МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №1

если $ab \vdots 2^8\cdot 3^{14}\cdot 5^{12}$, то $ab = 2^8\cdot 3^{14}\cdot 5^{12}\cdot n$, $n\in N$

аналогично $bc = 2^{12}\cdot 3^{20}\cdot 5^{17}\cdot k$, $k\in N$

$ac = 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39}\cdot m$, $m\in N$

$(abc)^2 = 2^{34}\cdot 3^{55}\cdot 5^{68}\cdot n\cdot m\cdot k$

т.е. $(abc)^2 \vdots 3^{55}$

тогда и $abc \vdots 3^{55}$ т.к. $55 \not\vdots 2$

т.е. $(abc)^2 \vdots 3^{110}$

~~abc~~ тогда $(abc)^2 = 2^{34}\cdot 3^{110}\cdot 5^{68}\cdot p$, $p\in N$

~~т.е. $(abc)^2 \geq 2^{34}\cdot 3^{110}\cdot 5^{68}$~~

~~$abc \geq 2^{17}\cdot 3^{55}\cdot 5^{34}$~~

т.е. $abc = 2^{17}\cdot 3^{55}\cdot 5^{34}\cdot z$, $z\in N$

т.к. $ac \vdots 5^{39}$

$abc = 2^{17}\cdot 3^{55}\cdot 5^{39}\cdot r$, $r\in N$

$abc \geq 2^{17}\cdot 3^{55}\cdot 5^{39}$

при $a = 2^5\cdot 5^{12}\cdot 3^2$

$b = 2^3\cdot 5^0\cdot 3^{12}$

$c = 2^9\cdot 5^{27}\cdot 3^{41}$

делимости выполняются и $abc = 2^{17}\cdot 3^{55}\cdot 5^{39}$

значит наименьшее значение abc действительно: $2^{17}\cdot 3^{55}\cdot 5^{39}$

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{55}\cdot 5^{39}$

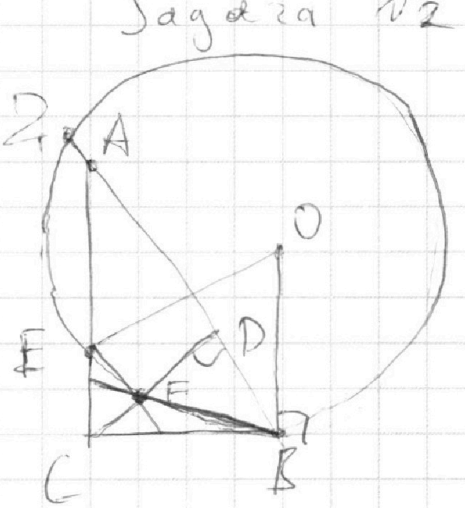
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2 (лист 1)



1) пусть $\angle CBF = \alpha$

~~т.к. CB – кас к окр, то угол между хордой BF и кас. CB ($\angle CBF$) $= \frac{1}{2} \smile BF$~~

O – центр окр

CB – кас $\Rightarrow OB \perp CB$

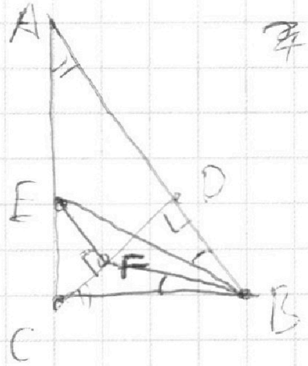
~~2) $\angle F$~~

1) $EF \parallel ZB \Rightarrow \smile EZ = \smile FB$

тогда $\angle CBF = \frac{1}{2} \smile FB$
(угол между хордой и касательной)

$\angle CBF = \smile FB = \smile EZ = \angle EBZ$

2)



$\exists$ $\triangle ABC \sim \triangle CDB$
($\angle CBA$ – общ. и п/у)

$\angle DCB = \angle CAB$

$\triangle EBA \sim \triangle CFB$
$(\angle CAB = \angle DCB; \angle CBF = \angle EBA)$

$\frac{CB}{AB} = \frac{CF}{EA}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №2 (лист 2)

3) $\triangle CAB$ – п/у (CD – высота)

$CD = \sqrt{AD \cdot DB}$

пусть $AD = 5x$ и $DB = 2x$

$CD = \sqrt{10}x$

$CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = \sqrt{14}x$

($\triangle CDB$ – п/у)

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{25x^2 + 10x^2} = \sqrt{35}x$

4) $\frac{CB}{AB} = \frac{CF}{EA} = \frac{\sqrt{14}x}{7x} = \frac{\sqrt{14}}{7}$

пусть $EA = y$

$\cancel{y = \frac{7CF}{\sqrt{14}}}$ $CF = \frac{\sqrt{14}y}{7}$

5) $EF \parallel AB \Rightarrow \angle CEF = \angle CAB$ (как соответственные)

$\triangle CEF \sim \triangle CAD$

($\angle CEF = \angle CAB$; $\angle ACD$ – общ.)

