МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} \left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1. Пусть $a_2; b_2; c_2$ - кол-во двоек в разложении на простые соотв. чисел a, b, c. (макс. степень двойки, явл. делителем a, b, c)

Аналогично $a_3; b_3; c_3$ - тройки

$a_5; b_5; c_5$ - пятерки.

Тогда по условию:

$a_2 + b_2 \geq 9$; $b_2 + c_2 \geq 14$; $a_2 + c_2 \geq 19$

Сложим эти неравенства

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42 \Leftrightarrow (a_2 + b_2 + c_2) \geq 21$$

макс. степень двойки, явл. делит. abc (по св-ву $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$)

С тройками:

$a_3 + b_3 \geq 10$ $b_3 + c_3 \geq 13$ $a_3 + c_3 \geq 18$

$$2(\underbrace{a_3 + b_3 + c_3}_{\text{целое}}) \geq 41 \Rightarrow \underbrace{a_3 + b_3 + c_3}_{\text{макс. ст. тройки в разлож. } abc} \geq 21$$

С пятерками

$a_5 + b_5 \geq 10$ $b_5 + c_5 \geq 13$ $a_5 + c_5 \geq 30$

$$2(\underbrace{a_5 + b_5 + c_5}_{\text{целое}}) \geq 53 \Rightarrow \underbrace{a_5 + b_5 + c_5}_{\text{макс. степень „5" в разложении } abc} \geq 27.$$

Число abc кратно числу $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

Значит, минимальное значение abc равно $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$.

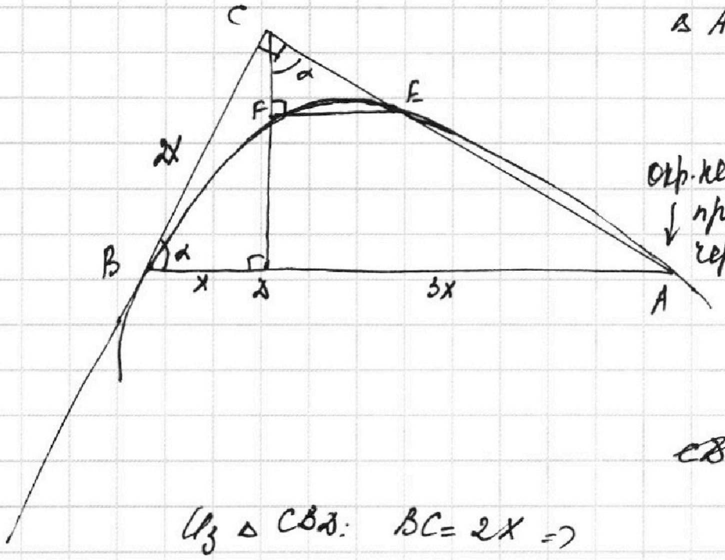
Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2



По острым углам
$\triangle ABC \sim \triangle CBD \sim \triangle ACD \sim ECF$

$\angle ABC = \angle ACD = \alpha$.

из $\triangle CBD$:

$tg\alpha = \frac{CD}{x} \Rightarrow CD = x\,tg\alpha$

из $\triangle ADC$:

$tg\alpha = \frac{3x}{CD}$

$tg\alpha = \frac{3x}{x\,tg\alpha}$

$tg^2\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

Из $\triangle CBD$: $BC = 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 2x\sqrt{3}$

По свойству окр. кас. и сек.

$CB^2 = CE \cdot AC \Rightarrow 4x^2 = CE \cdot 2x\sqrt{3} \Rightarrow CE = \frac{2x\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}AC$.

