МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1. Пусть $ab=\alpha\cdot 2^7\cdot 3^{11}\cdot 5^{14}$; $bc=\beta\cdot 2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 5^{18}$; $ac=\gamma\cdot 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43}$
$(\alpha,\beta,\gamma\in N)$

$abc=ac\cdot\sqrt{\frac{ab\cdot bc}{ac}}$

$abc=\gamma\cdot 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43}\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma}\cdot 2^{7+13-14}\cdot 3^{11+15-17}\cdot 5^{14+18-43}}=$

$=\sqrt{\alpha\beta\gamma}\cdot 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43}\sqrt{2^6\cdot 3^9\cdot 5^{-11}}=$

$=\sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma}{3\cdot 5}}\cdot 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{38}$; т.к $a,b,c\in N$, то $\sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma}{15}}\in N$
(т.к. $a\cdot b\cdot c\in N$)

($\alpha\beta\gamma\,\vdots\,15$, например, $\alpha=1$, $\beta=3$, $\gamma=5$)

Наим. значение $a\cdot b\cdot c=2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{38}$ (при $\alpha\beta\gamma=15$)

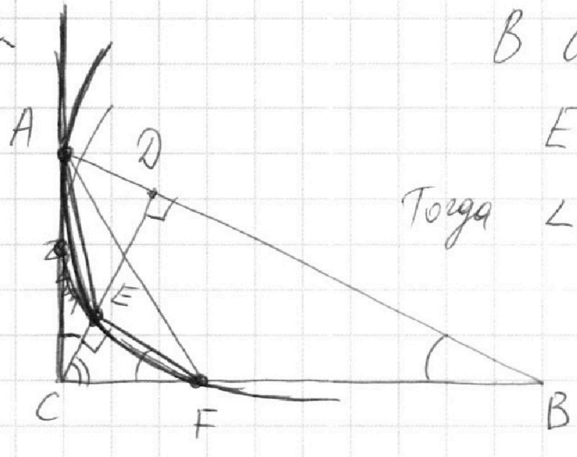
Ответ: $2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



В силу параллельности EF и AB

$EF \perp CD$; $\angle CFE = \angle CBD$.

Тогда $\angle ACD = 90^\circ - \angle ECF = \angle CFE$

$\triangle CEF \sim \triangle ADC$ по 2 углам

~~CE~~

$\frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CF} = \frac{CD}{FE} = k$, тогда $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = k^2$

$\frac{AB}{BD} = 1{,}3 \Rightarrow AD = 0{,}3\,BD \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{\frac{3}{10}}\,BD$;

$AB = 1{,}3 \cdot \frac{AD}{0{,}3} = \frac{13}{3} AD$

$\angle CAE = \angle AFE$ (угол между касат. и хордой равен впис. углу, опир. на эту хорду)

Тогда $\angle AFB = 180^\circ - \angle AFE - \angle EFC = \angle AEC$

$\triangle AFB \sim \triangle AEC$ по 2 углам; $\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{FB}{CE}$

Но $\frac{AB}{AC} = \frac{CF}{CE}$ (из подобия $\triangle CEF$ и $\triangle ACB$)

$\frac{AB}{AC} = \frac{CF}{CE} = \frac{FB}{CE} \Rightarrow CF = FB \Rightarrow$ т. F – сер. BC.

$CF = FB = \frac{BC}{2} \Rightarrow CE = \frac{1}{2} CD$

$EF = \frac{1}{2} BD$ (из подобия $\triangle CEF$ и $\triangle CDB$)

Тогда $S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF = \frac{BD \cdot CD}{8}$

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot AD = \frac{3}{20} CD \cdot BD$

$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{3 \cdot 8}{20 \cdot 1} = \frac{12}{10} = 1{,}2$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3. $5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

Заметим, что $5\arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$ (по опред. arccos)

Тогда $x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$ - это область допуст. значений x.

