



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

11 Пусть тогда  $\exists k, p, m$  такие, что:

$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot k$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot m$$

$$ac = 2^{15} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot p$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \cdot m \cdot p \cdot k$$

чтобы это число являлось полным квадратом  
(степени у 2, 3 и 5-должны быть четными)  
произведение  $m \cdot p \cdot k$  должно содержать множитель  
 $5 \cdot 5$ .

К примеру  $(abc)^2 : (ac)^2 \Rightarrow$  уберем степень

$$\text{минимум } 7 : \sqrt{5^{53} \cdot 5^7} = \sqrt{5^{60}} = 5^{30}$$

$$\text{тогда } \exists m \cdot p \cdot k = 3 \cdot 5^7 \Rightarrow (abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Отсюда: } c = \frac{2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}}{m}$$

$$b = \frac{2^{2k} \cdot 3^3}{p}$$

$$a = \frac{2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}}{m}$$

Видно, что  $\begin{cases} p=1 \\ p=3 \end{cases}$

$$\text{Тогда пусть } \begin{cases} p=3 \\ m=5^4 \\ k=5^3 \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{17} \\ b = 2^2 \cdot 3^2 \\ a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{13} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

тогда:  $ac = 2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5^{30}$

$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{13}$  - пример, удовлетворяет условию.

$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{17}$

$\Rightarrow \text{т.р.к.} = 3 \cdot 5^7$  - удовлетворяет условию

т.р.к. не может быть равно  $3^i \cdot 5^j$ , где  $i < 7$

ведь тогда не будет выполняться условие

делимости  $(abc)^2 \div (ac)^2$  и четности степеней 3  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \text{т.р.к.} = 3 \cdot 5^7$  - минимальное

число  $abc$  минимальное =  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Ответ:  $abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

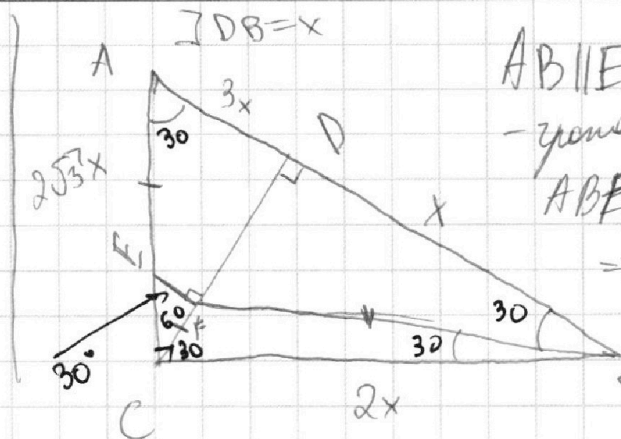
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$AB \parallel EF$   
 $AD:DB = 3:1$   
 $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$



$AB \parallel EF$  - ABFE  
 - трапеция  
 $ABFE$  - вписана  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow ABFE$  - р/б  
 трапеция  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow AE = BC$

$CD = \sqrt{3x^2 - x^2} = x\sqrt{3} \Rightarrow CB = 2x$   
 $\angle AC = 2\sqrt{3}x \Rightarrow \angle DCB = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FBC = 60 - 30 = 30^\circ \Rightarrow CF = FB$  (р/б треугол)  $= AE = y$

$\angle CEF = 30^\circ \Rightarrow CF = \frac{CE}{2} \Rightarrow CE = 2y \Rightarrow AC = 2y + y = 3y =$   
 $= 2\sqrt{3}x \Rightarrow y = \frac{2}{3}\sqrt{3}x$

$S_{ABC} = \frac{CD \cdot AB}{2} = x\sqrt{3} \cdot 2x = 2x^2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}x^2$

$S_{CEF} = \frac{\sin 60^\circ \cdot CE \cdot CF}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3}x \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}x}{2} =$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{9}x^2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}x^2$

$\frac{S_{ADC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{2\sqrt{3}}{9}x^2} = 9$

Ответ:  $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

Известно, что:  $\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2} \quad y \in [-1; 1]$

$$\exists y = \cos x \quad \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

Тогда:  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\pi = 6x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Ответ:  $x \in \left\{ \frac{\pi}{3} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда у этой касательной коэф при  $x = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$   
А у второй касат. в силу симметрии  
коэф  $\frac{5\sqrt{11}}{11}$ . Тогда все прямые у которых  
коэф  $\in \left[-\frac{5\sqrt{11}}{11}, \frac{5\sqrt{11}}{11}\right]$  при  $x$  (назовем его  $c$ )

$$\begin{cases} c \leq -\frac{5\sqrt{11}}{11} \\ c \geq \frac{5\sqrt{11}}{11} \end{cases} - \text{не подходит} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{подходит } c \in \left(-\frac{5\sqrt{11}}{11}, \frac{5\sqrt{11}}{11}\right)$$

$$\text{то есть } \begin{cases} -\frac{a}{2} > -\frac{5\sqrt{11}}{11} \\ -\frac{a}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{10\sqrt{11}}{11} \\ a > -\frac{10\sqrt{11}}{11} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}, \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$14 \quad \begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \Leftrightarrow$$