$\triangle ECF \sim \triangle ACD$ с коэффиц. $\frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ACD} = 9\,S_{ECF}$

~~$\triangle ABC \sim \triangle ACD$ с коэфф.~~

$S_{ACD} = \frac{1}{2}CD \cdot 3x$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}CD \cdot 4x \Rightarrow S_{ABC} = \frac{4}{3}S_{ACD} =$

$= 12\,S_{CEF}$

Ответ: 12.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

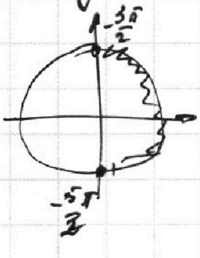
Задача 3

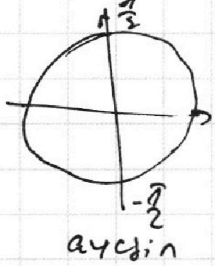
$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\arcsin\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$ (1)

Пусть $y = x + \frac{\pi}{2}$. Тогда $5\arcsin(\sin y) = y$

ОДЗ: $\frac{y}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Рассм. случаи





arcsin

1) $y \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$:

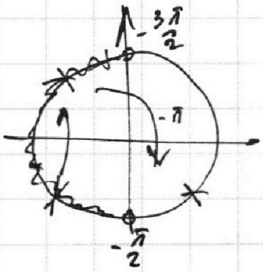
$\arcsin(\sin y) = y + 2\pi$

(1): $(y+2\pi)\cdot 5 = y$

$4y = -10\pi$

$\boxed{y = -\frac{5\pi}{2}}$ Обр. зам. $x = -3\pi$

2) $y \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$



$\arcsin(\sin y) = -y - \pi$

(1): $(-y-\pi)\cdot 5 = y$

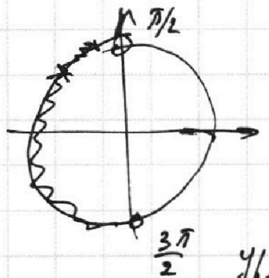
$6y = -5\pi$

$\boxed{y = -\frac{5\pi}{6}} \Rightarrow$ Обр. зам. $x = -\frac{4\pi}{3}$.

3) $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin y) = y$

(1): $5y = y \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$

4) $y \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$: $\arcsin(\sin y) = \pi - y$



(1): $5(\pi - y) = y \Rightarrow \boxed{y = \frac{5\pi}{6}} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$ Обр. зам.

5) $y \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin y) = y - 2\pi$

(1): $5(y - 2\pi) = y$

$4y = 10\pi \Rightarrow \boxed{y = \frac{5\pi}{2}} \Rightarrow$ Обр. зам. $x = 2\pi$.

Уравнение рассмотрено на всей ОДЗ $\Rightarrow$ других корней нет.

Ответ: -3π; $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{4\pi}{3}$; 2π.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

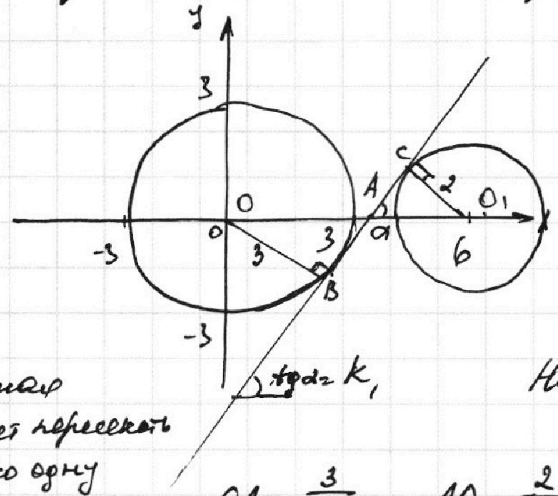
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 | Решим систему графически.

2-ое уравнение — 2 окружности: $((0;0);3)$ и $((6;0);2)$.

1-ое уравнение — прямая. $y=kx+3,6$ (замена $k=-\frac{a}{2}$)

4 решения $\Rightarrow$ 4 точки пересечения.



При коэффициенте наклона меньше k_1 и больше $-k_1$ (картинка симметрична отн. OX) можно подобрать b такой, чтобы было 4 пересечения при большем коэфф. наклона это сделать невозможно.*

Найдем этот критический угол наклона.

