



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 страница 1 из 1 (нумерация отдельная по каждому заданию)

Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \cdot p_1$
 $b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \cdot p_2$
 $c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3} \cdot p_3$, $p_i \in \{2, 3, 5\}$

$$\begin{array}{l} ab : 2^{\alpha_1+\beta_1} 3^{\alpha_2+\beta_2} 5^{\alpha_3+\beta_3} \Rightarrow \alpha_1+\beta_1 \geq 6, \alpha_2+\beta_2 \geq 13, \alpha_3+\beta_3 \geq 11 \\ bc : 2^{\beta_1+\gamma_1} 3^{\beta_2+\gamma_2} 5^{\beta_3+\gamma_3} \Rightarrow \beta_1+\gamma_1 \geq 14, \beta_2+\gamma_2 \geq 21, \beta_3+\gamma_3 \geq 13 \\ ac : 2^{\alpha_1+\gamma_1} 3^{\alpha_2+\gamma_2} 5^{\alpha_3+\gamma_3} \Rightarrow \alpha_1+\gamma_1 \geq 16, \alpha_2+\gamma_2 \geq 25, \alpha_3+\gamma_3 \geq 28 \end{array}$$

$abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3} p_1 p_2 p_3$
 При минимальном abc $p_1 = p_2 = p_3 = 1$

Уз ① $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$ пример на 18
 $(\alpha_1 = 4, \beta_1 = 2, \gamma_1 = 12)$

Уз ② $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 29,5$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow$
 $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$
 пример на 30 $(\alpha_2 = 9, \beta_2 = 4, \gamma_2 = 17)$

Уз ③ $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26$
 Предположим $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 26$
 Тогда $\left. \begin{array}{l} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 28 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta_3 = -2$ противоречие, $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 27$

Предположим $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 27$
 $\left. \begin{array}{l} \alpha_3 + \beta_3 = x \\ \beta_3 + \gamma_3 = y \\ \alpha_3 + \gamma_3 = z \end{array} \right\} \Rightarrow \beta_3 = \frac{x+y-z}{2}$, $x+y+z = 54$
 $\beta_3 = \frac{54-28}{2} \leq -1$ противоречие

Значит $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28$ пример на 28 $\alpha_3 = 13, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 15$

Наименьшее возможное значение $abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$
 пример $a = 2^4 3^9 5^{13}$, $b = 2^2 3^4$, $c = 2^{12} 3^{17} 5^{15}$

Ответ: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\sin x) = x - 2\pi$$

$$\arcsin(\sin x) = \frac{x - 2\pi}{5}$$

$$\sin x = t$$

$$x = \arcsin t + 2\pi k$$

$$\arcsin t = \frac{\arcsin t + 2\pi(k-1)}{5}$$

$$4 \arcsin t = 2\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{\pi(k-1)}{2}$$

$$\arcsin t = \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$$

$$t = \pm 1$$

$$\sqrt{81 - 6^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 4\pi$$

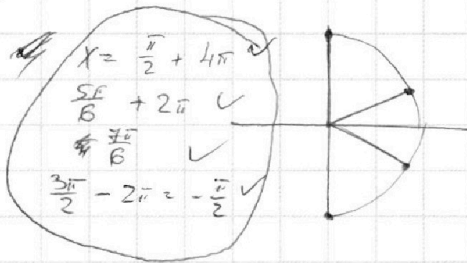
$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin t = \frac{\pi - \arcsin t + 2\pi k - 2\pi}{5}$$

$$6 \arcsin t = \pi + 2\pi k - \pi - 2\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k-1)}{3}$$

- $\arcsin t = \frac{\pi}{2} \quad k=2$
- $\arcsin t = \frac{\pi}{6} \quad k=1$
- $\arcsin t = -\frac{\pi}{6} \quad k=0$
- $\arcsin t = -\frac{\pi}{2} \quad k=-1$



$$\frac{5\pi}{6}$$

$$y^2 + 2y + 81 = 4$$

$$(y-9)^2$$

$$5x + 6ay - 6 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

$$\frac{1}{a} < -5$$

$$a > -\frac{1}{5}$$

$$-\frac{18\sqrt{2}}{5} a < 1$$

$$a > \frac{5}{-18\sqrt{2}}$$

$$5x + 6y + 6 = 0$$

$5x - 2 \cdot 28$
 $5x - 56$
 $x + y + z = 54$

$\frac{\pi}{2}$
 $\frac{7\pi}{6}$
 2π
 $\frac{5\pi}{6} + 2\pi$
 $\frac{\pi}{2} + 4\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