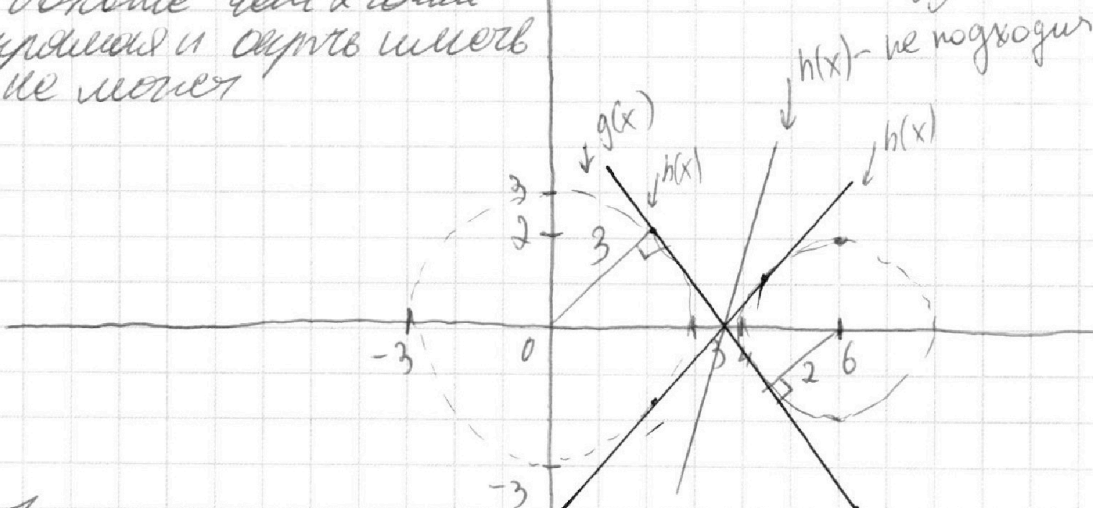
$$\begin{cases} y = \frac{-ax+3b}{2} \\ x^2+y^2=3^2 \Leftrightarrow \\ (x-6)^2+y^2=2^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b = h(x) \\ x^2+y^2=3^2 = g(x) \\ (x-6)^2+y^2=2^2 = f(x) \end{cases}$$

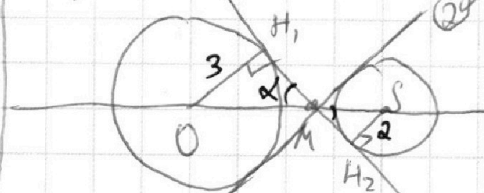
a - наклон прямой  $h(x)$   
b - сдвиг прямой  $h(x)$

Чтобы было четвере  
точки пересек все  
больше чем 2 точки  
прямая и окружность  
не может

прямая (проблема)  $h(x)$   
окр - ги (каждую в 2х точках)



Тогда крайнее положение прямой - их общие  
касательные



$$\triangle OH_1M \sim \triangle MS_2S \text{ (по угл)} \Rightarrow \frac{OM}{MS} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} OM+MS=6 \\ OM = \frac{18}{5} \\ MS = \frac{12}{5} \end{cases} \text{ ①} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rightarrow MH_1 &= \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - 9} = \frac{3}{5}\sqrt{11} \\ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha &= \frac{OH_1}{MH_1} = \frac{3}{\frac{3}{5}\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{1}{2} \log_x 3^5 - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \log_3 x = a \\ \log_3(5y) = b \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{7}{2a} + 8 = 0 \quad a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 a^5 + 16a + 7 = 0 = f(a)$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^4 - \frac{7}{2b} + 8 = 0 \quad b \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2b^5 + 16b - 7 = 0 = g(b)$$

$$f'(a) = 10a^4 + 16a > 0 - f(a) \uparrow \text{ на всем } D_a$$

$$g'(b) = 10b^4 + 16 > 0 - g(b) \uparrow \text{ на всем } D_b$$

$\Rightarrow a$  и  $b$  при которых  $f(a) = 0$ ;  $g(b) = 0$  -

единственные.

$$\text{к тому же } f(-b) = -g(b) = 0 \Rightarrow a = -b$$

$$\text{значит } a + b = -b + b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 x + \log_3(5y) = \log_3(x \cdot 5y) = 0 \Rightarrow x + 5y = 1$$

$$\Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

$$5xy = 1 \Rightarrow$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1    2    3    4    5    6    7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$xy = \frac{1}{5}$  - единственное решение безы  
а и б - единственные.  
Ответ:  $xy = \frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

