



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если хотя бы одно из чисел  $a, b$  и  $c$  делится на простое, отличное от  $2, 3$  и  $5$ , то можно рассмотреть такую

тройку  $a, b, c$ , где из разложения числа, в котором было это простое, это простое убрать. Тогда условия не нарушатся, а произведение уменьшится.

Тогда  $a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$ ;  $b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$ ;  $c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$ , где  $x_i, y_i, z_i$  - натуральные числа.

$$\text{Из условия } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 13 \\ x_1 + x_3 \geq 14 \end{cases}$$

Если сложить все нерав.

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 34 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 17$$

Трехки 17 достигается при  $x_1 = 4; x_2 = 3; x_3 = 10$  (и все условия выполняются)

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 11 \\ y_2 + y_3 \geq 15 \\ y_3 + y_1 \geq 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 43 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 21.5 \end{cases} \Rightarrow$$

Но это натуральные числа

Пример на 22:  $y_1 = 7; y_2 = 5; y_3 = 10$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 22$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \geq 14 \\ z_2 + z_3 \geq 18 \\ z_1 + z_3 \geq 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 \geq 43 \\ z_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 \geq 43$$

Пример, когда достигается:  $z_1 = 20; z_2 = 0; z_3 = 23$ .

Итого  $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ , причем равенство достигается.

Ответ: наим. знач. равно  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

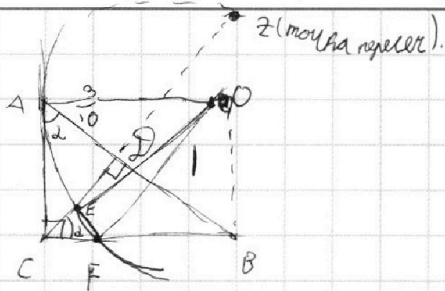
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $CD$  - высота

$(AB) \parallel (EF)$

$$\frac{|AB|}{|BD|} = 1,3$$

$$\text{Найти: } \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$$

И.к. нам не даны размеры, а лишь отношения, применим

~~свойства~~ подобия  $\triangle BDE$  и  $\triangle CDF$  условия. Тогда  $|AD| = 0,3$

$\angle DCB = \alpha$ . Тогда в силу подобия  $\angle CAE = \alpha$

$$\text{Тогда } \tan \alpha = \frac{|CD|}{0,3} = \frac{1}{|CD|} \Rightarrow |CD| = \sqrt{0,3} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

$$\text{Следовательно } |BC| = \sqrt{0,3 + 1} = \frac{\sqrt{130}}{10}$$

$$|AC| = \sqrt{0,3 + 0,09} = \sqrt{0,39} = \frac{\sqrt{39}}{10}$$

По  $(EF) \parallel (BD) \Rightarrow \angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$

Значит,  $\triangle CEF \sim \triangle CDB$  (угол с коэффициентом  $k$ )

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ACD}}{k^2 S_{CDB}} = \frac{\frac{1}{2} |CD| \cdot |AD|}{k^2 \cdot \frac{1}{2} |CD| \cdot |BD|} = \frac{0,3}{k^2}$$

Сначала найдем  $k$

$(AC)$  - гипотенуза  $\triangle ACD \Rightarrow (AO) \parallel (CF)$

$\angle CEF = 90^\circ \Rightarrow FE \perp EF$  определяет направление  $[FZ]$  - диаметр  $\triangle FZ$

Тогда  $|EF| =$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Известно, что  $\forall x \in [0; \pi]$   $\arccos(\sin x) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x))$

Тогда  $\forall x \in [0; \pi]$   $5 \arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$

Тогда  $\frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi] \Leftrightarrow x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

Рассмотрим различные варианты  $x$ :

1.  $x \in [-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}]$

Тогда  $\frac{\pi}{2} - x \in [2\pi; \pi]$ . Ур-ие имеет вид:

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 5 \cdot (2\pi - (\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow \frac{15\pi}{2} + 5x = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$$

2.  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Тогда  $\frac{\pi}{2} - x \in (0; \pi]$ . Ур-ие имеет вид:

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow \pi = 6x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