* прямая будет пересекать только одну из окружностей

$OA=\frac{3}{\sin a}$ $\quad AO_1=\frac{2}{\sin a} \Rightarrow OO_1=\frac{5}{\sin\alpha}=6$

$\sin\alpha=\frac{5}{6} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow tg\,a=\frac{5}{\sqrt{11}}$

Крит. знач. $k_1=\frac{5\sqrt{11}}{11}$ и соотв. $-k_1=-\frac{5\sqrt{11}}{11}$.

Чтобы выполнялось условие:

$k\in\left(-\frac{5\sqrt{11}}{11};\frac{5\sqrt{11}}{11}\right)$.

Обратная замена $a=-2k \Rightarrow a\in\left(-\frac{10\sqrt{11}}{11};\frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{10\sqrt{11}}{11};\frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5

(1) $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

(2) $\log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

ОДЗ: $\begin{cases} x; y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$

(1): $\log_3^4 x + \dfrac{6}{\log_3 x} = \dfrac{5}{2}\dfrac{1}{\log_3 x} - 8$

$\log_3^4 x + \dfrac{7}{2\log_3 x} + 8 = 0 \quad /\cdot 2\log_3 x \to \log_3^4 x + 8 > 0 \Rightarrow \log_3 x < 0.$

$2\log_3^5 x + 16\log_3 x + 7 = 0 \; (*)$

(2): Пусть $t = 5y$

$\log_3^4 t + \dfrac{2}{\log_3 t} = \dfrac{11}{2}\dfrac{1}{\log_3 t} - 8 \quad /\cdot 2\log_3 t \longrightarrow \log_3 t > 0$

$2\log_3^5 t + 4 - 11 + 16\log_3 t = 0$

$2\log_3^5 t + 16\log_3 t - 7 = 0 \; (**)$

Сложим (*) и (**): $2(\log_3^5 t + \log_3^5 x) + 16(\log_3 x + \log_3 t) = 0 /:2$

$(\log_3 t + \log_3 x)(8 + \underbrace{\ldots\ldots}_{>0\,*}) = 0$

(по разл. суммы степеней)

Ед. решение $\log_3 t + \log_3 x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 tx = 0 \Rightarrow tx = 3$

Обр. замена $t = 5y \Rightarrow 5yx = 3 \Rightarrow xy = 0,6$

Ответ: 0,6.

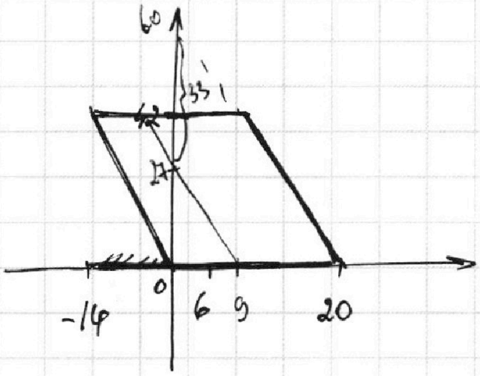
* пояснение

$\log_3^5 t + \log_3^5 x = (\log_3 t + \log_3 x)^5 - 5\cdot \log_3 t \log_3 x \cdot (\log_3 t + \log_3 x)^3 =$

$= (\log_3 t + \log_3 x)\left(\underbrace{(\log_3 t + \log_3 x)^4}_{\geq 0} - 5\cdot \underbrace{\log_3 t}_{>0} \cdot \underbrace{\log_3 x}_{<0} \cdot \underbrace{(\log_3 t + \log_3 x)^2}_{\geq 0}\right)$

при $\log_3 tx \neq 0$ скобка положительна.