134

$$5x + 6ay^2 - b = 0$$

$$a = 0$$

$$a \neq 0$$

$$y = \frac{b - 5x}{6a}$$

$$= -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x - 6 \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 3 \cdot \frac{1}{21} - 5$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (x_1) + \log_{\frac{1}{2}} (x_2) = \log_{\frac{1}{2}} 3 \cdot \frac{1}{21} - 5$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (x_1 x_2) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{21} \right) - 5$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (x_1 x_2) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{7} \right) - 5$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (x_1 x_2) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^{10}} \right)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (x_1 x_2) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{7 \cdot 2^{10}} \right)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (x_1 x_2) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{7 \cdot 1024} \right)$$

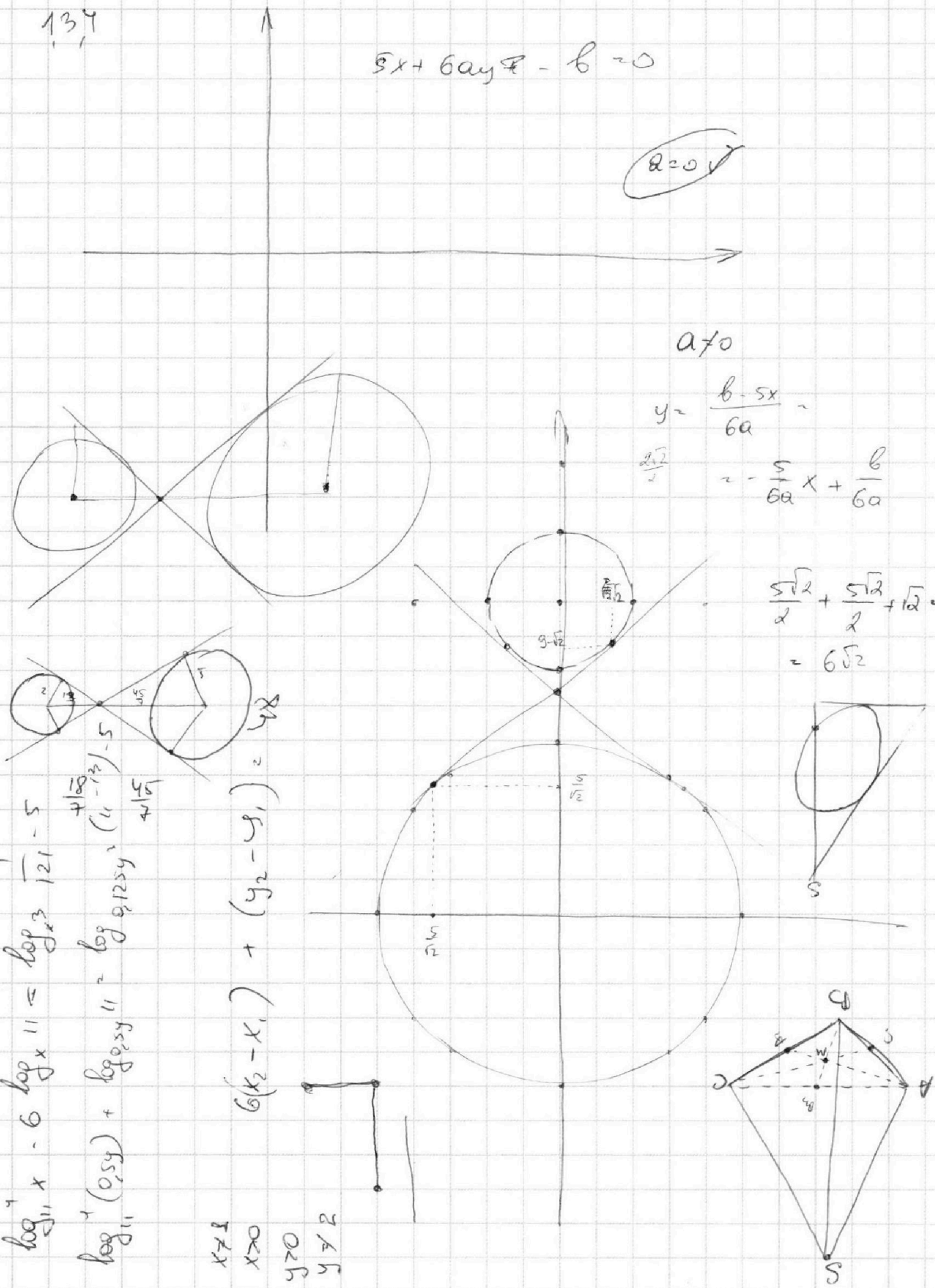
$$\log_{\frac{1}{2}} (x_1 x_2) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{7168} \right)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (x_1 x_2) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{7168} \right)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (x_1 x_2) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{7168} \right)$$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