Пусть $\sin x = \alpha \in [-1;1]$, тогда $\cancel{5\cos\alpha} = 5\arccos\alpha = \frac{3\pi}{2} + x$

Пусть $\alpha = \cos\beta \in [-1;1]$, тогда $\beta = \arccos\alpha = \arccos(\sin x)$

Тогда $\cos\beta = \sin x$ и $5\beta = x + \frac{3\pi}{2}$

$$\begin{cases} 5\beta = x + \frac{3\pi}{2} & (1) \\ \sin x = \cos\beta & (2) \end{cases}$$ Решим полученную систему

2) $\sin x = \cos\beta$; $\sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = 0$

$$2\sin\frac{x - \frac{\pi}{2} + \beta}{2} \cdot \cos\frac{x + \frac{\pi}{2} - \beta}{2} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{x+\beta-\pi/2}{2} = 0 \\ \cos\frac{\pi/2 - \beta + x}{2} = 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \frac{x+\beta-\frac{\pi}{2}}{2} = \pi n \\ \frac{\pi/2 - \beta + x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{array}\right. \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} x+\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x - \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \end{array}\right. ; \quad \cancel{\left[\begin{array}{l} \beta + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x - \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \end{array}\right.} \quad \cancel{\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - x} \quad \cancel{\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m + x}$$

$$\cancel{\left[\begin{array}{l} \beta = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi m \\ \beta = x - (\frac{\pi}{2} + 2\pi n) \end{array}\right.}$$

~~Возвращаемся к системе:~~

$$\cancel{\left[\begin{array}{l} x + \frac{3\pi}{2} = 5x + \frac{5\pi}{2} + 10\pi n \\ x + \frac{3\pi}{2} = 5x - (\frac{5\pi}{2} + 10\pi m) \end{array}\right.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\left[\begin{array}{l}\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - x \\ \beta = x - \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right)\end{array}\right.;$$

Вернёмся к системе.

$$\left[\begin{array}{l}x + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} + 10\pi n - 5x \\ x + \frac{3\pi}{2} = 5x - \frac{5\pi}{2} - 10\pi m\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}6x = \pi + 10\pi n \\ 4x = 4\pi + 10\pi m\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \pi/6 + \frac{5\pi n}{3} \\ x = \pi + \frac{5\pi m}{2}\end{array}\right.$$

При этом $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$

Этим условиям удовлетворяют следующие значения x:

$$\left[\begin{array}{l}x = -\frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{11\pi}{6} \\ x = \frac{7\pi}{2} \\ x = \pi\end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$.

~~B=~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

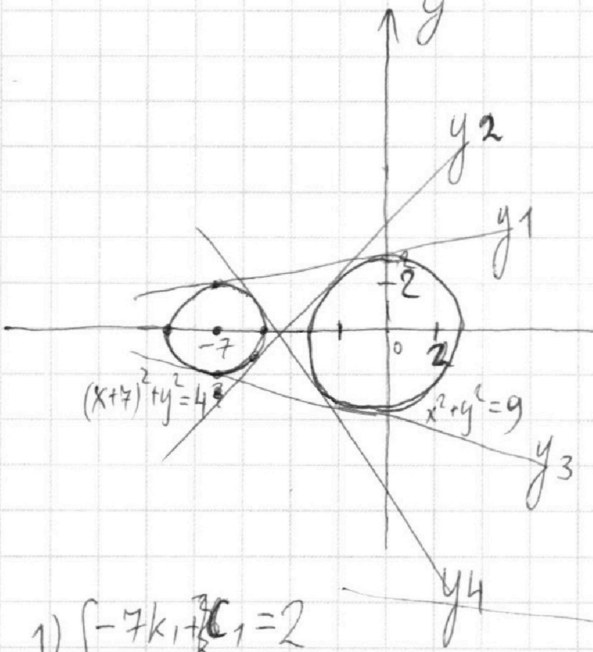
№4. $\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$

исходная система равносильна следующей:

$\begin{cases} \cancel{x=7b-3ay}\ y=-\frac{1}{3a}x+\frac{7b}{3a} \quad (\text{при } a\neq0) \\ \left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=4 \\ x^2+y^2=9 \end{array}\right. \end{cases}$

$(x+7)^2+y^2=4$ – ур. окр-ти с центром $(-7;0)$ и $R=2$

$x^2+y^2=9$ – ур. окр-ти с центром $(0;0)$ и $R=3$



Чтобы у системы было 4 решения, прямая $y=\frac{7b-x}{3a}$ должна иметь 4 пересеч. с 2-мя окр-тями, то есть по 2 пересеч. с каждой.