⇓

$\frac{CF}{CD} = \frac{CE}{AC}$

$\frac{CE}{\sqrt{10}x} = \frac{\sqrt{35}x - y}{\sqrt{35}x}$; $\frac{\sqrt{14}y}{7\sqrt{10}x} = \frac{\sqrt{35}x - y}{\sqrt{35}x}$

$7\sqrt{10}xy = 35\sqrt{14}x^2 - 7\sqrt{10}yx$

$\frac{\sqrt{14}y}{35x} = \cancel{\sqrt{58}x7}$ $\cancel{\frac{y}{\sqrt{35}x}}$ $\frac{\sqrt{35}x - y}{\sqrt{35}x}$

$\cancel{7\sqrt{10}xy = 35 \cdot \sqrt{25}x^2 - 35xy}$

$\cancel{7\sqrt{14}}$ $\cancel{\sqrt{10}y = 5\sqrt{35}x - 5y}$

$\cancel{y(\sqrt{10} + 5) = 5\sqrt{35}x}$

$\cancel{y = \frac{5\sqrt{35}x}{\sqrt{10} + 5}}$

$14\sqrt{10}y = 35\sqrt{14}x$

$y = \frac{35\sqrt{14}x}{14\sqrt{10}} = \frac{35\sqrt{7}}{14\sqrt{5}}x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2 (лист 3)

$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ADC}} = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 \text{ (из подобия)}$$

$$\cancel{\frac{S_{\triangle CEF}}{\frac{1}{2}\cdot 5x\cdot\sqrt{10}\,x}}$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}\cdot 5x\cdot\sqrt{10}\cdot x = \frac{5\sqrt{10}}{2}x^2$$

$$CF = \cancel{\frac{\sqrt{14}\cdot 5\sqrt{35}\,x}{7(\sqrt{10}+5)}} = \cancel{\frac{7\sqrt{10}\cdot 5x}{7(\sqrt{10}+5)}} = \cancel{\frac{5\sqrt{10}\,x}{5+\sqrt{10}}}$$

$$\cancel{S_{\triangle CEF} = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2\cdot S_{\triangle ADC} = \frac{25\cdot 10\cdot x^2}{(25+10+10\sqrt{10})\cdot 10x^2}\cdot\frac{5\sqrt{10}}{2}\cdot x^2 = \frac{25\cdot 5\cdot\sqrt{10}\cdot x^2}{(35+10\sqrt{10})\cdot 2}}$$

$$\cancel{S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot BC = \frac{1}{2}\sqrt{35}\cdot\sqrt{14}\,x^2 = \frac{7\sqrt{10}}{2}x^2}$$

$$\cancel{\text{а) } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{25\cdot 5\cdot\sqrt{10}\cdot 2}{(35+10\sqrt{10})\cdot 2\cdot 7\sqrt{10}} = \frac{125}{245+70\sqrt{10}}}$$

$$CF = \frac{35\sqrt{7}\cdot\sqrt{14}\,x}{14\sqrt{5}\cdot 7} = \frac{5\cdot 7\sqrt{2}\,x}{14\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{2}x$$

$$S_{\triangle CEF} = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2\cdot S_{\triangle ADC} = \frac{5x^2}{2\cdot 10x^2}\cdot\frac{5\sqrt{10}x^2}{2} = \frac{5\sqrt{10}x^2}{8}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot BC = \frac{1}{2}\sqrt{35}\cdot\sqrt{14}\cdot x^2 = \frac{7\sqrt{10}}{2}x^2$$

$$\text{б) } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \cancel{\frac{5\sqrt{10}x^2\cdot 2}{8\cdot 7\cdot\sqrt{10}x^2}} = \cancel{\frac{5}{28}}\ \frac{7\sqrt{10}x^2\cdot 8}{2\cdot 5\sqrt{10}\cdot x^2} = \frac{28}{5}$$

Ответ: $\frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3 (лист 1)

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$x = \dfrac{-10\arcsin(\cos x) + \pi}{2}$

$x = -5\arcsin(\cos x) + \frac{\pi}{2}$

$-\frac{5}{2}\pi \le -5\arcsin(\cos x) \le \frac{5}{2}\pi$

$-2\pi \le -5\arcsin(\cos x) \le 3\pi$

т.е. $-2\pi \le x \le 3\pi$

$10\arcsin(\cos x) = 10\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$

1) $-2\pi \le x \le -\pi$

$10\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi)) = \pi - 2x$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x - 2\pi \le \frac{\pi}{2}$

$10(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi) = \pi - 2x$

$-16\pi = 8x$

$x = -2\pi$

2) $-\pi \le x \le 0$

$10\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \pi - 2x$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + x \le \frac{\pi}{2}$