- $x \neq 1$
- $x > 0$
- $y > 0$
- $y \neq 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

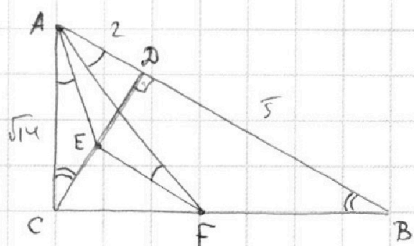
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2 страница 1 из 1



∠CAE = ∠EFA как угол между кас AC и хордой AE

∠EFA = ∠FAB как накрест лежащие

∠ACD = ∠CBA (ΔABC прямой, CD высота)

ΔCAE ~ ΔBAF по двум углам

$$\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB}$$

Положим отрезки приков нулю $AD = 2 \Rightarrow AB = 7 \Rightarrow AD = 2 \Rightarrow CD = \sqrt{10}$
 $AC = \sqrt{14}, BC = \sqrt{35}$

$$\frac{CE}{BF} = \frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \Rightarrow BF = CE \sqrt{\frac{7}{2}}$$

№3 ΔCEF ~ ΔCDB : $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$

$$\frac{CE}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{35} - CE \sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{35}}$$

$$CE \sqrt{\frac{2}{7}} + CE \frac{1}{\sqrt{10}} = 1 \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$S_{\Delta CEF} = \frac{5\sqrt{10}}{8} \quad (EF = 2,5)$$

$$S_{\Delta ACD} = \sqrt{10}$$

$$S_{\Delta ACD} : S_{\Delta CEF} = 8 : 5$$

Ответ: 8 : 5

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 страница 1 из 1

$$10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = x - 2\pi, \text{ заменим } \sin x = t \Rightarrow$$

$$1) \begin{cases} x = \arcsin t + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2) \begin{cases} x = \pi - \arcsin t + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

$$1) 5 \arcsin t = \arcsin t + 2\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{\pi(k-1)}{2}, \arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \end{cases} \begin{cases} \arcsin t = -\frac{\pi}{2} \\ \arcsin t = 0 \\ \arcsin t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = 2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 4\pi \end{cases}$$

$$2) 5 \arcsin t = \pi - \arcsin t + 2\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k-1)}{3}, \arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k=-1 \\ k=0 \\ k=1 \\ k=2 \end{cases} \begin{cases} \arcsin t = -\frac{\pi}{2} \\ \arcsin t = -\frac{\pi}{6} \\ \arcsin t = \frac{\pi}{6} \\ \arcsin t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 4\pi \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi; \frac{\pi}{2} + 4\pi\right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

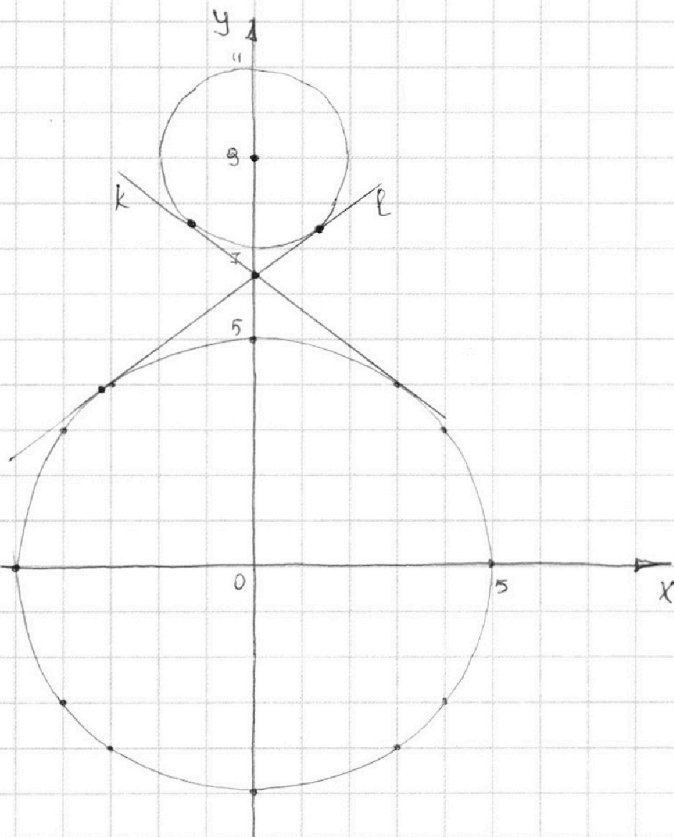
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 страница 1 из 2