Найдём уравнения ~~всех~~ ~~четырех~~ общих касательных к окр-тям (~~$y_1(x)$, $y_2(x)$~~, $y_3(x)$ ~~y_4~~) y_1, y_2, y_3, y_4. Пусть

$y_1=k_1x+c_1$

$y_2=k_2x+c_2$

$y_3=k_3x+c_3$

$y_4=k_4x+c_4$.

1) $\begin{cases} -7k_1+c_1=2 \\ c_1=3 \end{cases}$ $\quad y_1=\frac{1}{7}x+3, \quad k_1=\frac{1}{7}$

3) $\begin{cases} -7k_3+c_3=-2 \\ c_3=-3 \end{cases}$ $\quad y_3=-\frac{1}{7}x-3, \quad k_3=-\frac{1}{7}$

При $a\in[k_1;k_2)$ $\left(k_1=\frac{1}{7}\right)$ найдётся b, такое, что у сист. будет 4 реш.

При $a\in(k_4;k_3]$ $\left(k_3=-\frac{1}{7}\right)$ также найдётся b, при котором у системы будет 4 реш.

Найдём k_2 и k_4. Из соображений симметрии понятно, что $k_4=-k_2$

~~Урав. $k_2x+c_2=$~~

~~$y_2^2=k_2^2x^2+2k_2c_2x+c_2^2$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$y_2^2 = 9 - x^2$ (при касании с окр. $R=3$)~~

~~$k_2^2x^2 + 2k_2c_2x + c_2^2 = 9 - x^2$ — ур. имеет 1 реш.~~ (условие касания прямой окр-ти)

~~$(k_2^2+1)x^2 + 2k_2c_2x + c_2^2 = 0$~~

~~$k_2^2c_2^2 - c_2^2(k_2^2+1) = 0 \Rightarrow c_2 =$~~

1) $k_2x + c_2 = \sqrt{9-x^2}$ ~~при $x<0$~~ — имеет 1 решение (условие касания с первой окр-тью радиуса 3)

$9 - x^2 = c_2^2 + k_2^2x^2 + 2k_2c_2x$

$(1+k_2^2)x^2 + 2k_2c_2x + c_2^2 - 9 = 0$ имеет 1 решение

$(k_2c_2)^2 - (1+k_2^2)(c_2^2-9) = 0;$

$k_2^2c_2^2 - c_2^2 - k_2^2c_2^2 + 9 + 9k_2^2 = 0 \Rightarrow \underline{9k_2^2 = c_2^2 - 9}$ (*)

$k_2x + c_2 = -\sqrt{4-(x+7)^2}$ — имеет 1 решение (условие касания со 2-й окр-тью радиуса 2)

$k_2^2x^2 + c_2^2 = 4 - (x+7)^2 - 2k_2c_2x$

$(1+k_2^2)x^2 + (14+2k_2c_2)x + (c_2^2+45) = 0$

$(7+k_2c_2)^2 - (1+k_2^2)(c_2^2+45) = 0; \Rightarrow \underline{45k_2^2 - 14c_2k_2 - 4 = 0}$ (**)

~~Из (*) и (**) следует, что~~ 14 ~~$c_2k_2 + 4 = 5c_2^2 - 45$~~

$$\begin{cases} 9k_2^2 = c_2^2 - 9 \\ 45k_2^2 = 14c_2k_2 + 4 \end{cases} \qquad k_2^2 = \left(\frac{5c_2^2 - 49}{14c_2}\right)^2$$

решив систему и найдя k_2 и c_2, можно дать ответ на вопрос задачи.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5. $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$; $\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$

$\cancel{\log_7^{-4}(6x) - \frac{7}{2}\log_7(6x) + 4 = 0}$

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - \frac{7}{2\log_7(6x)} + 4 = 0 \\ \log_7^4 y + \frac{7}{2\log_7 y} + 4 = 0 \end{cases}$$