3.  $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

Тогда  $\frac{\pi}{2} - x \in (-\pi; 0]$ . Ур-ие имеет вид:

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 5 \cdot (x - \frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 4x = 4\pi \Leftrightarrow x = \pi$$

4.  $x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$

Тогда  $\frac{\pi}{2} - x \in (-2\pi; -\pi]$ . Ур-ие имеет вид:

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x + 2\pi) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow \frac{25\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 6x \Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{6}$$

5.  $x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

Тогда  $\frac{\pi}{2} - x \in (-3\pi; -2\pi]$ . Ур-ие имеет вид:

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 5 \cdot (x - \frac{\pi}{2} + 2\pi) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow \frac{25\pi}{2} + 5x = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Запомним, что мы проверим все возможные для  $x$  значения исходя  
из ограничений. Все найденные значения внутри интервалов и нам подходят.

Ответ:  $\left\{ -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2} \right\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что условие  $x + 3ay - 7b = 0$  задает прямую, а

условие  $(x^2 + 14x + b^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$  - две окружн.

Тогда ровно 4 решения, если дискриминант каждого из этих двух

уравнений больше 0, после подстановки  $x$ , выразившего из уравнения прямой.

4) Как не ~~было~~ нет ограничений на  $a$  и  $b$  (целость и т.п.), тогда заменим для удобства  $3a$  на  $a$ ,  $7b$  на  $b$ , а затем в конце решения перейдем обратно

т.е.  $x = b_1 - a_1 y$

1-ое уравне:  $(b_1 - a_1 y + 7)^2 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (b_1 + 7)^2 - 2(b_1 + 7)a_1 + (a_1^2 + 1)y^2 - 4 = 0$

$D_1 = 4(b_1 + 7)^2 a_1^2 - 4((b_1 + 7)^2 - 4)(a_1^2 + 1) = 4 \cdot (4a_1^2 - (b_1 + 7)^2 + 4)$

$D_1 > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{a_1^2 + 1} > |b_1 + 7| \Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 + 1} > \frac{|b_1 + 7|}{2}$

2-ое уравне:  $b_1^2 - 2a_1 b_1 y + y^2(1 + a_1^2) - 9 = 0$

$D_2 = 4a_1^2 b_1^2 - 4(b_1^2 - 9)(1 + a_1^2) = 4 \cdot (9a_1^2 - b_1^2 + 9)$

$D_2 > 0 \Leftrightarrow 9a_1^2 - b_1^2 + 9 > 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{a_1^2 + 1} > |b_1| \Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 + 1} > \frac{|b_1|}{3}$

Заметим, что мы выбрали  $b_1$ , исходя из выбора  $a_1$ , но существует ограничение, что

$\sqrt{a_1^2 + 1} > \max\left(\frac{|b_1|}{3}; \frac{|b_1 + 7|}{2}\right)$ . Но в силу вида этих функций, максимум

из них минимален в точке их пересечения, т.е.  $\frac{|b_1|}{3} = \frac{|b_1 + 7|}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2|b_1| = 3|b_1 + 7| \Leftrightarrow -2b_1 = 3b_1 + 21 \Rightarrow b_1 = -\frac{21}{5}$  - оптимальный выбор.

Тогда  $\sqrt{a_1^2 + 1} > \frac{|b_1|}{3} = \frac{7}{5} \Rightarrow a_1^2 + 1 > \frac{49}{25} \Leftrightarrow a_1 > \frac{2\sqrt{6}}{5}$

Возвращаясь к  $a$ :  $3a = a_1 \Rightarrow \begin{cases} a > \frac{2\sqrt{6}}{15} \\ a < -\frac{2\sqrt{6}}{15} \end{cases}$

Ответ:  $(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим первое уравнение:

ОДЗ:  $x + \frac{1}{6} > 0$   
 $x > 0$

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_7 7 = \log_{36}^{343} - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_7^4(6x) = 2 \log_7 7 + \frac{3}{2} \log_7 7 - 4 \Leftrightarrow \log_7^4(6x) = 2 + \frac{3}{2} - 4 = -\frac{1}{2}$$

По ОДЗ  $t > 0$

Положим второе:

ОДЗ:  $y \neq 1$   
 $y > 0$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 7 = \log_{7^2} (7^5) - 4 \Leftrightarrow \log_7^4 y = -\frac{7}{2} \log_7 7 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^4 = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{a} - 4 \Leftrightarrow 2a^5 + 7a + 7 = 0 \quad (2)$$

Пусть  $a$ ,  $u$ ,  $t$  - корни ~~уравнения~~ полученные нами ур-ий.