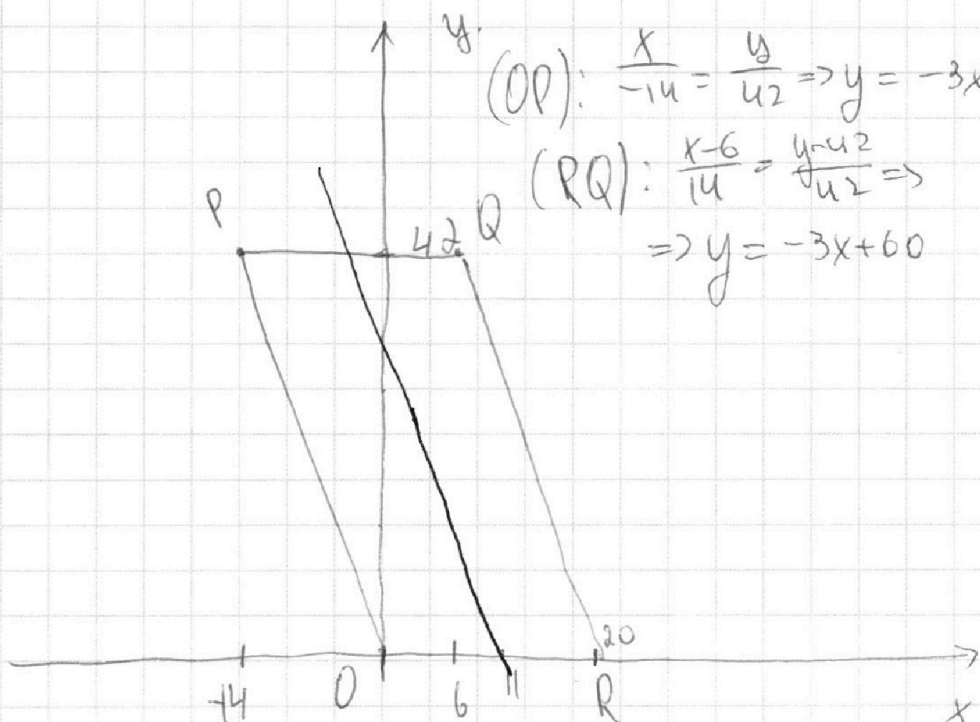


№ 0(0;0)

P(-14; 42)

Q(6; 42)

R(20; 0)



На  $[OR]$  - 21 целая точка, если  $(OP) \equiv y = -3x$ ;  $RQ = -3x + 60$ ;  
тогда на второй стороне 20 целых и на третьей 20 целых  
а на четвертой опять 21 целая (в силу того, что  $y \neq 3$ )  
Всего  $42 + 1 = 43$  отрезки:  $43 = 42 + 1 = 14 \cdot 3 + 1$

Тогда всего целых точек  $(5+4+4) \cdot 14 + (21+20+20) \cdot 14 +$   
 $+ 21 = 69 \cdot 14 + 21 = \del{826} = \del{827} = \del{847} = 875$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \quad \exists R(x_1; y_1) \quad M(x_2; y_2)$$

для точки  $P(0;0)$  парными будут все целые точки  
внутри параллелограмма, лежащие на прямой  $y = -3x + 33$   
Она проходит через точку  $(11; 0)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Всего целых точек на прямой (полюса 3а и 4б) -  
- 14 + 1 - 15 точек

Получается, что для каждой точки на оси  
OK существует две прямые, все точки на  
которых "портные" или, отсюда следует  
что для всех точек на OK, кроме (0; 10)  
существует ровно одна такая прямая лежащая  
внутри параллелограмма для (0; 10) обе  
эти прямые все (одна проходит через  
(-1; 0) другая через (21; 0) паралл. отрезкам RQ и RD)  
то есть для всех отрезков отрезки на паралл-ме  
ордinate которых: 3 будет 15 парных точек  
для каждой точки (кроме центральной)

то.есть :  $20 \cdot 15 \cdot 15 = 20 \cdot 15^2$  точек

На вершине и центре отрезка по 20 точек  
и будет подходить для каждой или кроме  
одной, тогда

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для второй стороны крайнее число

$$\frac{43-1}{3} = 14 \text{ целых точек}$$

Для третьей стороны  $\frac{39}{3} = 13$  целых

тогда для второй:  $(20-1) \cdot 14 = 19 \cdot 14$

для третьей:  $(20-1) \cdot 13 = 13 \cdot 19$

Всего сторон точек (ордината  $\equiv 1$ ): 14 штук

трех (ордината  $\equiv 2$ ): 14 штук

Итого количество:  $\frac{20 \cdot 15^2 + 19 \cdot 14^2 + 13 \cdot 15 \cdot 14}{2}$

