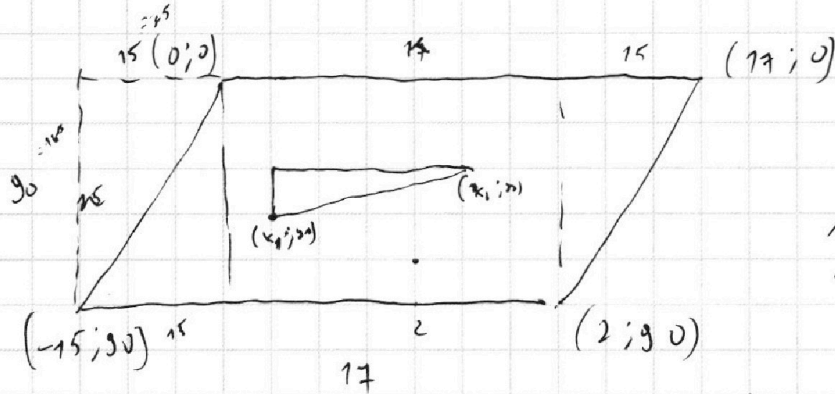
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

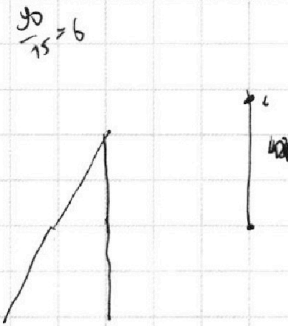


$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_2; y_2)$$

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$\frac{y_2}{x_2 - x_1} = 3$   
 $90 - 15 = 75$   
 $48 = 48$



$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

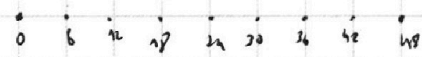
$\underbrace{\hspace{2cm}}_{:6} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{:6} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{:6}$

$$y_2 - y_1 = 48$$

6, ... 48

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ y_2 - y_1 = 48 \end{cases}$$

8 умнож



C 48 умнож



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

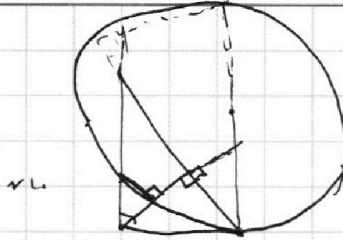
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



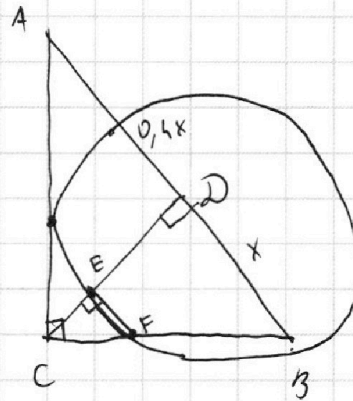
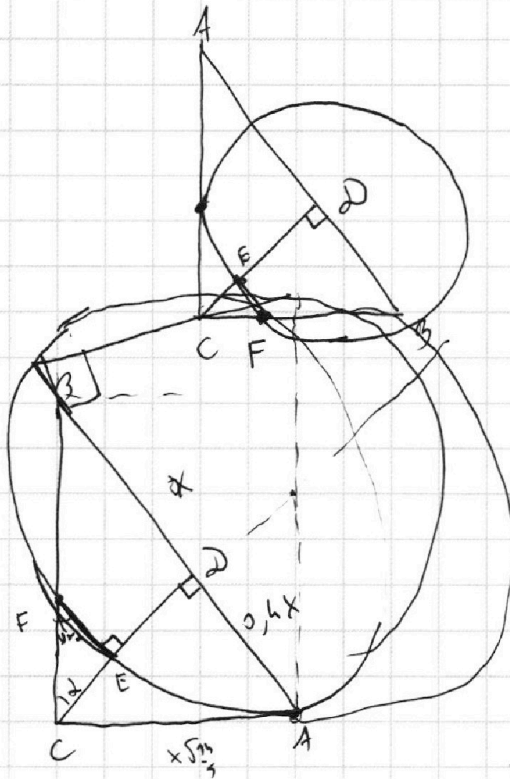
$$\log_{11} x = \alpha$$

$$\sin 5 = 5'$$

$$\log \left( \frac{11}{5} \right)^3 \left( 11^{-13} \right) =$$



$AB \parallel EF$



$$S_{ACD}$$

$$S_{CEF}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{CD \cdot AD}{CE \cdot EF}$$