Рассм. ~~функцию~~ ~~$f(t) = \log_7^4 t + \frac{7}{2\log_7 t}$~~ $+4$

$f(t) = t^4 + \frac{7}{2t} + 4$ при $t_1 = -\log_7 6x$ и $t_2 = \log_7 y$

$f(t)$ обращается в ноль. $(7^{-t_1} = 6x \quad 7^{t_2} = y)$

$\cancel{7^{t} = \frac{1}{6x}}$

$x = \frac{1}{6\cdot 7^{t_1}}$; $y = 7^{t_2}$

при $t_1 = t_2$ $\quad xy = \frac{1}{6}$

~~Исследуем $f(t)$.~~ $\quad t^4 + \frac{7}{2t} + 4 = \frac{2t^5 + 8t + 7}{2t}$

$2t^5 + 8t + 7 = 0$. $\quad t_1$ и t_2 – корни этого уравнения
(t_1 и $t_2 \neq 0$, т.к. $6x$ и y – осн. логарифмов) (по условию)

Рассм. ф-ю $y(t) = 2t^5 + 8t + 7$

$y' = 10t^4 + 8 > 0$ при всех $t \in R \Rightarrow y(t)$ возр. монотонно

и имеет ~~только~~ максимум один корень $\Rightarrow t_1 = t_2$, и единственное возм. произв. $x \cdot y$ является $\frac{1}{6}$.

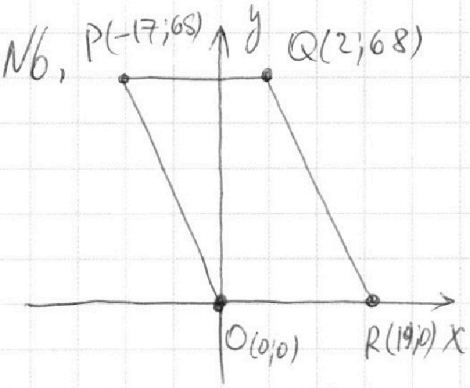
Ответ: $\frac{1}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6,



ур. прямой OR: $y=0$

ур. прямой PQ: $y=68$

ур. прямой PO: $y=-4x$

ур. прямой QR: $y=-4x+76$

Любая точка с целыми коорд. внутри параллелограма будет леж. на прямой $y=-4x+\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in [0;76]$; ~~для по~~

Пусть $y_1=-4x_1+c_1$; $y_2=-4x_2+c_2$

Тогда $4x_2-4x_1+y_2-y_1 = y_2+4x_2-(y_1+4x_1) =$
$= c_2-c_1=40$; $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$, $c_1, c_2 \in [0;76]$.

Задачу можно переформулировать так: сколькими способами можно выбрать два целых числа из отрезка $[0;76]$ так, чтобы их разность равнялась 40.

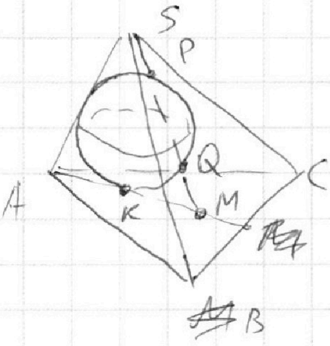
Понятно, что $c_2>c_1$; $76 \geq c_2 > 39$, т.к. при $c_2 \leq 39$ c_1 будет <0. Значит, всего способов $76-39=37$

Ответ: 37.

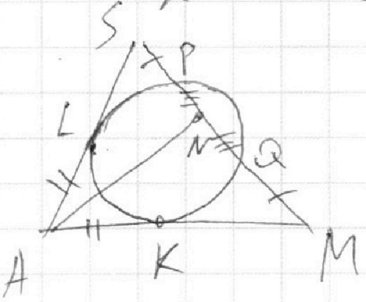
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассм. сечение пирамиды плоскостью ASM.



AL = AK как отрезки касат.

Проведём медиану AN в $\triangle ASM$.