Решим на 2-х к. координат  $QM$  и  $MR$  - одно и то же

Ответ:  $2250 + 1862 + 1781 = 5893$  точек на кр

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 2250 \\ + 1862 \\ + 1781 \\ \hline 5893 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot k$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot m$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot p$$

$$\begin{aligned}
 abc &= 10^{18} \cdot 30^7 \\
 ab \cdot ac \cdot bc &= \\
 &= (abc)^2 = m \cdot p \cdot k = 3 \cdot 5^7 \\
 &= 2^{42} \cdot 3^{44} \cdot 5^{53} \cdot m \cdot p \cdot k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 abc &= 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \\
 c &= \frac{2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13}}{2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}} = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\begin{aligned}
 \log ab + \log bc &= \\
 b &= \frac{2 \cdot 3^4}{m} \\
 a \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot p &= m \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3
 \end{aligned}$$

$$a = \frac{2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}}{m \cdot p \cdot k}$$

$$a \cdot b = \frac{2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17}}{m \cdot p \cdot k} = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

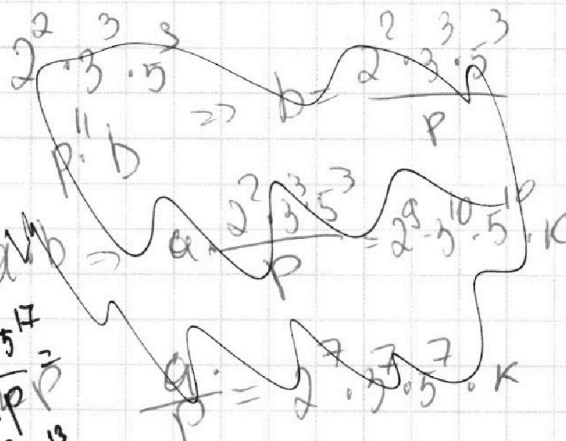
$$ac = \frac{2^{19} \cdot 3^{19} \cdot 5^{37}}{m \cdot p \cdot k} = m \cdot p \cdot k$$

$$am \cdot bp = m \cdot p \cdot k = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17}$$

$$mpk \cdot mpk \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17}$$

$$am \cdot bp = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17} \cdot 2 \cdot 3^3 = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17} = m \cdot p \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot k$$

$$mpk = 3 \cdot 5^7$$



$$a \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot m = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$am = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$$

$$b \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot p = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$bp = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$
  

$$\left( \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0 \right)$$
  
~~$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3$$~~
  

$$\log_3^4(5y) + \frac{7}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0$$
  

$$a^4 + \frac{7}{2a} + 8 = 0$$
  
~~$$b^4 - \frac{7}{2b} + 8 = 0$$~~
  

$$2(a^5 + b^5) + 7 \log_3(a^5 + b^5) + \frac{7}{2} \log_3(a^5 + b^5) + 8 = 0$$
  

$$2(a^5 + b^5) + 16 \log_3(a^5 + b^5) + \frac{7}{2} \log_3(a^5 + b^5) + 8 = 0$$
  

$$6 - \frac{5}{2a} + \frac{7}{2a} + 8 = 0$$
  

$$b^5 - \frac{7}{2b} + 8 = 0$$
  

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) + \frac{7}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3 x + \log_3 5y = \log_3(xy)$$