Задача 6



Существуют отрезки, для всех точек которых ~~вполне~~ одинаково значение $3x+y$.
Эти отрезки параллельны наклонным* сторонам параллелограмма.
Причем значение $3x+y$ для каждого отрезка равно утроенному значению абсциссы точки, прин. этому отрезку и Ox.
Всего таких отрезков (с разными целыми $3x+y$) 21

*абсцисса отрезка — абсцисса точки пересеч. с осью x.

Выполнение условия ~~...~~ $(3x_2+y_2)-(3x_1+y_1)=33$
означает, что отрезки 1 и 2 (на которых лежат $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$)
отличаются по абсциссе на 11. (соседние отрезки отлич. на 3)
Для всех точек параллелограмма (и внутри)
выполнено условие $(3x+y)\in[0;60]$.

Значит максимальное значение $(3x_1+y_1)$ равно 27, соотв. отрезок с абсциссой 9.

Теперь задача заключается в том, чтобы поставить в соответствие каждому ~~...~~ отрезку с абсц. от 0 до 9 отрезок с абсциссой на 11 большей. Это можно сделать единственным способом. В каждом отрезке по 15 целых точек.
Поэтому для одной пары отрезков пару точек можно выбрать 225 способами. => всего способов 2250.
(10 пар отрезков)

Ответ: 2250.

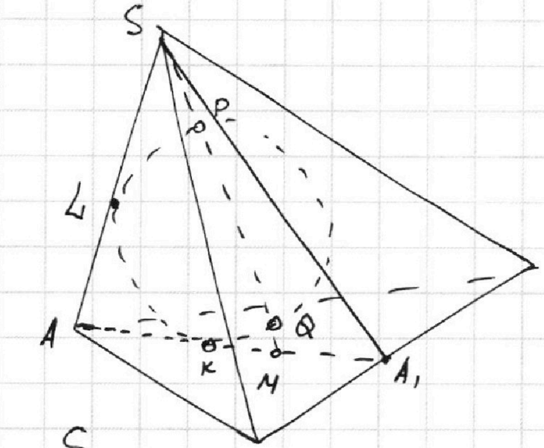
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

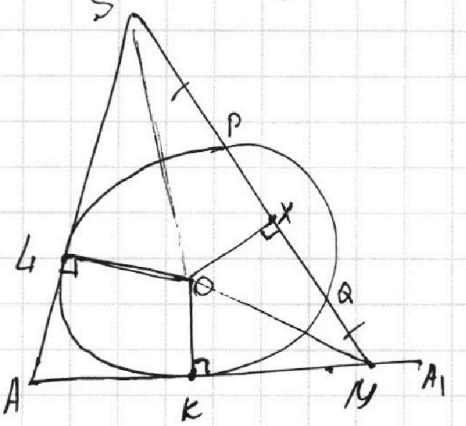
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

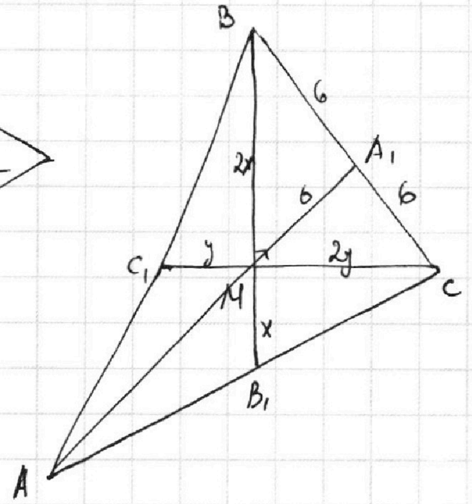
МФТИ

Задача 7.





а) Построим плоскость (ASA_1)
Рассмотрим сечение ей сферы и пирамиды.



