



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

Докажем, что при минимальном произведении $a \cdot b \cdot c$, $a = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3}$

Предположим противное: $a = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot t$, где $t > 1$, $t \in \mathbb{N}$, $(t; 2) = 1$;
 $(t; 3) = 1$; $(t; 5) = 1$

Тогда рассмотрим число $a' = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3}$. Оно удовлетворяет

условию, т.к. в $a \cdot b$: $2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$, т.е. $2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot t \cdot b$: $2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$,

то $2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot b$: $2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ (т.к. $(t; 2) = 1$; $(t; 3) = 1$; $(t; 5) = 1$), т.е.

$$a' \cdot b = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

Тогда $a \cdot b \cdot c > a' \cdot b \cdot c \Rightarrow a \cdot b \cdot c$ - не минимально (?!)

Итак: $b = 2^{y_1} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{y_3}$; $c = 2^{z_1} \cdot 3^{z_2} \cdot 5^{z_3}$

Тогда:

$$a \cdot b: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 \geq 7 & (1.1) \\ x_2 + y_2 \geq 11 & (1.2) \\ x_3 + y_3 \geq 14 & (1.3) \end{cases} \quad b \cdot c: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + z_1 \geq 13 & (2.1) \\ y_2 + z_2 \geq 15 & (2.2) \\ z_3 + y_3 \geq 18 & (2.3) \end{cases}$$

$$a \cdot c: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{22} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + z_1 \geq 14 & (3.1) \\ x_2 + z_2 \geq 17 & (3.2) \\ x_3 + z_3 \geq 22 & (3.3) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} (1.1) + (1.2) + (1.3): 2(x_1 + y_1 + z_1) &\geq 34 \\ (2.1) + (2.2) + (2.3): 2(x_2 + y_2 + z_2) &\geq 43 \\ (3.1) + (3.2) + (3.3): 2(x_3 + y_3 + z_3) &\geq 45 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2^{\frac{34}{2}} \cdot 3^{\frac{43}{2}} \cdot 5^{\frac{45}{2}} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{22}$$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{22}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

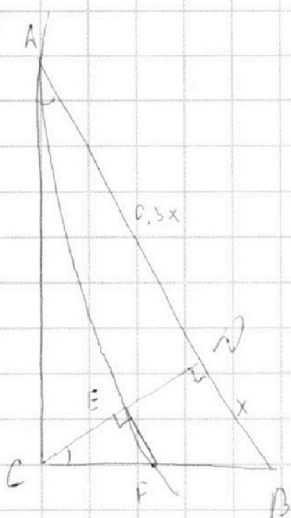
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2



$$] \quad BD = x \Rightarrow AB = 1,3x \Rightarrow AD = 0,3x$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle CAD = \angle DCB \\ 90^\circ = \angle ACD = \angle CDB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle CDB$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow DC = \sqrt{AD \cdot DB} = x \sqrt{\frac{3}{10}}$$

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{\frac{9}{100}x^2 + \frac{3}{10}x^2} = x \sqrt{\frac{39}{10}}$$

$$BC = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{x^2 + x^2 \cdot \frac{3}{10}} = x \sqrt{\frac{13}{10}}$$

Средняя точка C отк. от AB:

$$AC^2 = CF \cdot CB \Leftrightarrow CF = \frac{AC^2}{CB} = \frac{x^2 \cdot 39 \cdot \sqrt{10}}{100 \cdot x \cdot \sqrt{13}} = x \cdot \frac{39 \sqrt{10}}{100 \sqrt{13}}$$

$$\left. \begin{array}{l} EF \parallel AB \\ CD \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow EF \perp CD$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle CAD = \angle DCB \\ 90^\circ = \angle CEF = \angle ACD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle CEF, \quad k = \frac{AC}{CE} = \frac{x \sqrt{39 \cdot 10}}{10 \cdot x \cdot \frac{39 \sqrt{10}}{100 \sqrt{13}}}$$

$$= \frac{x \cdot \sqrt{39} \cdot 100 \cdot \sqrt{13}}{10 \cdot x \cdot 39 \cdot \sqrt{10}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$\frac{S(ADC)}{S(CEF)} = k^2 = \frac{10}{3}$$

S(CEF)

Ответ: $\frac{10}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 ~~№4~~

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

Найдем корни уравнения $\arccos(\sin x)$

$$\left. \begin{array}{l} \arccos(\sin x) = t \\ (\cos(\quad)) \end{array} \right\}$$

$$\sin x = \cos t$$

$$t = \frac{\pi}{2} - x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{(5-3)\pi}{2} = 6x$$

$$\pi = 6x \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{6} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