$10(\frac{\pi}{2} + x) = \pi - 2x$

$4\pi = -12x$

$x = -\frac{\pi}{3}$

3) $0 \le x \le \pi$

$10\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x \le \frac{\pi}{2}$

$10(\frac{\pi}{2} - x) = \pi - 2x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №3 (лист 2)

$5\pi - 10x = \pi - 2x$

$4\pi = 8x$

$x = \frac{\pi}{2}$

4) $\pi \le x \le 2\pi$

$10\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi)) = \pi - 2x$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + x - 2\pi \le \frac{\pi}{2}$

$10(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi) = \pi - 2x$

$5\pi + 10x - 20\pi = \pi - 2x$

$-16\pi = -12x$

$\cancel{x = \frac{\pi}{2} \notin [\pi; 2\pi]}$ $x = \frac{4}{3}\pi$

5) $2\pi \le x \le 3\pi$

$\cancel{10\arcsin(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi}$ $10\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi)) = \pi - 2x$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x + 2\pi \le \frac{\pi}{2}$

$10(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x + 20\pi = \pi - 2x$

$24\pi = 8x$

$x = 3\pi$

Итого: $\cancel{x = -\pi}$ $x = \frac{4}{3}\pi$; $x = -2\pi$; $x = -\frac{\pi}{3}$; $x = \frac{\pi}{2}$; $x = 3\pi$

Ответ: -2π; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; 3π; $\frac{4}{3}\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

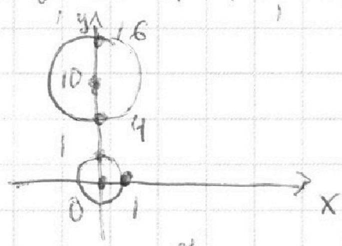
Задача №4 (лист 1)

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (2) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 & (1) \end{cases}$$

(1) $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-20y+64=0 \end{array}\right.$

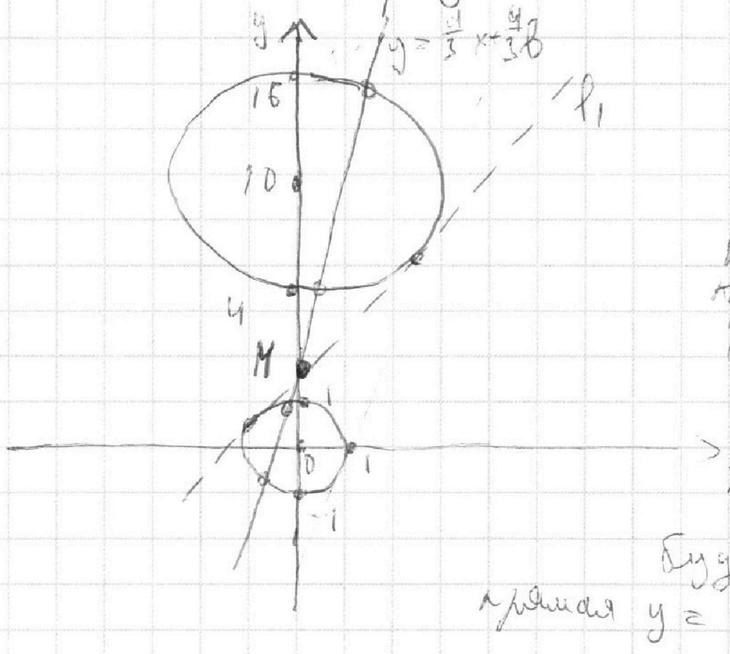
$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{array}\right.$

Это две окр с радиусами 1 и 6 и центрами $(0;0)$ и $(0;10)$ соответственно



(2) $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$

Это множество прямых, кот. вращаются около $(0; \frac{4}{3}b)$; для $a \geq 0$!



1) при $a = 0$
≤ 2 решения

2) $0 < \frac{a}{3} \leq k$,
где k – ~~угл.~~ коэффициент для прямой l_1 (касательной к обеим окр.)
тоже ≤ 2 решения

3) $\frac{a}{3} > k$

Будет 4 реш, если прямая $y = \frac{a}{3} + \frac{4}{3}b$ пройдет через M

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (лист 2)

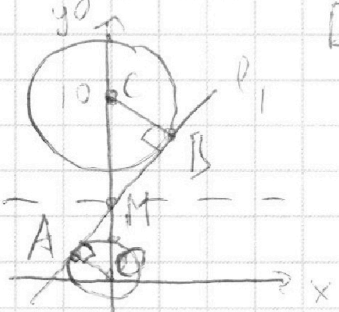
где M — точка пересечения l_1 и OY, т.о. $\frac{4}{3}b = \cancel{x_M}\ y_M$

Из-за симметрии если подходит $a_1 \geq 0$, то подойдет и $-a_1$

Значит:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{3} > k \\ -\frac{a}{3} < k \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a > 3k \\ a < -3k \end{array}\right.$$