Отметим середину хорды PQ — т. X
по св-ву $OX \perp PQ$ (т.к. $PO = OQ$)
По усл. $SP = MQ \Rightarrow SX = XM \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle SOM$ - р/б по признаку (совп. медиана и высота) $\Rightarrow$
$\Rightarrow SO = OM \Rightarrow$ по катету и гипотенузе
$\triangle SOL = \triangle MOK \Rightarrow MK = SL$.
как отрезки касательных $AL = AK \Rightarrow$
$\Rightarrow AS = AM = 12 \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 18 \Rightarrow$
св-во т. ц. т.
$\Rightarrow MA_1 = 6 = BA_1 = CA_1$
В $\triangle BMC$ медиана равна $\frac{1}{2}$ стороны, к которой проведена $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BMC = 90°$

По св-ву центра тяжести
$S_{AMB} = S_{BMC} = S_{AMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = 30$
Пусть $BM = 2x$, тогда $MB_1 = x$
$CM = 2y$, тогда $MC_1 = y$.
$S_{BMC} = 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{4xy}{2} = 30 \quad xy = 15$.

$xy = 15 \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = 9xy = 9 \cdot 15$ тогда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 9 \cdot 15 =$
$= 81 \cdot 30 = 2430$

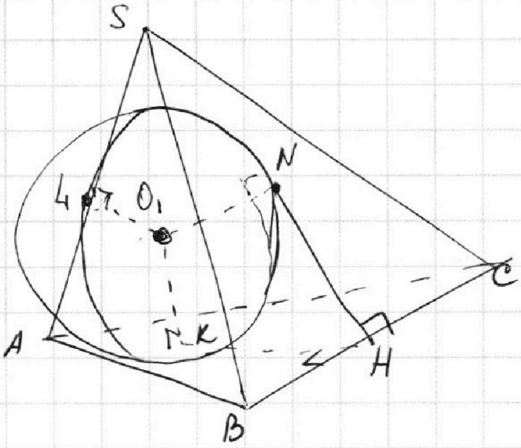
Ответ: 2430.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7 б).



O_1 – ц. сферы

$O_1K \perp (ABC) \Rightarrow O_1K \perp BC$

$O_1N \perp (BSC) \Rightarrow O_1N \perp BC$

$BC \perp (NOK) \Rightarrow$ двугр. угол равен углу $\angle NHK$

Как отр. кас. $SL = SN = 4$

$NH = HK$.

$AK = AL = 8$ $\quad KM = 2$.

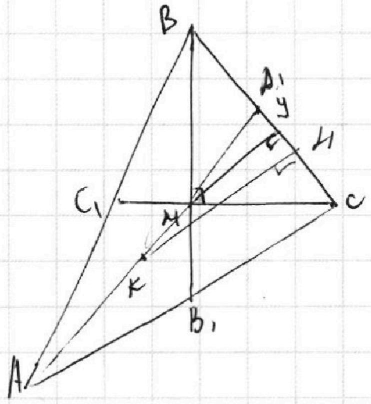
Опустим высоты из M и K

$MY = \frac{2 \cdot 30}{12} = 5$ (S_{BMC})

$MA_1 = 6$ $\quad A_1K = 4 + 6 = 10$.

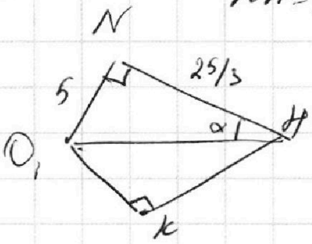
из подобия

$KH = MY \cdot \frac{10}{6} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$.



Как отр. кас.

$NH = HK = \frac{25}{3}$



$tg\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NHK = 2\, arctg\, 0,6$

Ответ: $2\, arctg\, 0,6$.