$$x \cdot y = z$$

$$5xy = 5z$$

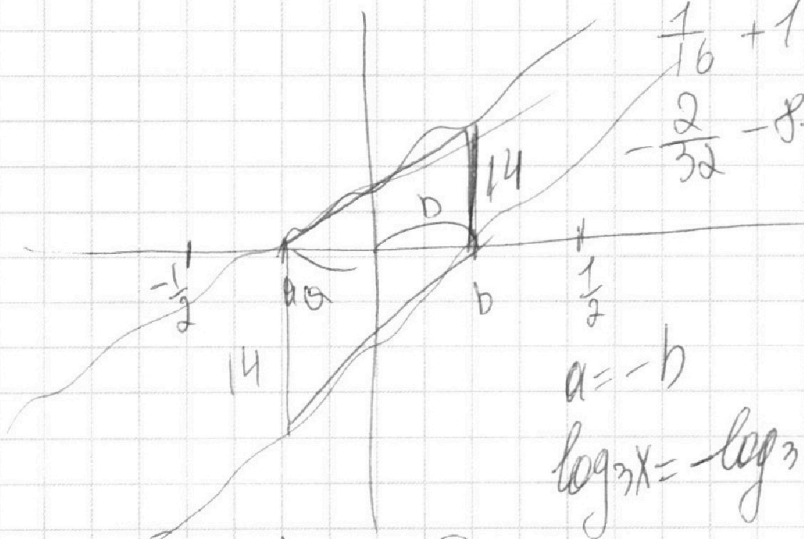
$$\log_3(xy) = \log_3(5z)$$

$$-\frac{2 \cdot 1}{4^5} z - 4 + 7 = 0$$

$$\frac{2}{32} + \frac{16}{2} - 7 - \frac{2}{2^{10}} + 3 = 0$$

$$\frac{1}{16} + 1 = 0$$

$$-\frac{2}{32} - 8 + 7 = 0$$



$$-2b^5 + 16b + 7 = 0$$

$$\log_3 x = -\log_3 5y$$

$$x =$$

$$a + b = -b + b = 0$$

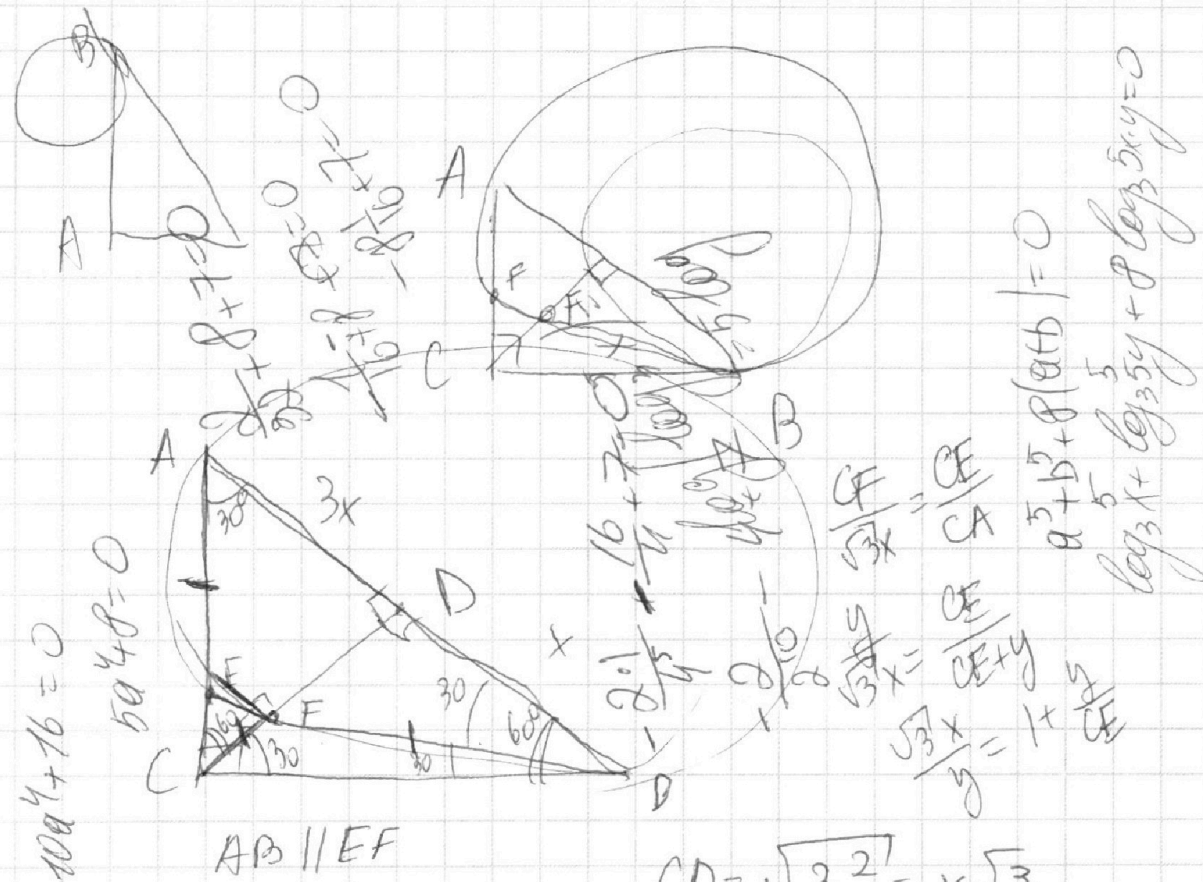
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

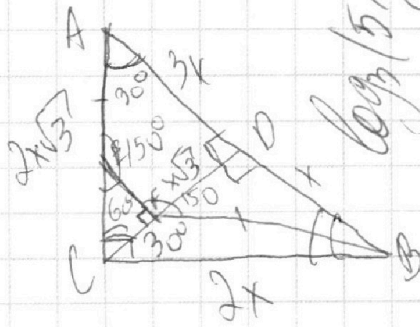


$AB \parallel EF$

$AD:DB = 3:1$

$CD = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$



$3x^2 + x^2 = 2x^2$

$9x^2 + 3x^2 =$

$2x^2$

$= x\sqrt{12} = 2x\sqrt{3}$

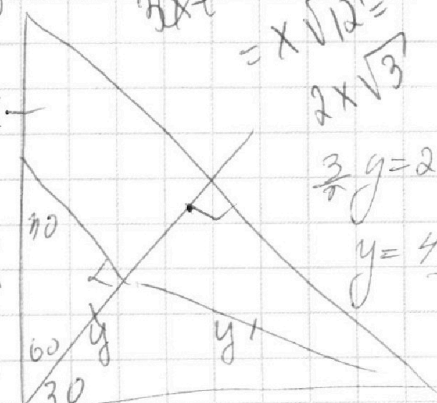
$\frac{3}{2}y = 2x\sqrt{3}$

$y = \frac{4x\sqrt{3}}{3}$

$\frac{AC}{CE} = \frac{3x}{y}$

$S_{ABC} = 2x \cdot x\sqrt{3}$

$S_{CEF} = 3y = 2x\sqrt{3}$   
 $y = \frac{2}{3}x\sqrt{3}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x)$$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$\arcsin(\sqrt{1-x^2})$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{4\pi}{2} = 6x$$

$$x = \frac{2\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$5 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi + 3\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$5 \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