Найдем k:



$BC = \cancel{10}6;\ OA = 1$

$\triangle CBM \sim \triangle OAM$:

$\frac{OM}{CM} = \frac{OA}{BC} = \frac{1}{\cancel{10}6}$

$\Rightarrow CM = \cancel{10}6OM$

$CM + MO = 10$

$\cancel{11}7OM = 10$

$OM = \frac{10}{\cancel{11}7}$

$k = tg(90^\circ - \angle CMB) = ctg\angle CMB = \frac{MB}{CB}$

$CM = \cancel{10}6OM = \cancel{\frac{100}{11}}\ \frac{60}{7}$

$MB = \sqrt{CM^2 - CB^2} = \cancel{\sqrt{\frac{10000}{121} - 100} = 10\sqrt{1}}$

$= \sqrt{\frac{3600}{49} - 36} = 6\sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \frac{6\sqrt{51}}{7}$

$k = \frac{6\sqrt{51}}{7 \cdot 6} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

$$\left[\begin{array}{l} a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \\ a < -\frac{3\sqrt{51}}{7} \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №5 (лист 1)

1) $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \frac{4}{3}\log_{2x} 5 - 3$

$3\log_5^4(2x) = 13\log_{2x} 5 - 9$

2) $\log_5^4(y) + 4\log_y 5 = \log_{y^3}(0,2) - 3$

$\log_5^4(y) + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$

$3\log_5^4(y) + 12\log_y 5 = -\log_y 5 - 9$

$3\log_5^4(y) = -13\log_y 5 - 9$

(1) пусть $t = \log_5(2x)$

$\cancel{3t^4 = 13t - 9}$

$3t^4 = \frac{13}{t} - 9$

$\frac{3t^5 + 9t - 13}{t} = 0$

$3t^5 + 9t - 13 = 0$

пусть $f(m) = 3m^5 + 9m - 13$

$f(\log_5(2x)) = 0$

(2) пусть $\cancel{k = \log_5(2x)}$ $k = \log_y k = -\log_5 y$

$3k^4 = \frac{13}{k} - 9$

$\frac{3k^5 + 9k - 13}{k} = 0$

$3k^5 + 9k - 13 = 0$

$f(-\log_5 y) = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №5 (лист 2)

$f(m) = 3m^5 + 9m - 13$

$f'(m) = 15m^4 + 9 > 0$ при всех m

т.е. $f(m)$ возрастает

$f(\log_5(2x)) = 0 = f(-\log_5 y)$

значит $\log_5 2x = -\log_5 y$

$\log_5(2xy) = 0$

$2xy = 1$

$xy = \frac{1}{2}$

~~Это возможно при $x = 1$ и $y = \frac{1}{2}$~~

Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
	X	X	X			

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Задача №3 (листик)~~

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\cancel{\arcsin(\cos x) \le \frac{\pi}{2}}$

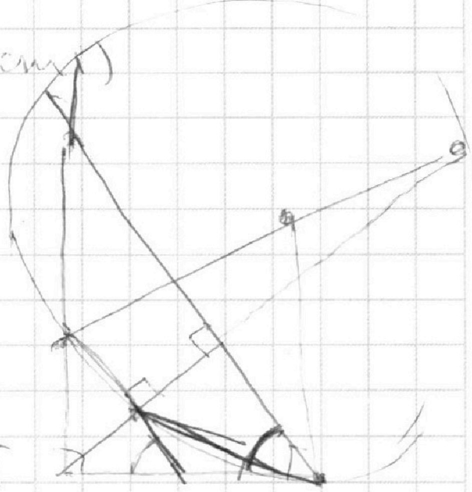
$x = \frac{-10\arcsin(\cos x)+\pi}{2}$

$x = -5\arcsin(\cos x) + \frac{\pi}{2}$

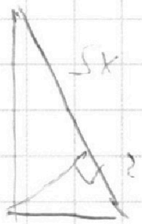
$-\frac{5}{2}\pi \le -5\arcsin(\cos x) \le \frac{5}{2}\pi$

$-2\pi \le -5\arcsin(\cos x) \le 3\pi$

т.е. $-2\pi \le x \le 3\pi$



$10\arcsin(\cos x) = 10\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$



1) $-2\pi \le x \le -\pi$

$10\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi)) = \pi - 2x$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x - 2\pi \le \frac{\pi}{2}$

$10(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x - 20\pi = \pi - 2x$

$-16\pi = 8x$

$x = -2\pi$

$2\pi \le x \le 3\pi$

$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi$

$-3\pi \le -x \le -2\pi$

$-\pi \le -x \le 0$

$\sqrt{\ }$ $\sqrt{10}x$

10 $25 + 10$

$35x$

2) $-\pi \le x \le 0$

$10\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \pi - 2x$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + x \le \frac{\pi}{2}$

π 2π

$10(\frac{\pi}{2} + x) = \pi - 2x$

$-2\pi \le -x \le -\pi$

$5\pi + 10x = \pi - 2x$

$-x + 2\pi$?