Тогда  $a + t_1 = \log_7(6xy) \Leftrightarrow 7^{a+t_1} = 6xy \Leftrightarrow xy = \frac{7^{a+t_1}}{6}$

Значит, если мы найдем всевозможные корни  $a$  и  $t$ , то найдем и все возможные произведения  $xy$ .

Сложим ур-ия (1) и (2), получим:  $2a^5 + 2t^5 + 7a + 7t = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a+t)(a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4) + 4(a+t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+t=0 \\ a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 4 = 0 \end{cases}$$

Докажем, что у второго ур-ия нет решений. Пусть, не умаляя общности,  $|a| \geq |t|$ .

1.  $|a| < 1$

Тогда  $a^4 \geq 0$

$| -a^3t | < 1$

$a^2t^2 \geq 0$

$| -at^3 | < 1$

$t^4 \geq 0$

$$\Rightarrow a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 > -2 \Rightarrow a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 4 > 2 > 0$$

2.  $|a| \geq 1$

Тогда  $a^4 - a^3t \geq 0$

$a^2t^2 - at^3 \geq 0$

$t^4 \geq 0$

$4 > 0$

$$\Rightarrow a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 4 > 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом, в обоих случаях уравнение корней иметь не может.

После необходимых условий, тогда  $a$  и  $t$  будут корнями ур-ий (2) и (1)

Вытекает  $a+t=0$ . Заметим, что существуют  $a$  и  $t$ , ур-е. ОДЗ.

Значит, единственным возможным вариантом (и он достигается) для суммы  $a+t$  является  $a+t=0$

Но тогда по формуле ранее

$$x_b = \frac{7^{a+t}}{6} = \frac{1}{6}, \text{ что и будет единственным возможным вариантом произведения.}$$

Ответ:  $\left\{ \frac{1}{6} \right\}$



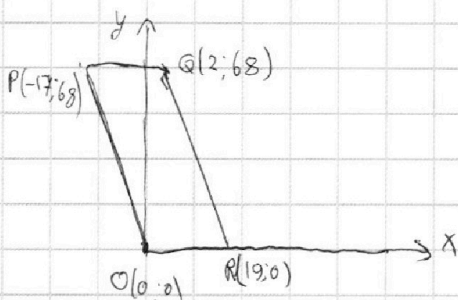
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Для точек  $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

как известно, что

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40. (1)$$

Зафиксируем точку  $A(x_1; y_1)$  и найдем для нее все подходящие точки  $B(x_2; y_2)$

Тогда мы найдем <sup>подходящую</sup> какую-то точку  $B(x_2; y_2)$

Тогда заметим, что нам подойдут также точки  $C(x_3; y_3)$ :

$$y_3 = -4x_3 + y_2 + 4x_2, \text{ т.е. прямая.}$$

Заметим, что угловый коэффициент этой прямой равен угловому коэффициенту

прямых  $(PO)$  и  $(QR)$ , а значит наша прямая параллельна этим двум.

Тогда рассмотрим на точку, лежащую на прямой и имеющую абсциссу 0.

Для нее:  $x_4 = 0$

$$y_4 = -4x_4 + y_2 + 4x_2 \Leftrightarrow y_4 = -4x_4 + 40 + 4x_1 + y_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_4 = 0; y_4 = 40 + 4x_1 + y_1$$

Если  $40 + 4x_1 + y_1 \in [0; 68]$ , то для данной точки  $A(x_1; y_1)$  не существует подходящих (1) точек  $B$ , в силу параллельности прямых.

Если же  $40 + 4x_1 + y_1 \in [0; 68]$  рассмотрим два варианта:

1)  $40 + 4x_1 + y_1 \leq 4$ . Тогда подходящих нам точек  $B$  ровно 18.