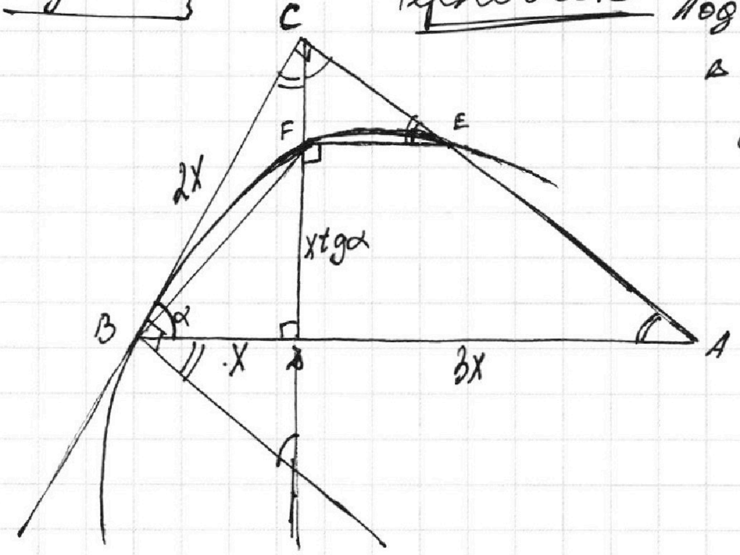
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Черновик



Подобие

$\triangle ABC \sim \triangle CBD \sim \triangle ECF \sim \triangle ACD$.

$CE : CA = EF : AD$

$$\frac{3x}{x\,tg\alpha} = tg\alpha$$

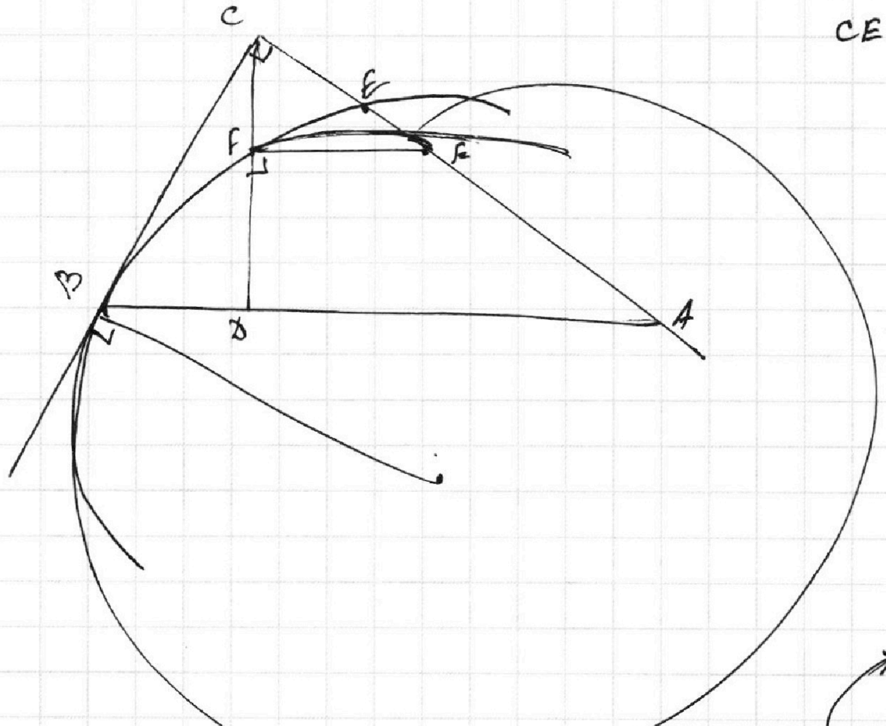
$$tg^2\alpha = 3$$

$$\alpha = 60^\circ.$$

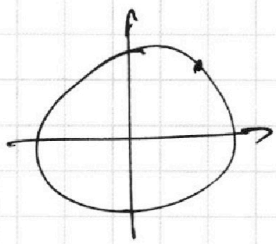
$$AC = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2x\sqrt{3}.$$

$$4x^2 = CE \cdot 2x\sqrt{3}$$

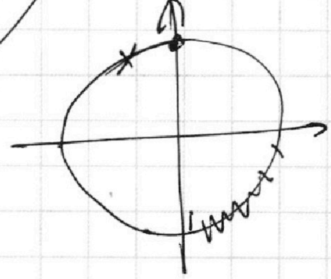
$$CE = \frac{2x\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}AC.$$