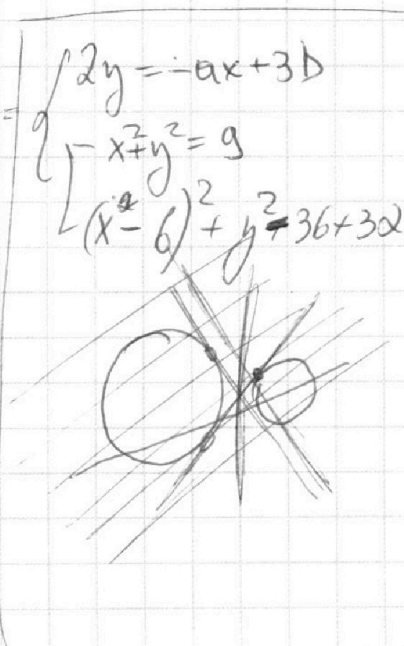
$$5 \arcsin$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi + 3\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} x^2 - 12x + 36$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9 - \pi^2}{9}}$$

$$\begin{cases} 2y = -ax + 3b \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 36 + 3a \end{cases}$$




На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

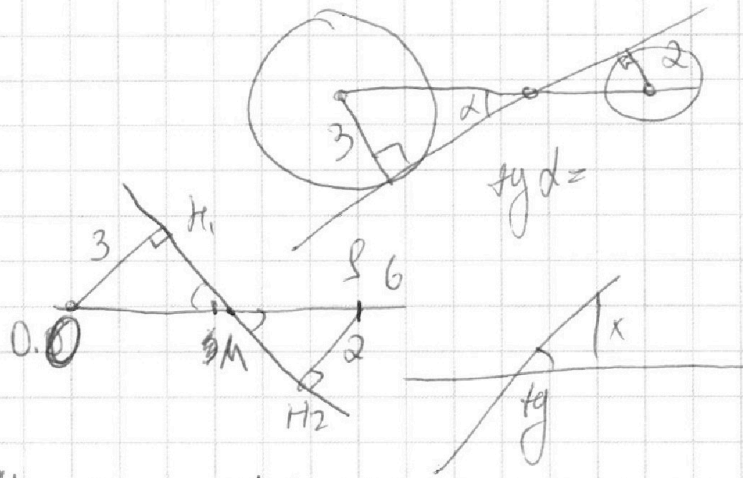
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$243 = 3^5$



$243 \div 3 = 81$

$81 \div 3 = 27$

$27 \div 3 = 9$

$9 \div 3 = 3$

$3 \div 3 = 1$

$1 \div 3 = 0.333$

$0.333 \div 3 = 0.111$

$0.111 \div 3 = 0.037$

$0.037 \div 3 = 0.012$

$0.012 \div 3 = 0.004$

$0.004 \div 3 = 0.001$

$0.001 \div 3 = 0.0003$

$0.0003 \div 3 = 0.0001$

$0.0001 \div 3 = 0.00003$

$0.00003 \div 3 = 0.00001$

$0.00001 \div 3 = 0.000003$

$0.000003 \div 3 = 0.000001$

$0.000001 \div 3 = 0.0000003$

$0.0000003 \div 3 = 0.0000001$

$0.0000001 \div 3 = 0.00000003$

$0.00000003 \div 3 = 0.00000001$

$\frac{OM}{MS} = \frac{3}{2} \quad OM + MS = 6$

$OM = \frac{3}{2} \cdot MS \quad \frac{3}{2}MS + MS = 2.5MS = 6$

$MS = \frac{6 \cdot 2}{5} = \frac{12}{5}$

$OM = \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{5} = \frac{3 \cdot 6}{5} = \frac{18}{5}$

$OM = \frac{18}{5}$

$OM_{\text{н}} = \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - 9} = \sqrt{\frac{18^2}{25} - 9} =$

$= \sqrt{\frac{324 - 225}{25}} =$

$= \sqrt{\frac{99}{25}} = \frac{3}{5} \sqrt{11}$

$\text{tg } \alpha = \frac{3}{5} \sqrt{11} = \frac{3}{5} \sqrt{11}$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ -18 \\ \hline 744 \\ +18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ -360 \\ \hline 49 \\ \frac{25}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ -25 \\ \hline 225 \\ +90 \\ \hline 324 \\ -225 \\ \hline 99 \end{array}$$