В силу делимости, точек на краях - целочисленные; при увеличении  $x$  на 1 получаем новую целочисленную точку на данной прямой, итого 18 целочисленных точек.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2) 40 + 4x + y \leq 4$$

Тогда ~~подходящих~~ ~~увеличенных~~ точек на 2 меньше, т.е. 16 штук  
того, что ~~на~~ ~~на~~ пересечении с  $(PQ)$  и  $(OR)$  — лишние точки.

Теперь подсчитаем кол-во подходящих ~~пар~~ пар точек. Каждая из увеличенных  
точек лежит ровно на одной прямой вида  $y = -4x + a$ , где

$$\text{чтобы в этой точке } (x, y) \text{ была пара } 40 + 4x + y \in [0; 68] \Rightarrow \begin{matrix} a \in [0; 46]; \\ a \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow a \text{ покр } \in [0; 28]$$

При этом для  $a: 4$  точек на данной прямой 18, и для каждой  
из них есть 18 подходящих им точек  $B$ .

Для  $a: 4$  точек на прямой 16, и им подходят 16 точек  $B$ .

Тогда всего пар: ~~числа~~, увеличивая на ~~4~~ ~~всего~~ 8 штук, а подходящих

$$21 \text{ штук. } S = 8 \cdot 18^2 + 21 \cdot 16^2 = 2592 + 5376 = 7968$$

Ответ: 7968



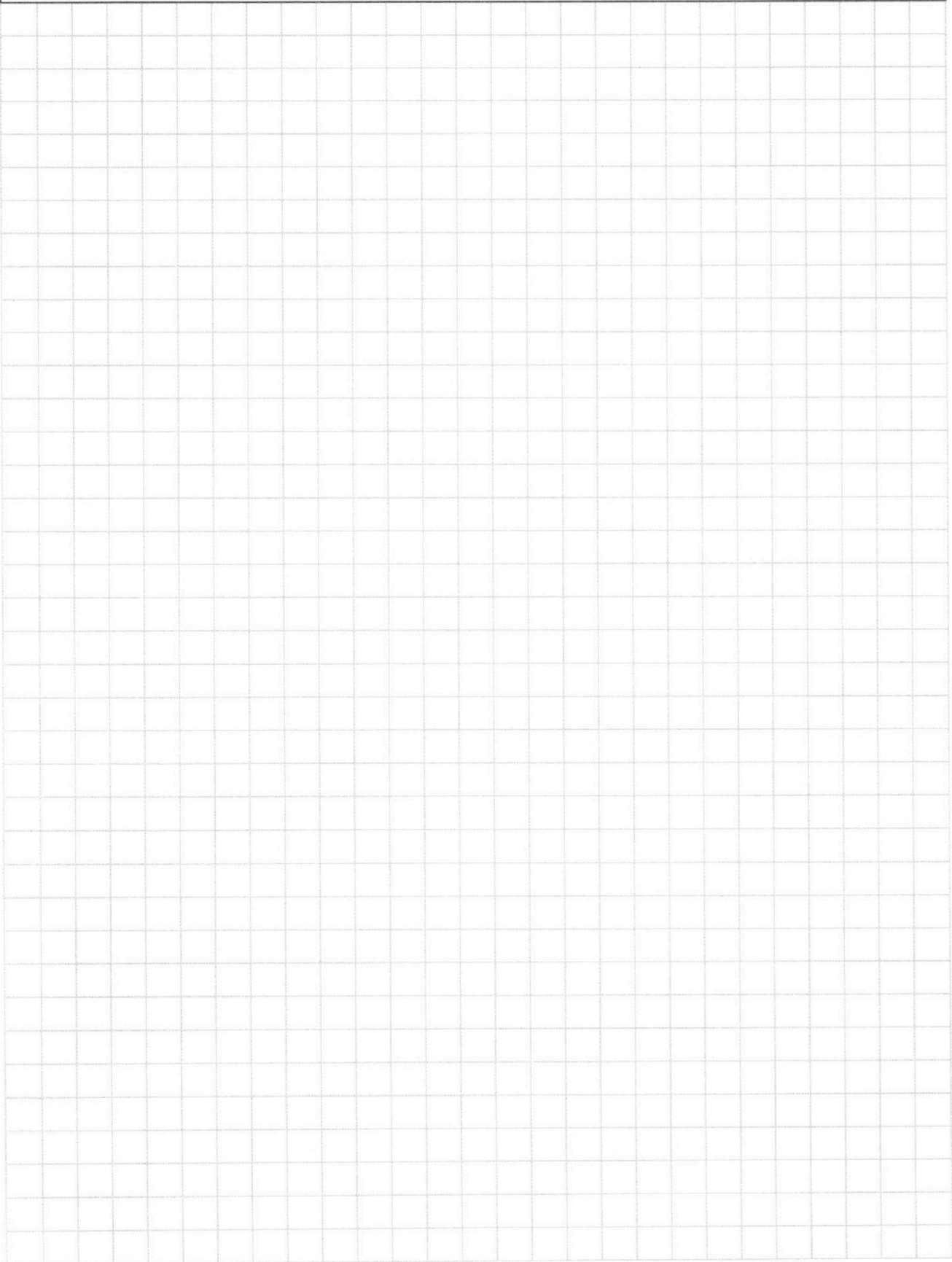
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x = \frac{\pi + 5\pi k}{6} \quad k \in [-2; 4]$$