Тогда PN = NQ (в силу р-ва SP и MQ),

~~из △~~ $AM = \frac{2}{3}\cdot AA_1$ ~~BC~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\arccos(\sin x)=\frac{3\pi}{2}+x$

$\arccos\alpha\in[0;\pi]$

$5\arccos\alpha\in[0;5\pi)$

$\sin x=\alpha$

$0\le\frac{3\pi}{2}+x<5\pi \qquad -\frac{3\pi}{2}\le x<\frac{7}{2}\pi$

$\arccos\alpha=\beta$

$\cos\beta=\alpha$

$5\beta=\frac{3\pi}{2}+x$

$\cos\beta=\sin x$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)=\sin x$

$\sin$

$\cancel{x=\frac{\pi}{2}-\beta}$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)-\sin x=0$

$2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\beta-x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-(\beta+x)}{2}=0$

$\sin(A+B)-\sin(AB)=$

$\frac{\cos(x+\beta)}{2}=0 \qquad x+\beta=\pi n+\frac{\pi}{2}$

$=\sin A\cos B-\sin A\cos B+\cos A\sin B+\cos A\sin B$

$=2\sin B\cos A$

$\frac{\sin(\beta-x)}{2}=0 \qquad \beta-x=\pi m$

$B=\frac{A+B+A-B}{2}$

$\beta=\pi n+\frac{\pi}{2}-x$

$B=\frac{A+B-A+B}{2}$

$\beta=\pi m+x$

$f'(t)=4t^3+\frac{5t}{2t^2}$

$5\pi n+\frac{5\pi}{2}-5x=\frac{3\pi}{2}+x$

$6x=5\pi n+\pi=6\pi n$

$x=\pi n$

$5\pi m+5x=\frac{3\pi}{2}+x$

$4x=\frac{3\pi}{2}-5\pi m$

$\begin{cases}x+3ay-78=0\\(x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0\end{cases}$

$\begin{cases}x+3ay-78=0\\\left[\begin{array}{l}x^2+y^2+14x+45=0\\x^2+y^2=9\end{array}\right.\end{cases}$

$0=5+78+(x+57)2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab = \alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$; $bc = \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$; $ac = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

~~$abc = \alpha\beta\gamma \cdot 2^{34} \cdot 3$~~ ~~$ab, bc, ac$: $2^7, 3^{11}; 5^{14}$~~

ac: $abc = ac \cdot \sqrt{\frac{ab \cdot bc}{ac}} = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \sqrt{\frac{\alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}}{\gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}}}$

$= \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma} \cdot 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{-11}} =$

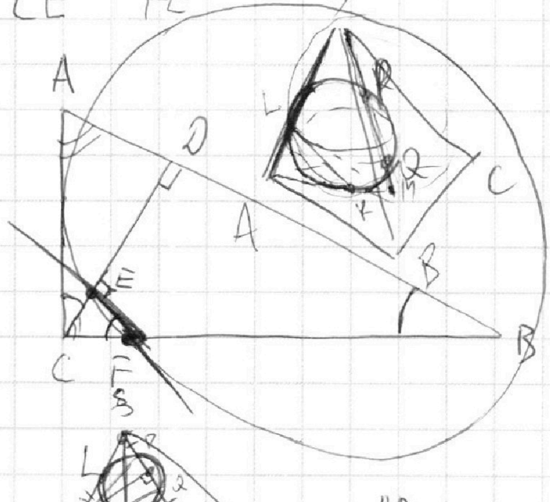
$= 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{3\cancel{7}8} \sqrt{\alpha\beta\gamma/5}$ $\quad \alpha\beta\gamma = 5$

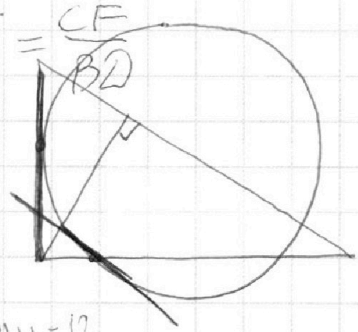
$= 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{38}$