9



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$



$$5\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} + x$$

$$5\arcsin\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} + x.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3 Черновик

$5\arcsin(\cos x) = x+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\arcsin\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = x+\frac{\pi}{2}.$

~~Рассмотрим $\arcsin(\sin a)$. Оно возвращает угол~~

~~a — в первой четверти $\Rightarrow \arcsin(\sin a) = a+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$:~~

~~$a+2\pi n \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.~~

~~a — во второй четверти~~

$y = x+\frac{\pi}{2}$

$\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. $-\frac{3\pi}{5} \le \frac{x}{5} \le \frac{2\pi}{5}$. $x\in[-3\pi;2\pi]$.

~~1) $x\in\left[-3\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$~~

$y \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

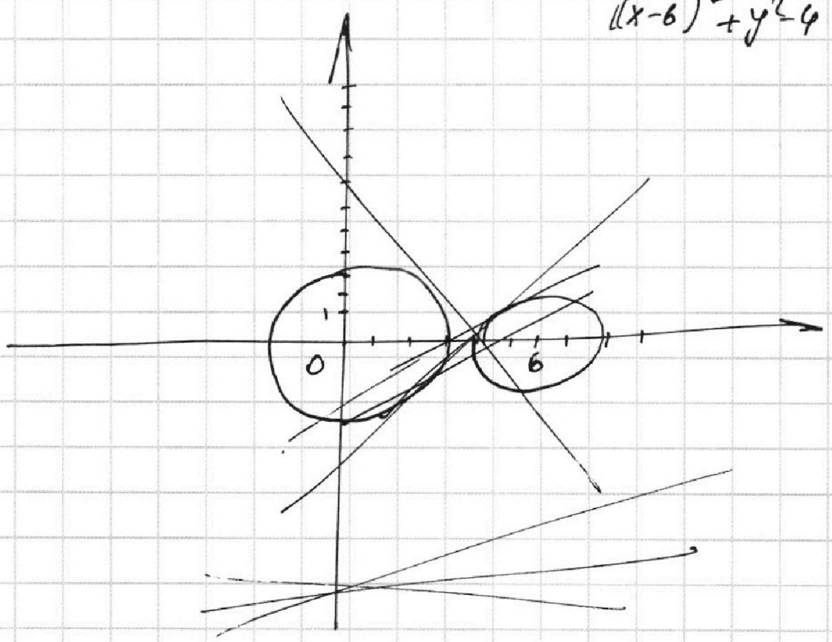
1) $y\in\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3}{2}\pi\right]$: $\arcsin(\sin y) = y+2\pi$.

2) $y \in \left[-\frac{3\pi}{2}\right.$

(4) $ax+2y-3b=0$. $y = -\frac{a}{2}x+3b$. ~~прям~~ — прямые.

$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0$. окр.

$(x-6)^2+y^2=4$



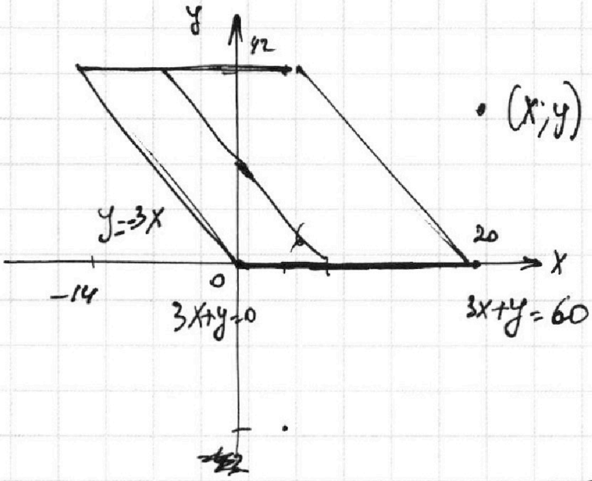
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6



$\cdot\ (x;y)$

$3(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=33$

$y_2-y_1 \vdots 3$

1) $x_2-x_1=0 \Rightarrow y_2-y_1=33.$

для каждой из точек параллелограмма

$x+3y \in [0;60]. \Rightarrow$

~~$\Rightarrow$ макс $3x_2+y_2=3$~~

Для каждого значения

$3x_1+y_1$ существует ровно 1 отрезок $3x_2+y_2$, такой что вып. усл.