$y = -100x$

$\frac{a}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11}$

$a < \frac{10\sqrt{11}}{11}$

$\frac{a}{2} > -\frac{5\sqrt{11}}{11}$

$a > -\frac{10\sqrt{11}}{11}$

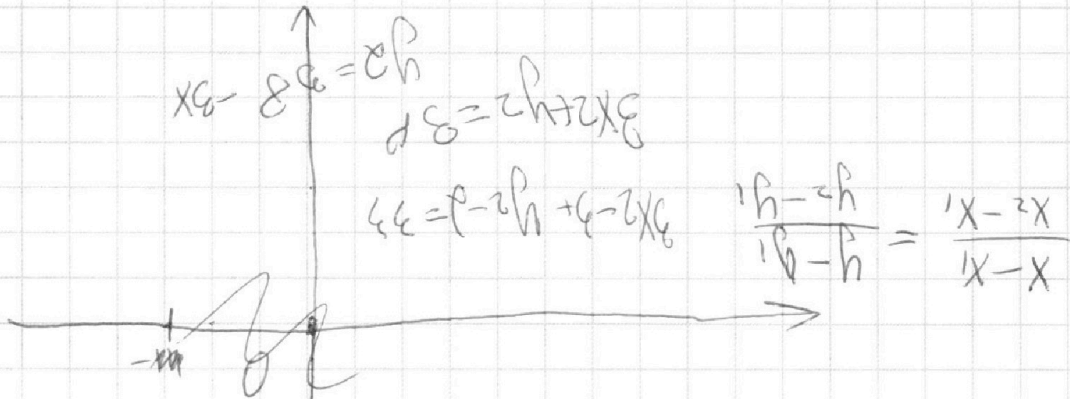
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 + y^2 = 33$$

$$y^2 = 33 - 3x^2$$

$$x \cdot y^2 - 33 = 0$$

$$y^2 = 33 - 3x^2$$

$$x \cdot (33 - 3x^2) - 33 = 0$$

$$33x - 3x^3 - 33 = 0$$

$$-3x^3 + 33x - 33 = 0$$

$$x^3 - 11x + 11 = 0$$

$$x^3 - 11x + 11 = 0$$

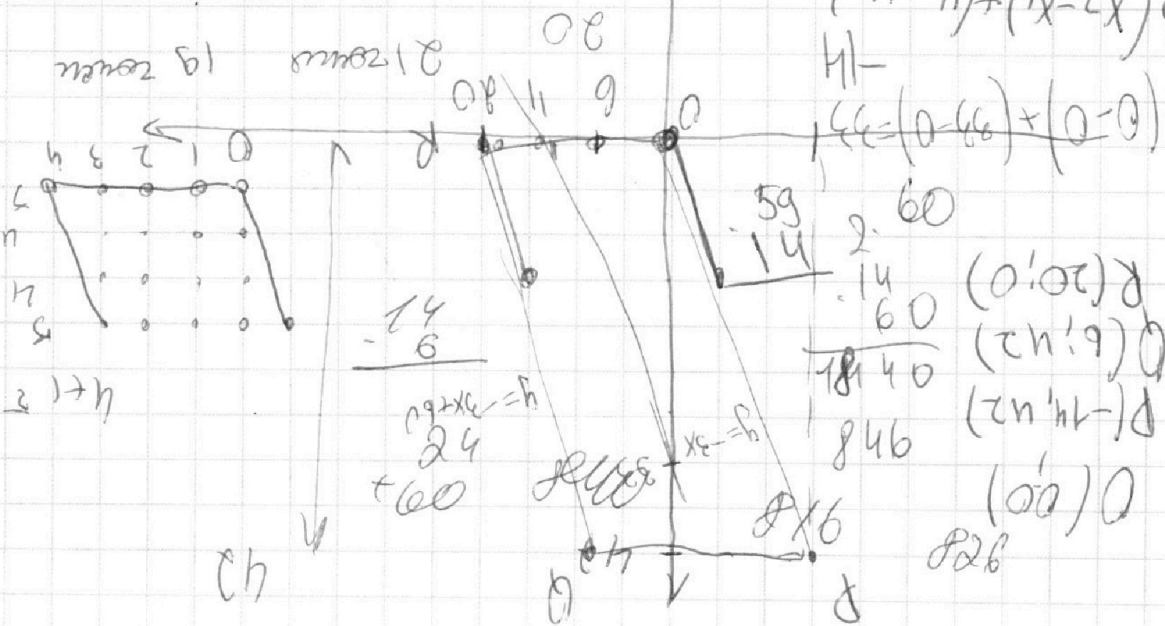
$$x^3 - 11x + 11 = 0$$

$$\frac{3x - 11}{3x^2 - 11} = \frac{11 - 11x}{3x^2 - 11}$$

$$\frac{3x - 11}{3x^2 - 11} = \frac{11 - 11x}{3x^2 - 11}$$

$$\frac{3x - 11}{3x^2 - 11} = \frac{11 - 11x}{3x^2 - 11}$$

$$\frac{3x - 11}{3x^2 - 11} = \frac{11 - 11x}{3x^2 - 11}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-3x + 3y = 33$$