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \quad - \text{ две окружности };$$

$$\omega_1: \text{ центр } O(0,0), r_1 = 5$$

$$\omega_2: \text{ центр } O(0,9), r_2 = 2$$

$$5x + 6ay - b = 0 \quad \text{прямая}$$

При $a = 0$ заметим, что $b = 0$ удовлетворяет условию, т.е.
прямая $x = 0$ пересекает окружности в 4х точках

Пусть $a \neq 0$, тогда

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} \quad \text{т.к. } b \text{ выбирается произвольно, то } a \text{ определяет}$$

только наклон прямой. Для любого

$$a \text{ подбором } b \text{ можно перевести прямую в любую параметрическую}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

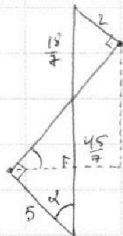
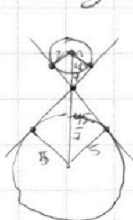


№4 страница 2 из 2

Пусть k и l общие внутренние касательные к
окр-гам

Из графика следует, что для любой прямой, коэфф
наклона которой больше 1 или меньше k (с уг. знаком)
параллельным переносом возмозжно добиться 4х точек
пересечения

Для прямой m уг. этому условию так сказать
невозм.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{7}$$

Решая нелинейную квадратическую задачу
получаем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{7}$, т.е. коэфф наклона l $\frac{3\sqrt{2}}{7}$
 k $-\frac{3\sqrt{2}}{7}$

$$-\frac{5}{6a} > \frac{3\sqrt{2}}{7}$$

$$-\frac{5}{6a} < -\frac{3\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{1}{a} < \frac{-18\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{1}{a} > \frac{18\sqrt{2}}{5}$$

$$0 > a > \frac{5}{-18\sqrt{2}}$$

$$0 < a < \frac{5}{18\sqrt{2}}$$

$a = 0$ такие порядки

Ответ: $\left(\frac{-5}{18\sqrt{2}}; \frac{5}{18\sqrt{2}} \right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15 страниц 1 из 1

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \cdot \frac{1}{121} - 5, \quad x > 0, x \neq 1$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_x 11} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\log_x 11} - 5, \quad \log_x 11 = t$$

$$t^4 - \frac{16}{3} t^{-1} + 5 = 0, \quad t \neq 0 \text{ т.к. } x \neq 1$$

$$(1) t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0 \quad \text{ровно одно решение, } x = 11^t$$

ровно одно решение исходного

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,5y} 3 \cdot (11^{-13}) - 5, \quad y > 0, y \neq 2$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} 0,5y} = -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5, \quad \log_{11} 0,5y = k$$

$$k^4 + \frac{1}{k} = -\frac{13}{3} k^{-1} - 5$$

$$k^4 + \frac{16}{3} \frac{1}{k} + 5 = 0, \quad k \neq 0, \text{ т.к. } 0,5y \neq 1$$

$$(2) k^5 + 5k + \frac{16}{3} = 0 \quad \text{ровно одно решение, } y = 2 \cdot 11^k$$

ровно одно решение исходного

Заметим, что если a - корень (1), то $(-a)$ - корень (2),
т.е. $k + t = 0$

$$xy = 11^t \cdot 2 \cdot 11^k = 2 \cdot 11^{t+k} = 2 \cdot 11^0 = 2$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