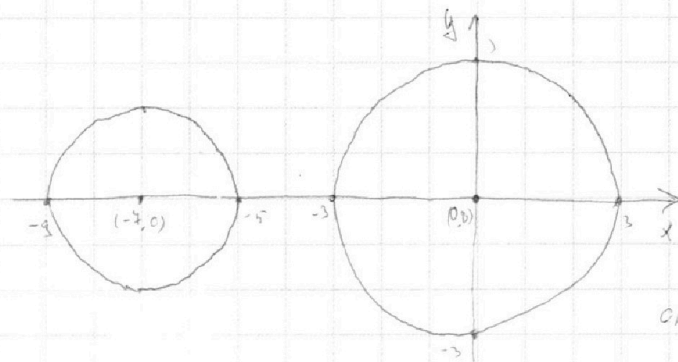
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

Для начала разберёмся со второй уравнением.

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 & \text{- окр-ть с центром } (-7, 0), \text{ радиусом } 2 \\ x^2 + y^2 = 9 & \text{- окр-ть с центром } (0, 0), \text{ радиусом } 3. \end{cases}$$



Любая прямая пересекается с окр-той в 0, 2-х точках.

Прямая $x + 3y - 7b = 0$ должна иметь ровно 4 пересечения, а это значит, что она пересекает каждую из окр-т в 2-х точках.

То, что прямая пересекает окр в 2-х точках \Leftrightarrow $\rho(\text{центра, прямая}) < R$:

$$\begin{cases} \frac{|0 + 3 \cdot 0 - 7b|}{\sqrt{9b^2 + 1}} < 3 \\ \frac{|-7 + 3 \cdot 0 - 7b|}{\sqrt{9b^2 + 1}} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| < \frac{3\sqrt{9b^2 + 1}}{7} \\ |b+1| < \frac{2\sqrt{9b^2 + 1}}{7} \end{cases}$$

← знак не помешает, т.к. мы делим на $\sqrt{9b^2 + 1} > 0$

$t = \sqrt{9b^2 + 1}$, $t \in [1; +\infty)$. Тогда задача звучит так: при каких $t \in [1; +\infty)$ $\exists b$, удов. условию: ~~...~~

$$\begin{cases} |b| < \frac{3}{7}t \\ |b+1| < \frac{2}{7}t \end{cases}$$

1) Найдем t , при которых $\exists b > 0$:

$$\begin{cases} b < \frac{3}{7}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases} \quad \text{Такой } b \text{ существует, если } \begin{cases} \frac{3}{7}t > 0 \\ \frac{2}{7}t - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t > \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t > \frac{7}{2}$$

т.к. если одно из них будет ≤ 0 , то b ~~один из них~~ ≤ 0 , и b должно > 0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2) Найдем, когда есть $b \in [-1; 0]$

$$\begin{cases} b > \frac{3}{7}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{7}t < \frac{2}{7}t - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{7}t < -1 \Leftrightarrow t < -7$$

3) Найдем, когда есть $b \in (-\infty; -1)$

$$b > \frac{3}{7}t$$

$$\begin{cases} b > -\frac{2}{7}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{2}{7}t < \frac{2}{7}t - 1 \Leftrightarrow \frac{5}{7}t > 1 \Leftrightarrow t > \frac{7}{5}$$

При таком t : $-\frac{3}{7}t < -\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{5} = -\frac{3}{5}$; $\frac{2}{7}t - 1 > \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5} \Rightarrow b \in (-\frac{3}{5}; -\frac{3}{5})$

3) Найдем, когда есть $b < -1$

$$\begin{cases} b > -\frac{3}{7}t \\ b > -\frac{2}{7}t - 1 \end{cases} \quad \text{Такой элемент, если:} \quad \begin{cases} -\frac{3}{7}t < -1 \\ -\frac{2}{7}t - 1 < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} t > \frac{3}{7} \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t > \frac{3}{7}$$

4) объединим два случая.

$$\begin{cases} t > \frac{7}{5} \\ t > \frac{3}{7} \\ t > \frac{3}{7} \end{cases} \Leftrightarrow t > \frac{7}{5} \Leftrightarrow \sqrt{9a^2 + 1} > \frac{4}{5} \Leftrightarrow 9a^2 + 1 > \frac{16}{25} \Leftrightarrow 9a^2 > \frac{11}{25} \Leftrightarrow a^2 > \frac{11}{225} \Leftrightarrow a > \frac{\sqrt{11}}{15} \vee a < -\frac{\sqrt{11}}{15}$$

$$\Leftrightarrow a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{11}}{15}) \cup (\frac{\sqrt{11}}{15}; +\infty)$$