$\frac{FE}{BD} = \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{BD}$

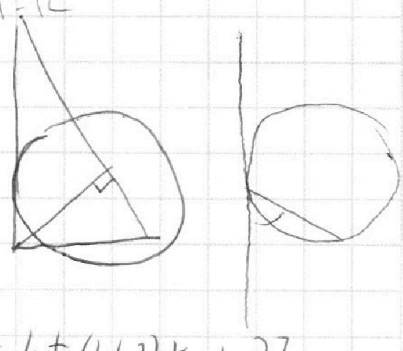
$10t^4 + 8 = \cancel{8}$ $\quad t^4 = \cancel{8}/10$

$\frac{AC}{CF} = \frac{AD}{CE} = \frac{CD}{FE}$ $\quad ACD \sim CFE$



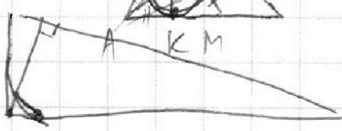


$AH = 12$



$\frac{AB}{BD} + 4 = 0$

$-\frac{7}{2} \log_{6x} 7$



$\frac{AB}{BD} = 1{,}3$

$0 = t + (t+7)t + {}_5 72$

$AB = 1{,}3\,BD$

$AD = 0{,}3\,BD$

~~AB~~ $AB = \sqrt{\frac{10}{13}}$

$AB = 1{,}3 \cdot BD$

$AD = AB - BD = 1{,}3BD - BD = 0{,}3\,BD$

$\sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{0{,}3\,BD^2} = AB$ $\quad (0{,}3\,BD) = AB$

$0 = t + 78 + {}_5 72$

$\log_7^4 y + \frac{1}{2} \log_7 y$

$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$ $\quad x = 78$

$0 = \frac{72}{t + 78 + {}_5 72}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$49+\cancel{k_2^2c_2^2}+14k_2c_2-c_2^2-\cancel{k_2^2c_2^2}-45-45k_2^2=0$

$45k_2^2-14k_2c_2-4=0$

$4(x_2-x_1)+y_2-y_1=40$

$y_1=-4x+c_1 \quad y_1+4x_1=c_1$

$9k_2^2=c_2^2-9$

$\cancel{14c_2k_2+4=5c_2^2-45}$

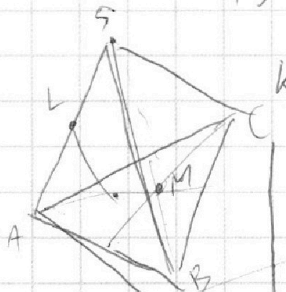
$45k_2^2-14c_2k_2-4=0$

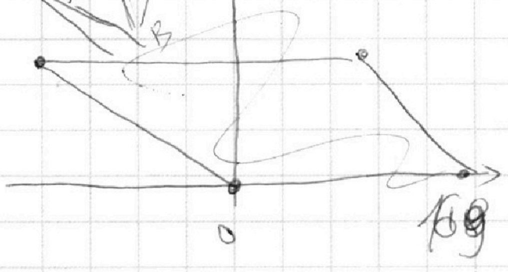
$y_2+4x_2=c_2$

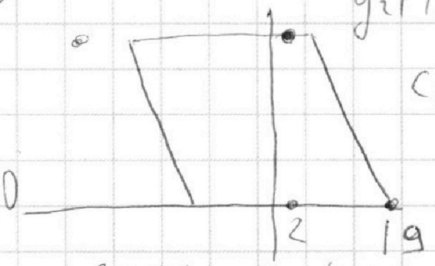
$\cancel{k_2=\frac{7c_2\pm\sqrt{49c_2^2+180}}{}}$

$c_1+c_2=40$

$(4x_2+y_2)-(4x_1+y_1)=40$



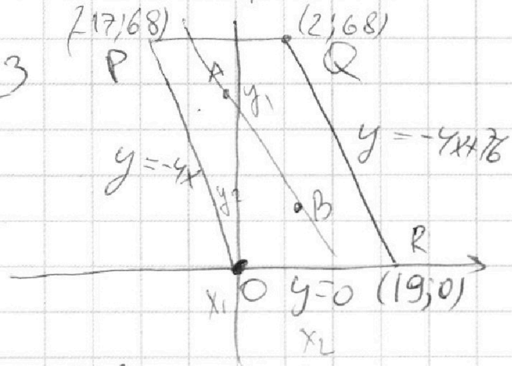




$y=68$

$343=7^3$

$y=0$



$RQ: \begin{cases}19a+b=0\\2a+b=68\end{cases} \quad \begin{cases}a=-4\\b=76\end{cases}$