$$P(x_2; y_2)$$

$$PH = ($$

$$H(x_1; y_1)$$

$$-3x_2 + y_2 = 33$$

$$3x_2 - 30 + y_2 - 0 = 33$$

$$y_2 = 63 - 3x_2$$

12

ок

$$3x_2 - 6 - y_2 - 0 = 33$$

$$y_2 = 39 - 3x_2$$

$$13 \quad (0; 1)$$

$$3x_2 - 0 + y_2 - 1 = 33$$

$$3x_2 + y_2 = 34$$

$$y_2 = 34 - 3x_2$$

$$33 = 11$$

$$36 = 12 \quad 60 = 20$$

$$39 = 13$$

$$-3x_1 - y_1 = 33$$

$$y_1 = -3 + 3x_1 \quad y_1 + 3x_1 = 33$$

$$y_1 = 33 - 3x_1$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1$$

$$+ 1 = 34 - 3x_2$$

$$-33 = -3x_2$$

$$x = 3$$

$$30 - 3x_1 + 0 - y_1 = 33$$

$$30 - 3x_1 - y_1 = 33$$

$$3x_1 + y_1 = -3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

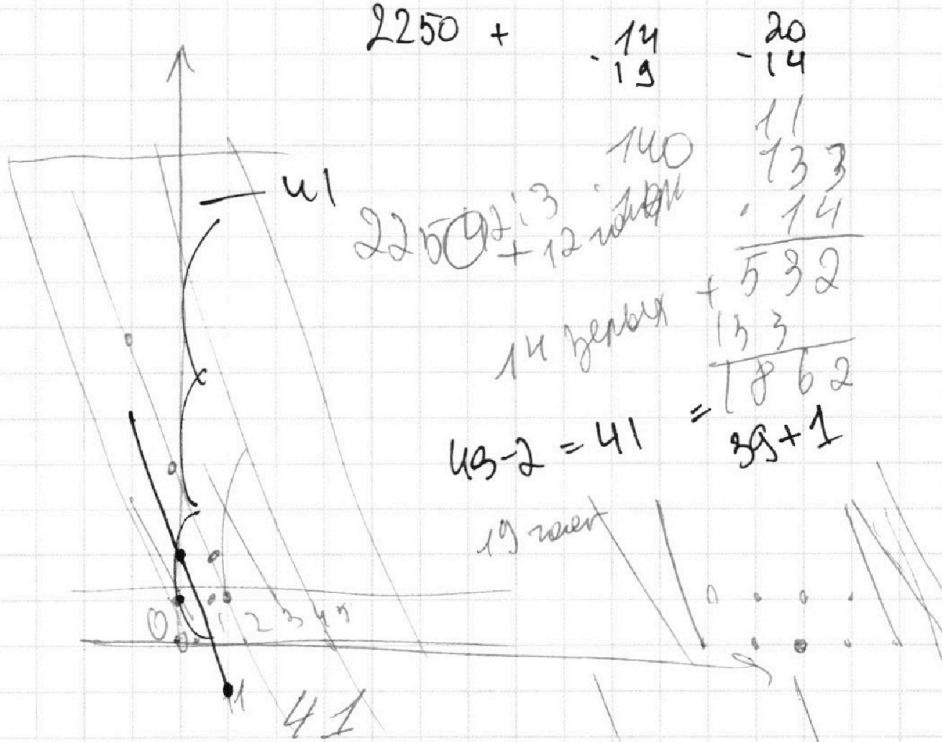
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2250 + 7 \cdot 14 \cdot 19 + 19 \cdot 13^2 - 2$$



$$2250 + \begin{matrix} -14 \\ 19 \end{matrix} - \begin{matrix} 20 \\ 14 \end{matrix}$$

$$2250 + 13 + 12$$

$$14 \text{ берем}$$

$$43 - 2 = 41 = 38 + 1$$

$$19 \text{ берет}$$

$$\begin{matrix} 11 \\ 133 \\ -14 \\ \hline 532 \\ 133 \\ \hline 1862 \\ 38+1 \end{matrix}$$

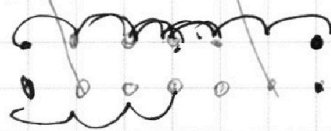
01:

$$3x_2 - 0 + y_2 - 1 = 33 \quad y_2 = 1$$

$$x = 11$$

$$3x_2 + y_2 = 34$$

$$y_2 = 34 - 3x_2$$



$$\begin{array}{r} 61 \\ - 14 \\ \hline 244 \\ + 61 \\ \hline 854 \\ + 21 \\ \hline 875 \end{array}$$

$$19 \cdot 13 = 7$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ - 13 \\ \hline \end{array}$$

$$20 \cdot 14^2$$

$$\begin{array}{r} 14^2 \\ 72 \\ 137 \\ - 13 \\ \hline 73 \\ + 277 \\ \hline 1377 \\ 137 \\ \hline 1781 \end{array}$$