Ответ: при $a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{11}}{15}) \cup (\frac{\sqrt{11}}{15}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

1) $\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x}^4 7 = \log_{6x}^4 7^3 - 4$ ОДЗ: $x > 0; x \neq \frac{1}{6}$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4$$

$\log_7(6x) = t, \text{ т.к. } 6x \neq 1, t \neq 0$

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \quad | \cdot 2t$$

$$2t^5 - 4 = 3 - 8t \Leftrightarrow 2t^5 + 8t - 7 = 0 \quad (1)$$

2) $\log_7^4 y + 6 \log_y^4 7 = \log_y^4 (7^5) - 4$ ОДЗ: $y > 0; y \neq 1$

$\log_7 y = u, u \neq 0$

$$u^4 + \frac{6}{u} = \frac{5}{2u} - 4 \quad | \cdot 2u$$

$$2u^5 + 12 = 5 - 8u \Leftrightarrow 2u^5 + 8u + 7 = 0 \quad (2)$$

$$(1) + (2): 2(t^5 + u^5 + 4(t+u)) = 0$$

$$(t+u)(t^4 - t^3 u + t^2 u^2 - t u^3 + u^4 + 4) = 0$$

$$(t+u)(t^2 + u^2)^2 - t^2 u^2 - t u(t^2 + u^2) + 4 = 0$$

$$(t+u)(t(t^2 - u^2) - u(t^2 - u^2) + t^2 u^2 + 4) = 0$$

$$(t+u)((t-u)(t+u)(t^2 + tu + u^2) + t^2 u^2 + 4) = 0$$

$$(t+u) \left(\underbrace{(t-u)^2}_{\neq 0} \underbrace{(t^2 + tu + u^2)}_{\neq 0} + \underbrace{t^2}_{\neq 0} \underbrace{u^2}_{\neq 0} + 4 \right) = 0$$

$t = -u$

$$t + u = 0$$

$$\log_7(6x) + \log_7(y) = 0$$

$$\log_7(6xy) = 0$$

$$6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Ур-ния (1) и (2) имеют всего

≥ 1 корень, т.к. они не являются

линейными относительно t и u .

Тогда для этих $t_0 \neq 0$ и $u_0 \neq 0$ $\exists x, y$,
а по условию $xy = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

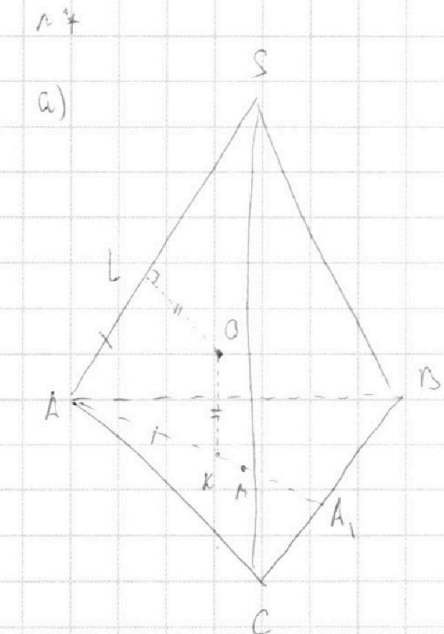
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



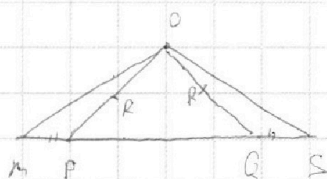
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $OK \perp \triangle ABC \Rightarrow OK \perp AM$
 $OL \perp AL$

2) $\triangle ALO; \triangle AKO$. AO - общ., $OL = OK$ - радиусы,
 $\angle OLA = \angle OKA = 90^\circ \Rightarrow \triangle ALO \cong \triangle AKO$ (катет и гипот.)
 $AL = KA$

3) $\triangle MPO \cong \triangle OSQ$



$OP = \sqrt{R^2 + KM^2} > R$
 $OS = \sqrt{R^2 + LS^2} > R$
 $\Rightarrow P, Q \in MS$

$OP = OQ$ - радиусы.

$MP = QS$ - кат.