$\cancel{19\cdot 34}$ $\quad 34\cdot 4+$

$343=7\cdot 49=7^3$

$AB=1{,}3BD=\frac{13}{3}AD$

$\frac{AD}{CE}-? \quad \frac{FB}{CE}= \quad \frac{AC}{CE}=\frac{AB}{FB} \quad CE=\frac{AC}{AB}\cdot FB$

$CE\cdot AB=AC\cdot BC-\frac{CE\cdot AC^2}{AD}$

$CE\cdot AB=AC\cdot(BC-CF)$

$CF=\frac{AC\cdot CE}{AD}$

$CE\cdot \frac{13}{3}AD=$

77 прямых $y=-4x+a$

$a\in[0;76]$, $a\in\mathbb{Z}$

$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot CD$

$y_2-y_1=-4x_2+\alpha$
$-4x_1+40-\alpha$

$S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}\cdot CE\cdot EF=\frac{1}{8}BD\cdot CD$

$\alpha\in[0;76]$

$\log_7^4 6x-2\log_7 6x=\frac{3}{2}\log_7 6x-4$

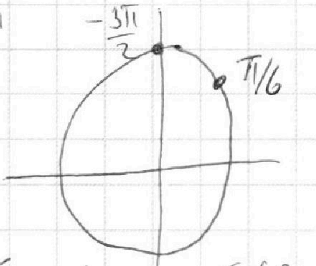
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cancel{\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3}}$



$x = 7b - 3ay$

$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi - 10\pi}{6} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$

$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi + 10\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$5c_2^2 - 45 = 14c_2k_2 + 4$

$k_2 = \frac{5c_2^2 - 49}{14c_2} = \frac{5c_2}{4} - \frac{49}{14c_2}$

$\pi - \frac{5\pi}{2} = \frac{-3\pi}{2}$

$\pi + \frac{5\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$

$\frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2}$

$c_2^2 - 9 = 9 \cdot \frac{(5c_2^2 - 49)^2}{14c_2^2}$

$\cancel{x = 7b - 3ay}$

$y = \frac{7b - x}{3a}$

$49^2 = 2500 + 1 - 100 = 2401$

$\cdot 9$

21609

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 = \end{cases}$ окр.

$\cancel{y^2 = v,\ x^2 = u}$

$\begin{cases} u + 3av - 7b = 0 \\ u + v - 9 = 0 \end{cases}$

$-y^2 = x^2 + 14x + 45.$

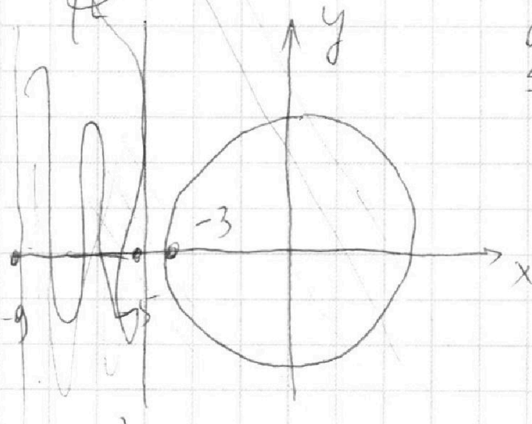
$\cancel{D_{/4} = 49 - 45 = 4}$

$-y^2 = (x+9)(x+5) \le 0$

≤ 0

$x\ [-9; -5]$

$y = \frac{7b - x}{3a}$



$\cancel{x + 3ay - 7b} = (x^2 + 14x + y^2 + 45)$

$(x + 7)^2 + y^2 = 4$

$y^2 + 45 \quad y_2 = k_2x + c_2$

$k_2x + c_2 =$

$9(25c_2^4 + 49^2 - 490c_2^2) = 196c_2^2(c_2^2 - 9)$

$29c_2^4 - 294 \cdot 9c_2^2 + \cancel{9 \cdot 2205 = 0}\ 21609 = 0$