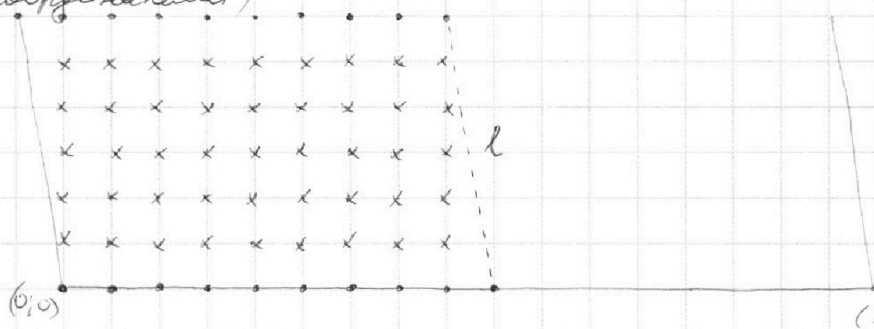
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 страница 1 из 1

Нетрудно заметить, что две точки $(x_1; y_1)$

ГМТ $(x_2; y_2)$ удовлетворяющих $6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$ -
прямая, проходящая через $(x_1 + 8; y_1)$ с коэф-ом
наклона -6 (Точка $(x_1 + 8; y_1)$ очев. подходит, остальные
получаются из неё шагом на и вправо и на
и вниз)

Заметим, что такая прямая пересекает параллелограмм
не более, чем в 16 ^{целых} точках $(90/6 + 1)$. Ровно в
16 точек пересекает нижнее основание в целых точках
(здесь и ранее целая точка - точка с целочисленными
координатами)



где \circ 16 пар
где \times 15 пар
(где \times ГМТ пер-
ост не в цел. точке)

Заметим, что для точек, лежащих правее l не найдётся
ни одной пары уд. усл. Для каждой ^{целой точки} на l и
правее найдётся 16 точек, если точка лежит
на ^{нижн.} основании или на прямой, параллельной нижней стороне
нижн. и пересекающей боковую в целой точке (\circ) или 15 точек
для всех других точек (\times)

16 прямых по 10 точек по 16 пар
15 прямоугольников по 45 точек по 15 пар

Итого $16^2 \cdot 10 + 15^2 \cdot 45 = 2560 + 225 \cdot 45 = 2560 + 10125 =$
 $= 12685$

Ответ: 12685

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

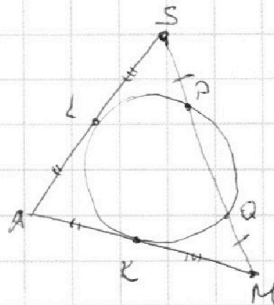
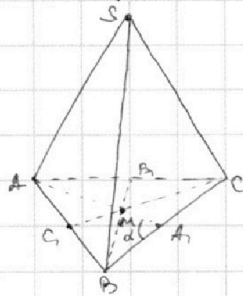
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7

страница 1 из 2



$\triangle SAM$ сечение сферы пл-стью ASM -
окр через L, K, P, Q

$AL = AK$ отрезки кас
 $SQ = MP$ суммы равных

$$LS^2 = SP \cdot SQ = QM \cdot MP = MK^2 \Rightarrow LS = MK \text{ (кас. ко внеш. часть)}$$

$AS = AM$, треуг. равнобедр.

$$AA_1 = \frac{3}{2} AM = \frac{3}{2} AS = \frac{3}{2} BC = 30$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AA_1 \cdot \sin \alpha$$

$$180 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{180}{300} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow \cos \alpha = 0,8$$

По т. кос $AB^2 = 900 + 100 - 0,4 \cdot 30 \cdot 10 = \sqrt{880}$
 ~~AB^2~~ $AB = \sqrt{880}$

$$AC^2 = 900 + 100 + 0,4 \cdot 30 \cdot 10 = \sqrt{1120}$$

медiana $= \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$, $a=20$, $b=\sqrt{880}$, $c=\sqrt{1120}$

$$\text{Высота}^2 = \frac{(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)}{4a^2}$$

$$= \frac{(4a^2b^2 + 4a^2c^2 - 2a^4 + 4b^4 + 4b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^4 + a^2c^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)}{4a^2}$$

$$= (2a^2b^2 + 5a^2c^2 + 2b^2c^2 + 4b^4 - 2a^4 - 2c^4)(2a^2 + 2c^2 - b^2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7 страница 2 из 2