$4\pi = \cancel{8x} -12x$

$\frac{\pi}{2} + x - 2\pi$

$x = -\frac{\pi}{3}$

$-\pi \le x \le 0$

-5π

3) $0 \le x \le \pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

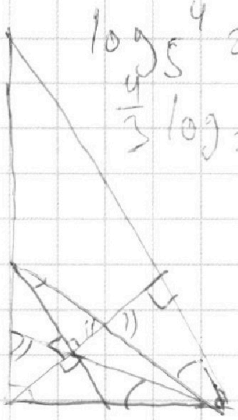
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

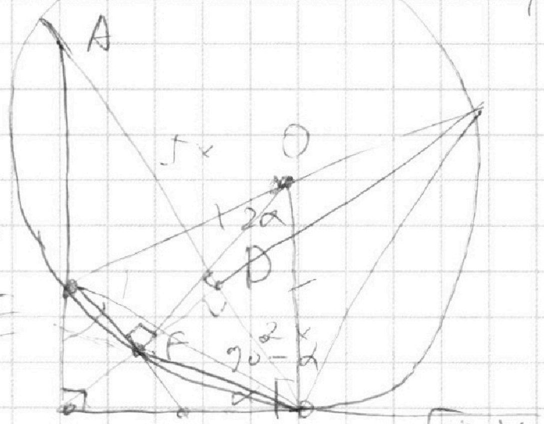
МФТИ

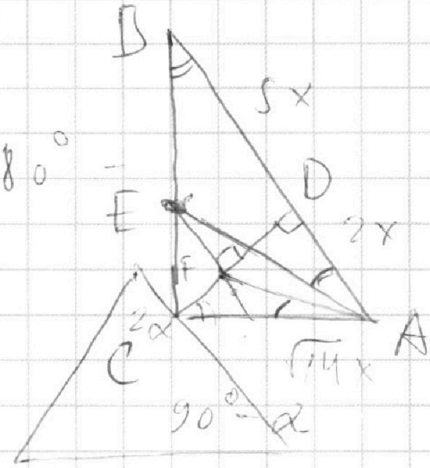
$\log_5^4 2 = 3\log_2 5$

$\frac{4}{3}\log_2 5 - 3$

$\frac{1 - 3\log_2 5}{\log_2^4 5}$

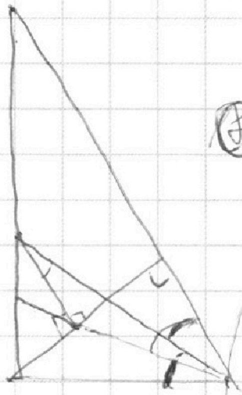


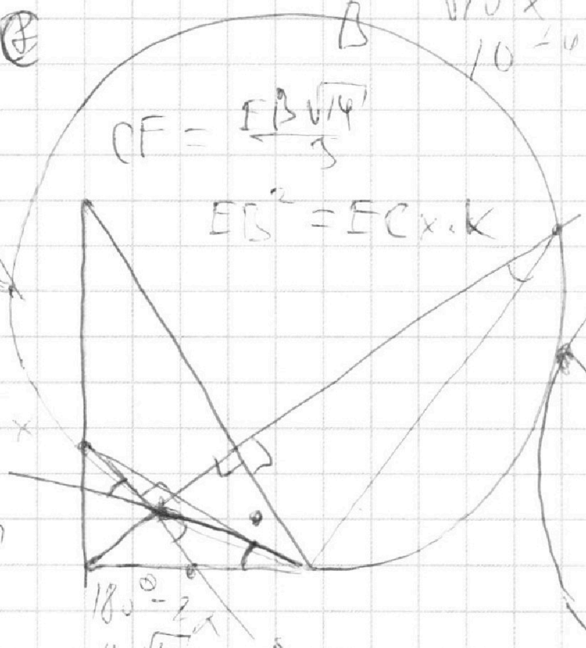




$\frac{\sqrt{14}}{5} = \frac{CF}{FB}$

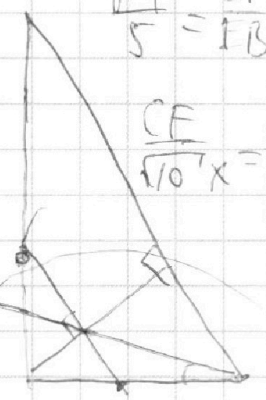
$\frac{CE}{\sqrt{10}x} = \frac{EC}{EB}$





$CF = \frac{FB\sqrt{14}}{5}$

$EB^2 = ECx \cdot k$



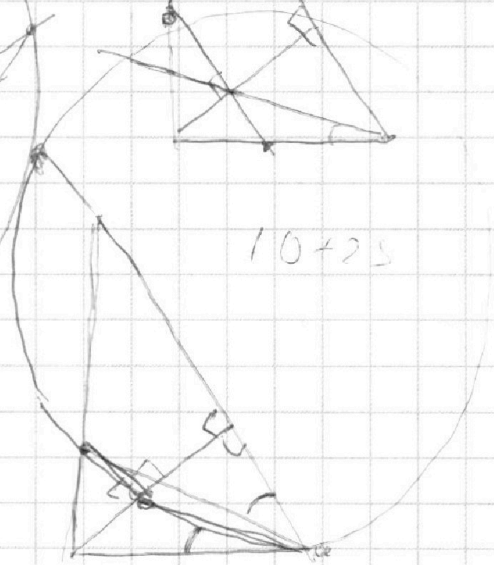
$\frac{CF}{\sqrt{10}x} = \frac{CE}{\sqrt{35}x}$

$\frac{CF}{CE} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}}$

y

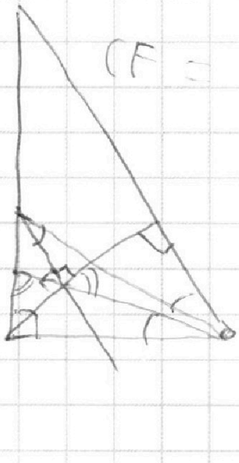
$180° - 2$

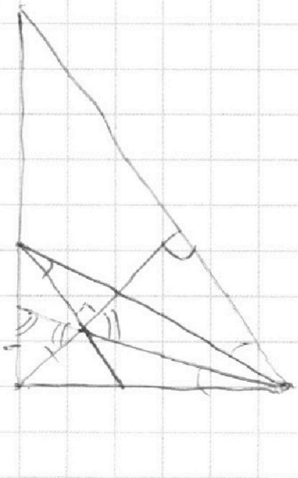
$CF = \frac{y\sqrt{10}}{\sqrt{35}}$



$10+25$

$\frac{CF}{\sqrt{35}x - y} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$ $\quad 165 \mid 5,\ 15,\ 33,\ 15$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{1}{3}\log_{2x}5^4 - 3$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3\log_5(2x)} - 3$