$$1. x = \frac{-9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$2. x = \frac{-4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{5\pi}{6}$$

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow$$

$$1. \frac{\pi}{2} - x \in [0; \pi]$$

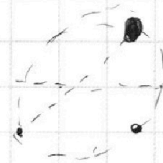
$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 6x = \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad \sin(\frac{7\pi}{2})$$

$$2. \frac{\pi}{2} - x \notin [0; \pi]$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x + \pi k$$

$$\pi + 5\pi k = 6x$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{7\pi}{6}$$



$$\frac{\pi}{2} - x \in$$

$$[2\pi; \pi)$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\frac{10\pi}{6} =$$

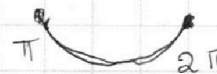
$$\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{10\pi}{3}$$

$$\frac{11\pi}{6} + \frac{9\pi}{6} = \frac{20\pi}{6} = \frac{10\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5^{z_1}; \quad b = 2 \cdot 3 \cdot 5^{z_2}; \quad c = 2 \cdot 3 \cdot 5^{z_3}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 13 \\ x_3 + x_1 \geq 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{увеличить минимально} \\ \text{при максимуме} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 7 \\ x_2 + x_3 = 13 \\ x_3 + x_1 = 14 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 = 7 \\ x_2 + x_3 = 13 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 + y_2 = 11 \\ y_2 + y_3 = 15 \\ y_3 + y_1 = 17 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = \\ y_2 = 5 \\ y_1 = 7 \\ y_3 = 10 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} z_1 + z_2 \geq 14 \\ z_2 + z_3 \geq 18 \\ z_1 + z_3 \geq 43 \end{array} \right\}$$

$$z_1 + z_2 + z_3 \geq \frac{95}{2}$$

$$38$$

$$\begin{cases} z_1 = 20 \\ z_3 = 23 \end{cases}$$

$$z_1 =$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \pi k = \frac{3\pi}{2} + x \quad k \in [0; \pi]$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 5\pi k = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi + 5\pi k = 6x$$

$$x = \frac{\pi + 5\pi k}{6}$$

$$\pi \geq \frac{\pi}{2} - x + \pi k \geq 0$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{6} \geq 0$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{6} \geq 0 \Leftrightarrow \pi k \geq -2\pi \Leftrightarrow k \geq -2$$

$$\pi \geq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{6} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} \geq \frac{\pi k}{6} \Leftrightarrow 4\pi \geq \pi k \Leftrightarrow k \leq 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