$$\frac{h}{x} = \frac{\frac{2}{3}x}{h}$$

$$CA^2 = CE \cdot CD$$

$$CA^2 = CE \cdot x \sqrt{\frac{2}{5}}$$

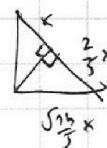
$\sqrt{2}$

$$\frac{14}{25} x^2 = CE \cdot x \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$CE = \frac{x \cdot \frac{14}{25}}{x \sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{x \cdot 14}{25 \sqrt{\frac{2}{5}}}$$

$$h = \sqrt{x \cdot \frac{2}{3} x} = x \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$CA^2 = \sqrt{\frac{4}{25} x^2 + \frac{2}{3} x^2} = \sqrt{\frac{4}{25} x^2 + \frac{20}{25} x^2} = \frac{\sqrt{24}}{5} x$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 5.

$$\begin{cases} \log_m^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x x^3 \left(\frac{1}{11}\right)^2 - 5 \\ \log_m^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{(0,5y)^3} (11^{-15}) - 5 \end{cases}$$

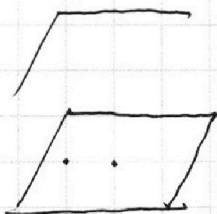
~~$\log_m x = 4$~~

$$\log_x x^3 \left(\frac{1}{11}\right)^2 = -\log_x x^3 11^2 = -\frac{2}{3} \log_x 11$$

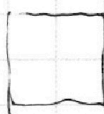
$$\log_m x = a$$

$$-\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11$$

$$\log_m 0,5y = b$$



$$\begin{cases} a^4 - \frac{6a}{a} = -\frac{2}{3} - 5 \quad | \cdot 3a \\ 6^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3} - 5 \quad | \cdot 3b \end{cases}$$



$$\begin{aligned} b &= \sqrt{11} \\ 4 &= \sqrt{11} + 4 \\ &+ \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3b^5 + 3 + 13 + 15b &= 0 \\ 3a^5 - 18 &= -2 - 15a \end{aligned}$$

$a, b$   
 $a+b = \log_m x \cdot 0,5y$

$$2^3 \cdot 1^3 =$$

$$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 \end{cases}$$

$$(x^3 + y^3) = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$3(a^5 + b^5) + 15(a+b) = 0$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^5 + b^5 = -5(a+b)$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \quad | \quad a+b \\ -a^3 + b^3 \quad | \quad a^2 \\ \hline -a^2b + b^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \quad | \quad a+b \\ -a^4 + a^3b \quad | \quad a^2 + ab - a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\ \hline a^5 + ab^5 \end{array}$$

$$4 - a^3b + a^2b^2 - b^3a + b^4 = -5$$

$$\begin{array}{r} -a^5 + ab^5 \\ -a^4b + a^3b^2 \\ \hline -a^3b^2 + b^5 \end{array}$$

$$a^5 + 5a = -b^5 - 5b$$

$$\begin{array}{r} -a^3b^2 + b^5 \\ -a^2b^3 + b^4 \\ \hline -a^2b^3 + b^4 \end{array}$$

$$a^5 + 5a = (b^5 + 5b)$$

$$\begin{array}{r} -a^2b^3 + b^4 \\ -b^2a + b^5 \\ \hline -b^2a + b^5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= t^5 + 5t \\ f'(t) &= 5t^4 + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} -b^2a + b^5 \\ -b^2a + b^5 \\ \hline -b^2a + b^5 \end{array}$$

~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

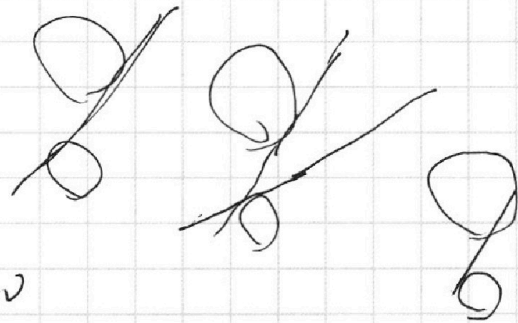
1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x^2 + (y^2 + 18y) + 81 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