$t = \log_5 2x$; $x \neq \frac{1}{2}$ $\quad \log_5 2x + \log_5 y = 0$

$t^2 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$ $\quad 2xy = 1$

$\cancel{\frac{3t^3 - 9 - 4}{3t} = 0}$ $\quad \frac{3t^3 - 9 - 4 + 9t}{3t} = 0$

$\cancel{t^3 = \frac{13}{3}}$ $\quad \begin{cases} 3t^3 + 9t - 13 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$

$\cancel{t = \sqrt[3]{\frac{13}{3}}}$ $\quad (6t + 3)t - (3t^2 - 13 + 3t)$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \frac{4}{3}\log_{2x}5 - 3$ $\quad 6t^2 - 3t^2$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$ $\quad \frac{3t^2 + 13}{t^4} > 0$

$\cancel{\log_5^4 y = \log_5^4(2x) =}$

$3\log_5^4(2x) = 4\log_{2x}5 + 9\log_{2x}5 - 3$

$\times 13,\ 33,\ 39,\ \times 4,\ 156,\ +9,\ 165$

$3\log_5^4 y = -\log_y 5 - 12\log_4 5 - 3$

$3\log_5^4(2x) = 13\log_{2x}5 - 3$

$3\log_5^4 y = -13\log_y 5 - 3$

$3(\log_5^4 2x - \log_5^4 y) = 13(\log_{2x}5 - \log_y 5)$

$3t^2 + 3t - 13 = 0$ $\quad f(\log_5 2x) =$ $\quad 3t = \frac{13}{t} - 3$

$D = 9 +$ $\quad f(-\log_5 y)$ $\quad \frac{3t^2 - 13 + 3t}{t} = 0$

165

$\log_5 2x = -\log_5 y$

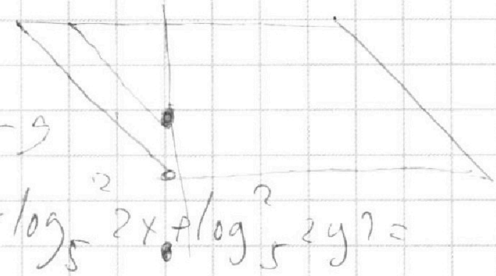
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [x] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$3\log_5^4(2x) = \frac{13}{\log_{2x}5} - 9$