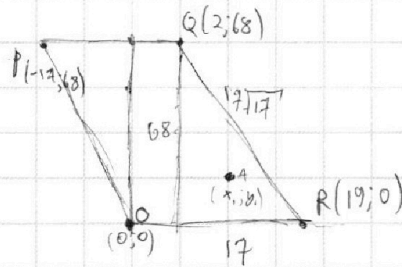


$$O(0;0); P(-17;68); Q(2;68); R(19;0).$$

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ + 144 \\ \hline 324 \\ \cdot 8 \\ \hline 2592 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ \cdot 16 \\ \hline 2592 \end{array}$$



$$y_1 + 4x_1 \leq 28$$

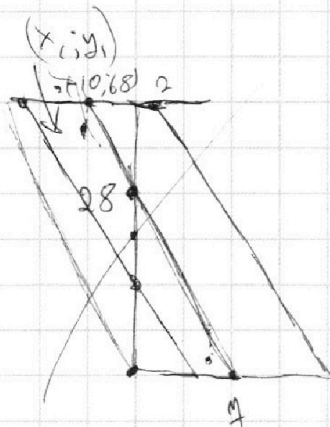
$$4x_2 = 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$y_3 = -4x_3 + b$$

$$y_2 = 40 + y_1 + 4x_1 - 4x_2$$

$$b = y_2 + 4x_2$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ \cdot 21 \\ \hline 512 \\ + 512 \\ \hline 5376 \\ + 2592 \\ \hline 7968 \end{array}$$



$$y = -4x$$

$$y_1 + 4x_1$$

$$y_2 = 40 + 4x_1 + y_1$$

1.3

1.69

0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28



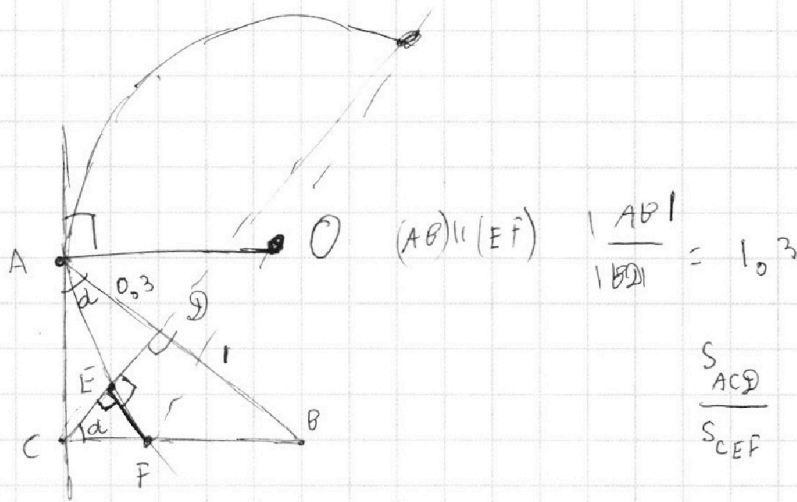
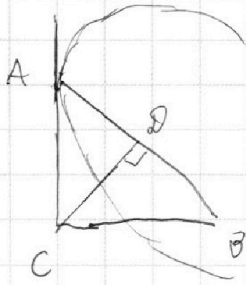
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

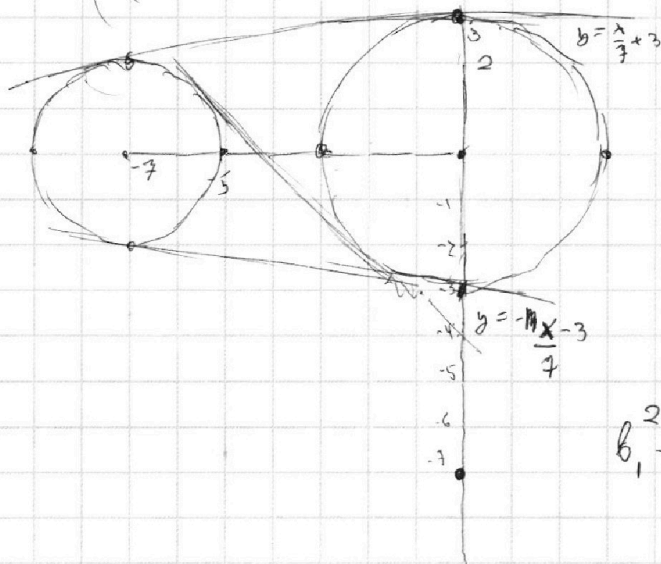
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$x + a_1 y - b_1 = 0 \Rightarrow x = b_1 - a_1 y$$



$$1. a_1 = 0$$

верт. прямая - не подходит.