$$= 4a^4 + 10a^4c^2 + 4a^2b^2c^2 + 8a^2b^4 - 4a^6 - 4a^2c^4 +$$

$$+ 2b^4 + 4a^2b^2c^2 + 10a^2c^4 + 4b^2c^4 + 2b^4c^2 - 4a^4c^2 - 4c^6 +$$

$$- 2a^2b^4 - 5a^2b^2c^2 - 2b^4c^2 - 4b^6 + 2a^4b^2 + 2b^2c^4 =$$

~

$$a = 20$$

$$b = \sqrt{810}$$

$$c = \sqrt{1120}$$



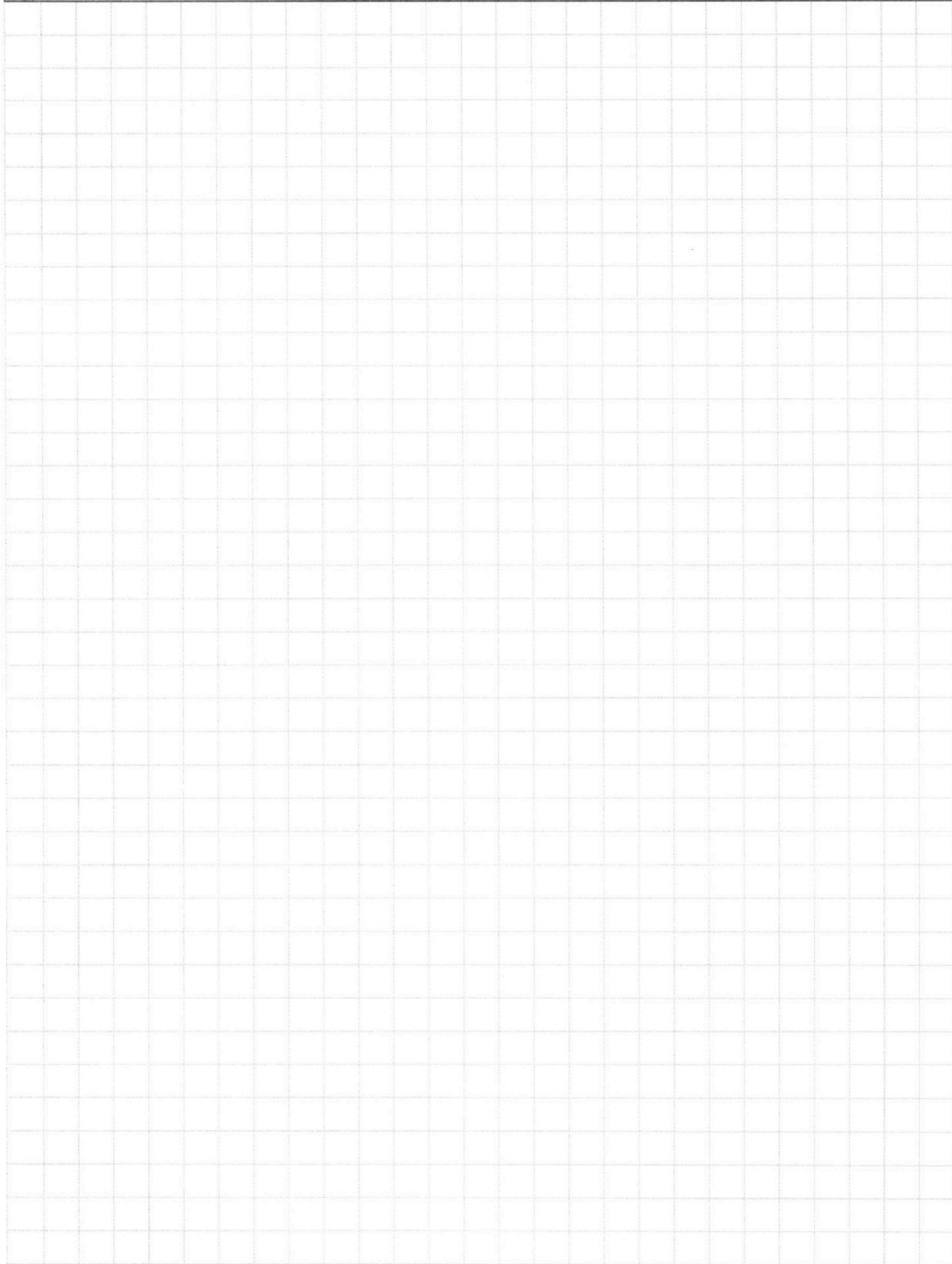
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