$3\log_5^4(y) = -\frac{13}{\log_{2y}5} - 9$



$3(\log_5^2(2x) - \log_5^2(2x))(\log_5^2 2x + \log_5^2 2y) =$

$= 13(\log_{2y}5 - \log_{2x}5$

16

$f(t) = 3t^4 - \frac{13}{t} + 9$

80

$\frac{80}{16} = 5$

$= \frac{3t^5 + 9t - 13}{t} = 0$

16

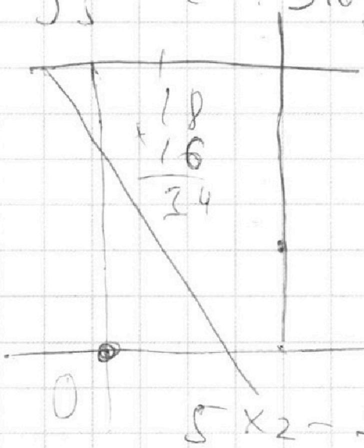
$\log_5 2x$

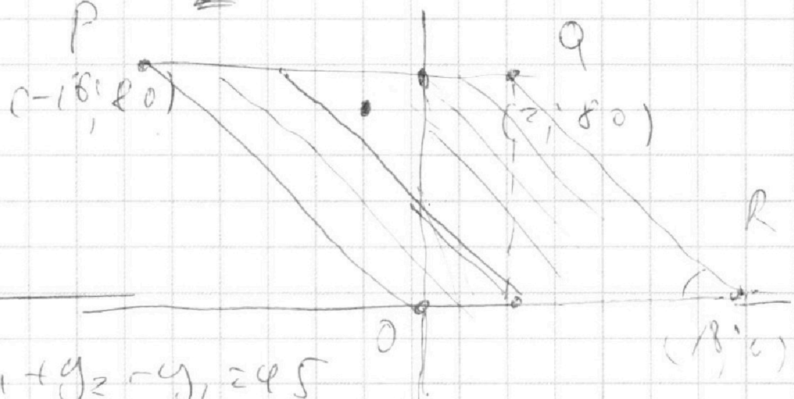
$3t_1^5 + 9t_1 - 13 = 0$

$15t^4 + 9 = 0$

$x = 1.\quad y = \frac{1}{2}$

$\log_5^4 2 - 3\log_2 5 = \frac{4}{3}\log_2 5^4 - 3$





$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

$5(\underbrace{x_2 - \cancel{x}}_{=34}) + \underbrace{y_2 - y_1}_{=80} = 45$

$5x_2 - 5x + y_2 - y = 45$

$y = -5x + 5x_2 + y_2 - 45$

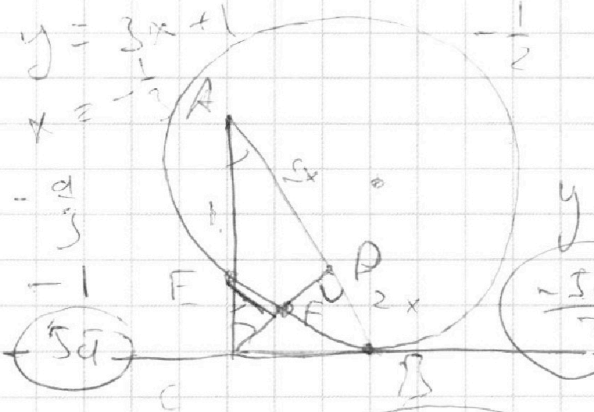
$\cancel{y = 5x}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [x] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$y = 3x + 1$ $\quad -\frac{1}{2}$ $\quad 3y = ax + 4b$ $\quad \pi + \frac{2}{3\pi}$

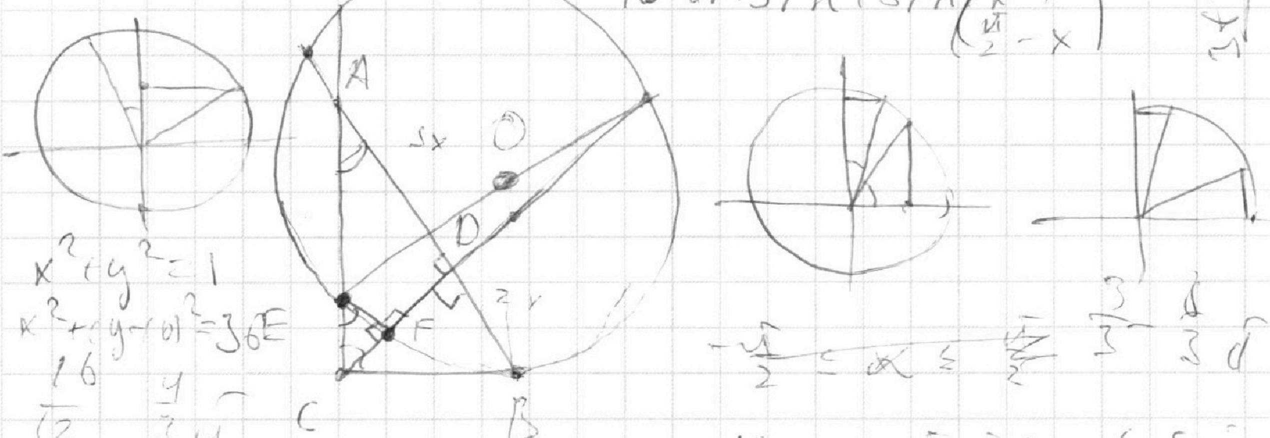


$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$

$-\frac{5\pi}{3}$

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$10 \arcsin(\sin(x - \frac{\pi}{2}))$