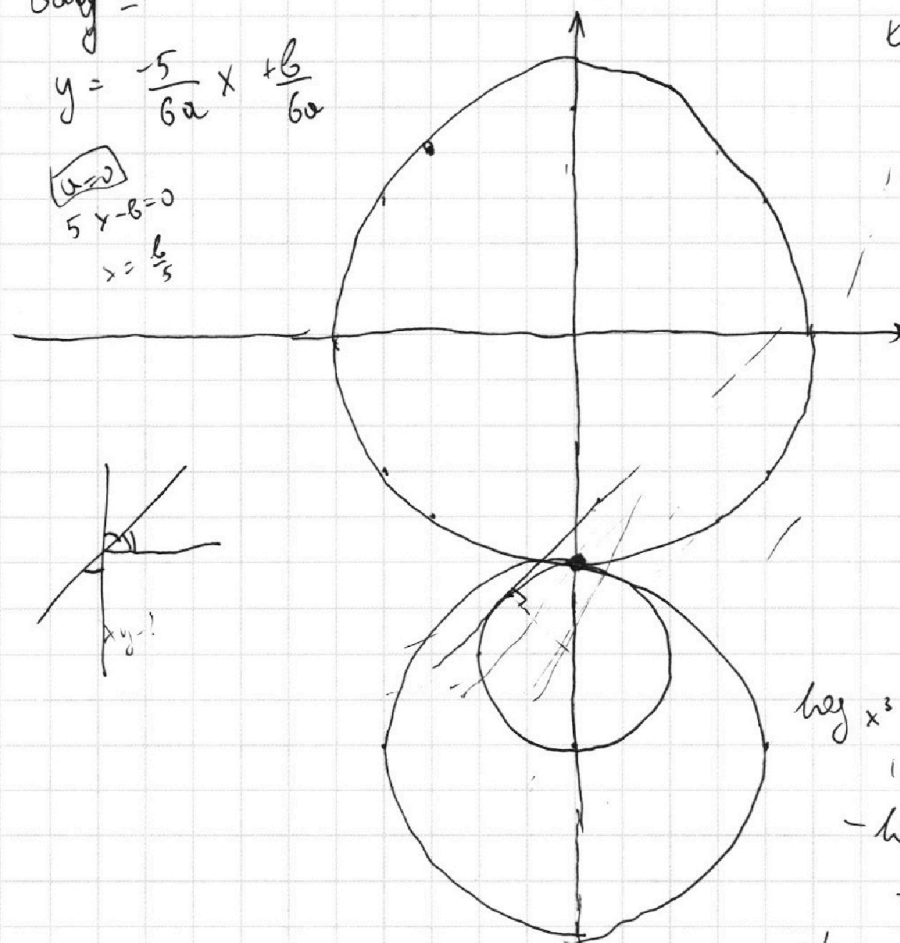
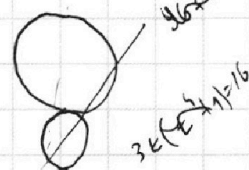


$$\begin{aligned} 6ay &= -5x + b \\ y &= \frac{-5}{6a}x + \frac{b}{6a} \end{aligned}$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4 \quad \log_m x = k$$

$$t^4 - \frac{6}{t} + \frac{2}{3t} + 15 = 0 \quad | \cdot 3t$$

$$\begin{aligned} 3t^5 + 15t - 17 &= 0 \\ 3t^5 + 15t - 16 &= 0 \end{aligned}$$



$$\log_2 4 = 2 \quad \log_2 \frac{2}{4} = -2$$

$$\begin{aligned} \log_x \frac{1}{121} &= \log_x 1 - \log_x 121 \\ &= -\log_x 121 \\ &= -\log_x 11^2 = -\frac{2}{3} \log_x 11 \end{aligned}$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = \frac{-2}{3t} - 5$$

$$\log_m^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x \left( \frac{1}{11} \right)^2 - 5$$

$$\log_m^4 \left( \frac{11}{2} \right) + \log_x \frac{2}{11} = \log \left( \frac{11}{5} \right)^3 (11^{-13}) - 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin(\cos(5\pi x)) = 9\pi - 2x$$