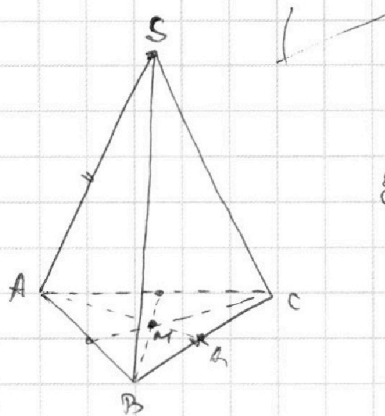
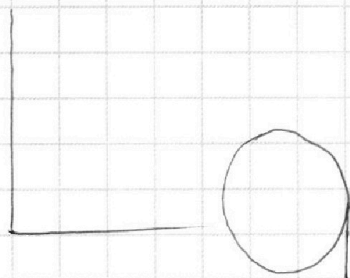


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2a^2$ $4a^2b^2$

$(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)$

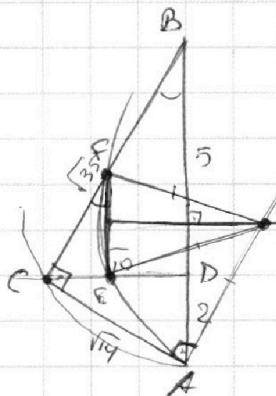


1000
 $2a^2$

$S_{\triangle ABC} = 180$
 $SA = SB = SC$

$AA_1 = \frac{3}{2} AS$

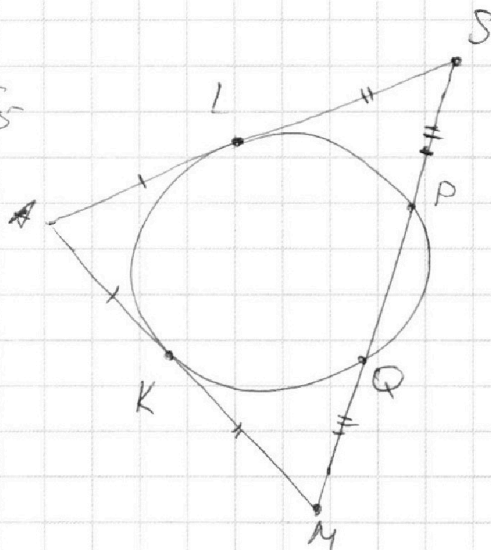
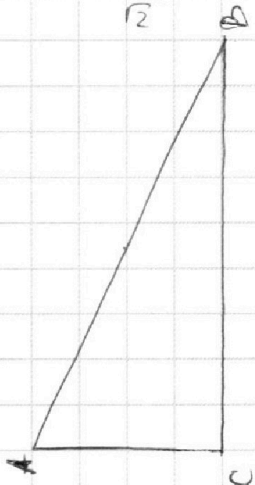
$AM = AS$



$\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{2.5}$

S
 d
 S



$PC \cdot AA_1 \cdot \sin$
 $PC \cdot AA_1 \cdot \sin$
 $PC \cdot AA_1 \cdot \sin$

$\frac{1}{2} \cdot PC \cdot 2AA_1 \cdot \sin$

is

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ab bc 38

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

a=1
b=2⁶ 3¹³ 5¹¹

d₂=9
p₂=4
r₂=17

$$\arccos(\sin x) = 0,9\pi - 0,2x$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 20\pi$$

$$0 \geq 2x - 9\pi \geq -20\pi$$

$$\sin x = t$$

$$x = \arcsin t + 2\pi k$$

$$d_2 + p_2 \geq 13$$

$$c = 2^8 3^8 5^2$$

$$0 \leq 0,9\pi - 0,2x \leq 2\pi$$

$$-0,9\pi \leq -0,2x \leq 1,1\pi$$

$$9\pi \geq 2x \geq -11\pi$$

$$d_2 + p_2 \geq 6$$

$$d_1 + p_1 \geq 6$$

$$p_1 + r_1 \geq 14$$

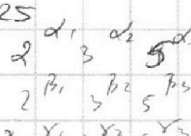
$$d_1 + r_1 \geq 16$$

$$\pi - \arcsin t + 2\pi k$$

$$p_2 + r_2 \geq 21$$

$$d_2 \geq$$

$$r_2 + d_2 \geq 25$$



$$d_3 + p_3 \geq 11$$

$$p_3 + r_3 \geq 13$$

$$r_3 + d_3 \geq 28$$

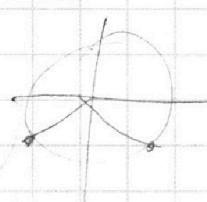
$$x \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