$x^2 + y^2 = 1$

$x^2 + (y-10)^2 = 36$

$-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$-\frac{10}{2\pi}$ $\quad -5\pi \le x \le 5\pi$

$-2\pi \le x \le 3\pi$ $\quad -6\pi \le \alpha \le 4\pi$

$-2\pi \le \alpha \le 3\pi$

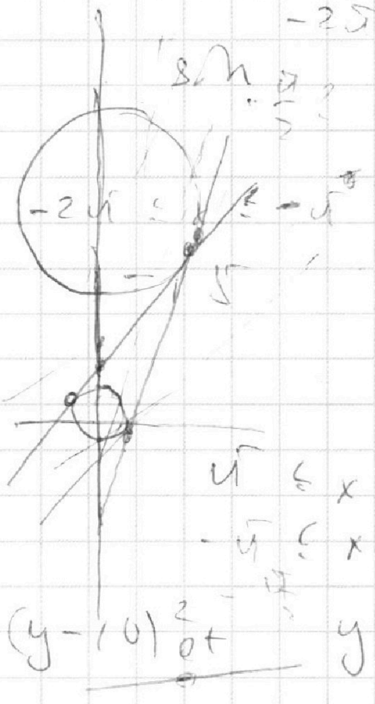
$\sin: -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x \le \frac{\pi}{2}$

$-\pi \le -x \le 0$

1) $0 \le x \le \pi$

2) $\pi \le x \le 2\pi$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$

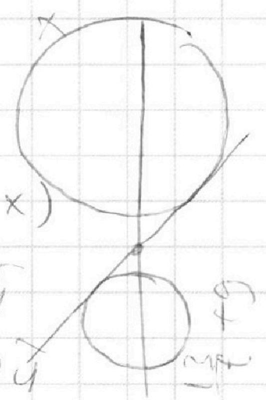


$\pi \le x \le 2\pi$

$-\pi \le x \le 0$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi - 2\pi$

$(y-10)^2$ $\quad y^2 - 20y + 100 + x^2 - 36$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$ 29 39 $(abc)^2 \vdots 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$

$bc \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$

$ac \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

1 + 29 + 39 = 68

$abc \geq 2^{17} \cdot 5^{27} \cdot 5^{34} \sqrt{5}$

$2x$ $\frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2}$

$\frac{b}{a} \vdots \frac{c}{b} \vdots 2^6 \cdot 3^7 \cdot 5^{27}$ $x = 1$ $\sqrt{3} = \sqrt{9} > \sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$

$a + b = 12$
$b + c = 17$
$a + c = 39$
$a - b = 22$

1 + 29 + 39 = 68

110 $(abc)^2 \vdots 3^{55}$

55

$2a = 34$ $abc = n \cdot 3^{\alpha}$
$a = 17$ $abc^2 = n^2 \cdot 3^{2\alpha} \vdots 3^{55}$
$c =$

110 $2\alpha \vdots 55$

$abc \vdots 3$

$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$

$a = 2^5 \cdot 5^{12}$
$b = 2^3 \cdot 5^0$
$c = 2^9 \cdot 5^{27}$

$\frac{c}{a} = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5 \cdot a$

$a + b + c = 17$
$a + b = 8$
$b + c = 12$
$a + c = 14$
$a - b = 2$

$\frac{c}{b} = 2^6 \cdot 3^7 \cdot 5^{27} \cdot b$

$a + b = 14$
$b + c = 20$
$a + c = 21$
$a - b = 1$

$\frac{b}{a} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^{22} \cdot a$

$ab = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^{22}$ $a^2 \vdots 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot n$

$2a = 10$
$a = 5$
$b = 3$

$2a = 15$

$a^2 \cdot 5^{10} = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot n$

$abc = a \cdot \cancel{2^2} \cdot 3 \cdot 5^{22} \cdot a \cdot \cancel{2^4} \cdot 3^6 \cdot 5^5 \cdot a$

$\frac{2}{39} = \cancel{2^6} \cdot \cancel{3^7} \cdot 5^{27} \cdot a^3 = 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{34}$

$a^3 = 2^{11} \cdot 3^{48} \cdot 5^{17}$

$a + b + c = 55$ $c = 41$
$a + b = 14$

$a + b + c = 39$
$a + c = 39$

$b = 0$
$a = 12$
$c = 27$