$$2. a_1 \neq 0$$

$$y = -\frac{x}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}$$

$$b_1^2 - 2a_1 b_1 y + y^2 (1 + a_1^2) - 9$$

$$D_1 = 4a_1^2 b_1^2 - 4 \cdot (b_1^2 - 9) > 0$$

$$(b_1 + 7 - a_1 y)^2 + y^2 - 4 = (b_1 + 7)^2 - 2(b_1 + 7)a_1 y + (a_1^2 + 1)y^2 - 4$$

$$D_2 = 4(b_1 + 7)^2 a_1^2 - 4 \cdot ((b_1 + 7)^2 - 4) \cdot (a_1^2 + 1) > 0$$

$$D_1 > 0 \Leftrightarrow a_1^2 b_1^2 - b_1^2 + 9 - a_1^2 b_1^2 + 9a_1^2 > 0 \Leftrightarrow 9a_1^2 - b_1^2 + 9 > 0 \quad (*)$$

$$D_2 > 0 \Leftrightarrow (b_1 + 7)^2 a_1^2 - (b_1 + 7)^2 a_1^2 - (b_1 + 7)^2 + 4a_1^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$(*) \quad 4a_1^2 - (b_1 + 7)^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4a_1^2 + 4} > |b_1 + 7| \Leftrightarrow 2\sqrt{a_1^2 + 1} > |b_1 + 7|$$

$$(**) \quad \sqrt{9a_1^2 + 9} > |b_1| \Leftrightarrow 3\sqrt{a_1^2 + 1} > |b_1|$$

$$\sqrt{a_1^2 + 1} > \frac{|b_1 + 7|}{2}$$

$$\sqrt{a_1^2 + 1} > \frac{|b_1|}{3}$$

$$\frac{|b_1|}{3} = \frac{|b_1 + 7|}{2} \Leftrightarrow 2|b_1| = 3|b_1 + 7| \Leftrightarrow -2b_1 = 3b_1 + 21 \Leftrightarrow$$

$$(*) \quad b_1 = -\frac{21}{5}$$

$$\sqrt{a_1^2 + 1} > \frac{7}{5} \Leftrightarrow a_1^2 + 1 > \frac{49}{25} \Leftrightarrow a_1^2 > \frac{24}{25} \Leftrightarrow a_1 < \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$a_1 > \frac{2\sqrt{6}}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{6x} x^3 - 4 \quad \text{и} \quad \log_7^4 + 6\log_7 7 = \log_7^2(7^5) - 4$$

Решим первое:  $0 < x < \frac{1}{6}, x > 0$

$$\log_7^4(6x) = 2\log_{6x} 7 + \frac{3}{2} \cdot \log_{6x} 7 - 4 \Leftrightarrow \log_7(6x) = \frac{7}{2} \cdot \log_{6x} 7 - 4$$

$$\Leftrightarrow \log_7^4(6x) = \frac{7}{2} \cdot \log_{6x} 7 - 4 \quad \Leftrightarrow \log_7^4 = \frac{7}{2} \cdot \log_{6x} 7 - 4$$

$$\Leftrightarrow t^4 = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \quad \Leftrightarrow t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow 2t^5 + 8t - 7 = 0$$

$$\log_7 y = a \quad 2a^5 + 8a + 7 = 0$$

$$a + t = \log_7(6xy) \Rightarrow 7^{a+t} = 6xy \Rightarrow xy = \frac{7^{a+t}}{6}$$

$f(x) = 7$

$f(x) = 7$

$$f(x) = 2a^5 + 8a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

$$2(a^5 + t^5) + 8(a+t) = 0 \Leftrightarrow (a+t)(a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4) + 4(a+t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+t = 0 \\ a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 4 = 0$$

Ищем корни  $a_1$  и  $t_1$ , углуб. generally уединено и нулем, не уединено  $|a| \geq |t|$ .

1.  $|a| < 1$

тогда  $a^4 \approx 0$

$$|-a^3 + 1| < 1$$

$$|a^2 + 4| \leq 0$$