а это отрезок из 16 целых точек

т.к. $x+3y \leq 60$, то

$3x_1+y_1 \in [0;27]$.

Этому условию уд. 10 отрезков

$10\cdot16\cdot15=2250$

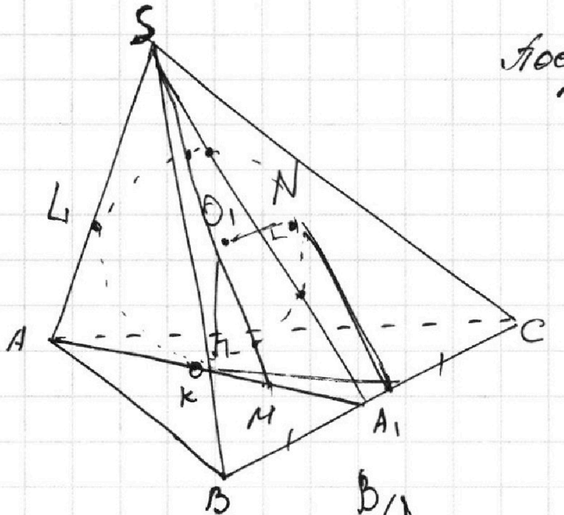
Черн.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

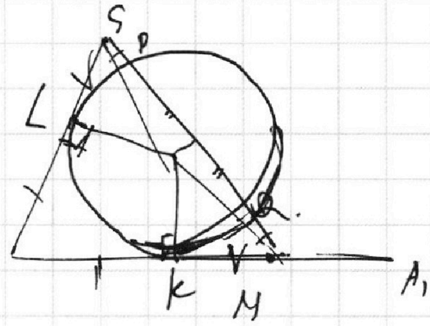
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(7)

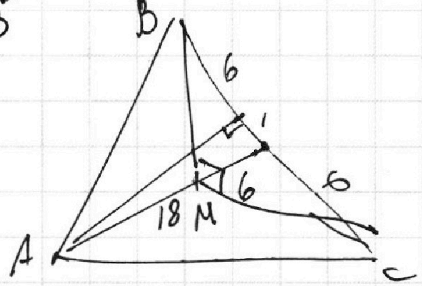


Построим плоскость
(ASA_1)



$SA = AM$

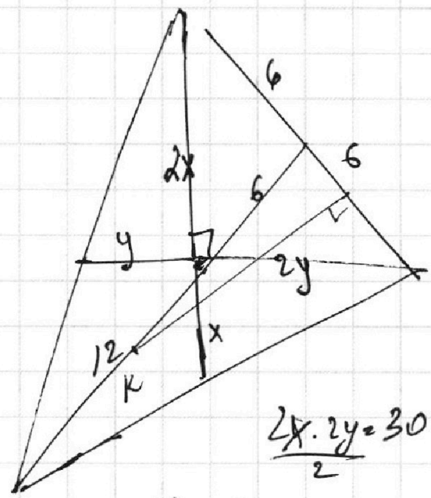
$AB = \frac{3}{2} SA = 18$



O_1 - ц. сферы.

$O_1K \perp (ABC)$

$O_1N \perp (BSC)$.



$\frac{2x \cdot 2y}{2} = 30$

$18 \cdot 15 =$

Черн.

$(x+y)^5 = x^5 + \underbrace{5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4} + y^7.$

$x^5 + y^7 = (x+y)(x^4$ $\quad 5xy(\cancel{x^3} + 3x^2y + 3xy^2 +$