d₁=4
p₁=2
r₁=12

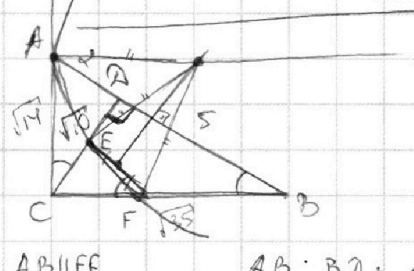
$$d_1 + p_1 + r_1 = 18$$

$$d_1 + p_2 + r_2 = 30$$

$$d_3 + p_3 + r_3 = 26$$

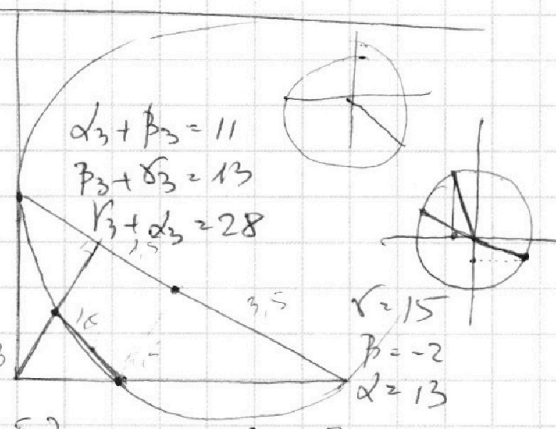


abc ≥ 2¹⁸ 3³⁰ 5²⁶



$$\frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF}$$

AB || EF AB : BD = 14



$$d_3 + p_3 = 11$$

$$p_3 + r_3 = 13$$

$$r_3 + d_3 = 28$$

$$\frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} = \frac{AC \cdot CD}{CF \cdot FE}$$

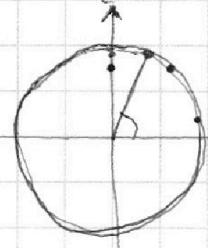
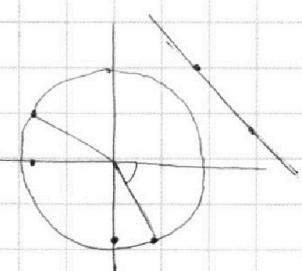
$$x \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$\sin x \in [0; 1]$$

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CF}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) = 0,9\pi - 0,2x$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$



$$10 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10 \arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x \neq 0$ $x \neq 1$
 $y > 0$ $y \neq 2$

$$\log^4 x - 6 \log^2 x = \log^2 x^2 \cdot \frac{1}{12} - 5$$

$$\log^4 x - \frac{6}{\log^2 x} = -2 \log^2 x - 5 = -2 \frac{1}{3} \log^2 x - 5$$

$$\log^4 x - \frac{6}{\log^2 x} = -\frac{2}{3} \log^2 x - 5$$

$$\frac{1}{4} - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}t - 5$$

$$\log^4 (\log^2 x) + \log^2 x = \log^2 (11^{-13}) - 5$$

$$\log^4 z + \frac{1}{\log^2 z} = -13 \frac{1}{3} \log^2 z - 5$$

$$k^4 + \frac{1}{k} = -\frac{13}{3}k - 5$$

$$k^4 + \left(\frac{13}{3} + \frac{1}{3}\right) \frac{1}{k} + 5 = 0$$

$$k^4 + \frac{16}{3k} + 5 = 0$$

$$t^5 k^5 + 5(k+t) = 0$$

$$(t+k)(t^4 - t^3 k + t^2 k^2 - t k^3 + k^4) + 5(t+k) = 0$$

$$- \frac{2}{3 \log^2 x}$$

$$t^5 k^5$$

$$z = 556$$

ky

$$\log^2 z = 7 + 7$$

$$x^2 = 11$$

$$k y = \frac{11(k+k)}{2}$$

$$k+t=0$$

$$k^4 = 0$$

$$k^5 + 5k + \frac{16}{3} = 0$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$t^4 \left(-\frac{18}{3} + \frac{2}{3}\right) t + \frac{1}{3} + 5 = 0$$

$$t^4 - \frac{16}{3} + 5 = 0$$