$x \in [0; 10\pi]$

$$4\frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{12}}{3} = \frac{7\pi - 10\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{6} = 4 + \frac{3}{6} = 4 + \frac{1}{2}$$

$$\arcsin(\sin x)$$

$$\arcsin(\cos(5\pi x)) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\frac{17}{6} = 2$$

$$2 + \frac{5}{6}$$

$$\cos(\dots) = \cos(\dots)$$

$$\frac{12}{6} + \frac{5}{6}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$9\pi = \frac{24\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{2x - 4\pi}{10}\right) = \frac{x - 2\pi}{5}$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{x - (x - 2\pi)}{5} = \frac{5x - x + 2\pi}{5} = \frac{4x + 2\pi}{5}$$

$$\frac{5\pi}{3}$$

$$2\sin \frac{x - x + 2\pi}{5}$$

$$\frac{12\pi}{3} + \frac{7\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}$$

$$2\sin\left(\frac{2x + \pi}{5}\right) \cos\left(\frac{3x - \pi}{5}\right) = 0$$

$$= \frac{4x + 2\pi}{10} = \frac{2x + \pi}{5}$$

$$\frac{5\sqrt{12}}{3} + \frac{7\pi}{6} =$$

$$\frac{2x + \pi}{5} = \pi k \quad (1)$$

$$\frac{7\pi}{6} =$$

$$\frac{3x - \pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$9\pi - \frac{7\pi}{3} =$$

$$\frac{\frac{5x}{5} + \frac{(x - 2\pi)}{5}}{2} = \frac{6x - 2\pi}{10} = \frac{3x - \pi}{5}$$

$$(1) \quad 2x + \pi = 5\pi k$$

(2)

$$2x = -\pi + 5\pi k$$

$$3x - \pi = \frac{5\pi}{2} + 5\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}$$

$$3x = \frac{7\pi}{2} + 5\pi k$$

$k =$

$$k = \frac{9\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}$$



$$x = 2\pi$$

$$k = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = -3\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6}$$

$$10 \arccos(-1) = 9\pi + \pi$$

$$10\pi = 10\pi$$

$$9\pi + \frac{7\pi}{3}$$

$$10 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{12\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~1

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{27}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{36} \cdot 3$$

$$abc \rightarrow \min$$

$$2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$4 \cdot 6 : 2^1 \cdot 3^2 \cdot 2^1 \cdot 3$$

$$4 \cdot 6 : 2^3 \cdot 3$$

$$6 \cdot 12 : 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$4 \cdot 6 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$$

$$4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 12 : 2^5 \cdot 3^5$$

$$6^2 \cdot 4 \cdot 12^2 : 2^{10} \cdot 3^5$$

$$2^5 \cdot 3^4$$

$$4 \cdot 6 \cdot 12 = 2^5 \cdot 3^3$$

$$8 \cdot 4 : 2^5$$

$$4 \cdot 6 : 2^3 \cdot 3$$

$$8 \cdot 6 : 2^4 \cdot 3$$

$$8 \cdot 4 \cdot 6 : 2^{12} \cdot 3^2$$

$$2^6 \cdot 3$$

$$a = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^{13} \quad \sim 2$$

$$b = 2^2 \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{23} \cdot 5^{15}$$

$$\begin{cases} x+y=6 \\ y+z=14 \\ z+x=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-x=8 \\ z+x=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=12 \\ x=4 \end{cases}$$

$$y=2$$

$$\begin{cases} x+y=11 \\ y+z=13 \\ z+x=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-x=2 \\ z+x=20 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=13 \\ y+z=21 \\ z+x=26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-x=21 \\ z+x=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=4 \\ z=11 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=11 \\ y+z=13 \\ z+x=20 \end{cases}$$

$$z-x=2 \quad y=11$$

$$z+x=20$$

$$\begin{cases} z=11 \\ x=9 \end{cases}$$

2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x+y \geq 13 \\ y+z \geq 21 \\ z+x \geq 25 \end{cases}$$

$$x+y+z \rightarrow \min$$

$$2(x+y+z) \geq 53$$

$$x+y+z \geq 26.5$$

$$x+y+z=30$$

$$z+x=8$$

$$z+x=25$$

$$x+y=14$$

$$y+z=21$$

$$z+x=25$$

$$z-y=12$$

$$z=30-x-y$$

$$11+13+28$$

$$z=15$$

$$13-2=15$$

$$x+y+z \geq 28$$

$$\begin{cases} x+y \geq 13 \\ 30-x \geq 21 & x \leq 9 \\ 30-y \geq 25 & y \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=14 \\ y+z=15 \\ z+x=28 \end{cases}$$

$$z=15$$

$$\begin{cases} x+y \geq 11 \\ z-x \geq 13 \\ 24-y \geq 28 \end{cases}$$

$$z=27-x+y$$

$$x \leq 14$$

$$y \leq 1$$

$$z=16$$

$$x=10$$

$$y=1$$

$$y=5$$

$$x=6$$

$$z=15$$

$$z=13$$

$$y=1$$

$$x+y=27-z$$