$\angle OPR = \angle OQS$ ($\angle OPR = \angle OSQ$)

$\angle MPO = \angle SQO$

$\Rightarrow \triangle MPO \cong \triangle SQO \Rightarrow OM = OS$

(если P и Q поменяны местами, то аналогично)

4) $\triangle OKM; \triangle OLS$

$OL = OK$ - радиусы

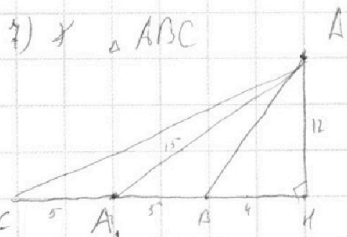
$OM = OS$ (н. 3)

$\angle OKM = \angle OLS = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle OSL \cong \triangle OKM$ (катет и гипот.) $\Rightarrow MK = LS$

5) $AL = AK$ (н. 2) $\Rightarrow AL + LS = AK + KM \Rightarrow AM = AS = 10$
 $MK = LS$ (н. 4)

6) $AM = \frac{2}{3} AA_1 \Rightarrow AA_1 = 15$



$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = 60 \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot 60}{10} = 12$

$AA_1 = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = 9 > \frac{10}{2} \Rightarrow H$ находится вне $\triangle ABC$ (п. 3 и 6)

$AB = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160}$

$AC = \sqrt{12^2 + 14^2} = \sqrt{340}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



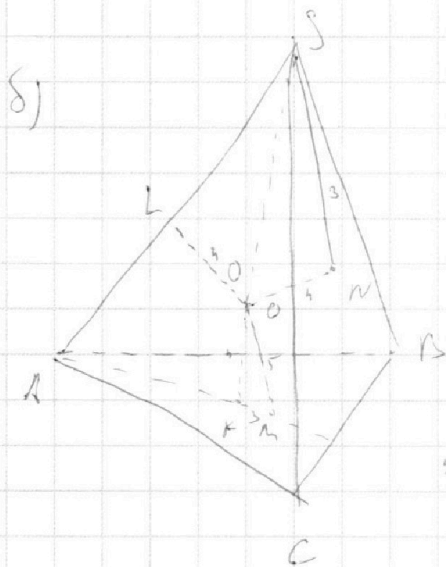
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$8) BB_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2BA^2 + 2BC^2 - AC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 160 + 2 \cdot 100 - 340} = \frac{1}{2} \sqrt{180}$$

$$CC_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2CA^2 + 2CB^2 - AB^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 340 + 2 \cdot 100 - 160} = \frac{1}{2} \sqrt{720}$$

$$9) AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 6\sqrt{2} = \frac{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 9 \cdot 15 \cdot 10 = 1350$$



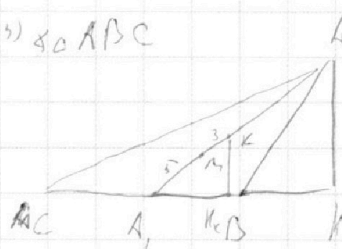
Order: 1350

$$1) ON \perp SBC \Rightarrow ON \perp SN \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle OSN = \text{right-angled} \Rightarrow OS = 5$$

$$2) \text{ по (а. 3): } OM = OS = 5 \Rightarrow KM = 3 \text{ (а)} \Rightarrow$$

3) $\triangle ABC$



$$A_1 K = \frac{1}{3} AA_1 = 5$$

$$A_1 K = 5 + 3 = 8 \Rightarrow$$

~~$$\Rightarrow A_1 K = \frac{8}{15} AA_1 \Rightarrow A_1 H_K = \frac{8}{15} A_1 H = \frac{8}{15} \cdot 9 = \frac{24}{15} \geq 5 \Rightarrow H_K \in \triangle ABC$$~~

~~$$BK = \sqrt{KB^2 + KK^2} = \sqrt{\frac{4}{25} + \left(\frac{8}{15} \cdot 12\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{96}{25}}$$~~

~~$$CK = \sqrt{KC^2 + KK^2} = \sqrt{\dots}$$~~

~~А именно закрывается, поэтому только так.~~

~~Найти СК, ВК, по теореме Пифагора найти~~

~~$$\Rightarrow KK_K = \frac{8}{15} \cdot 12 = \frac{32}{5}$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

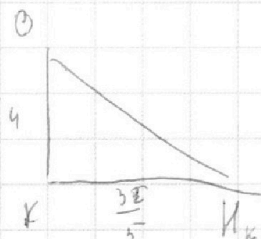
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



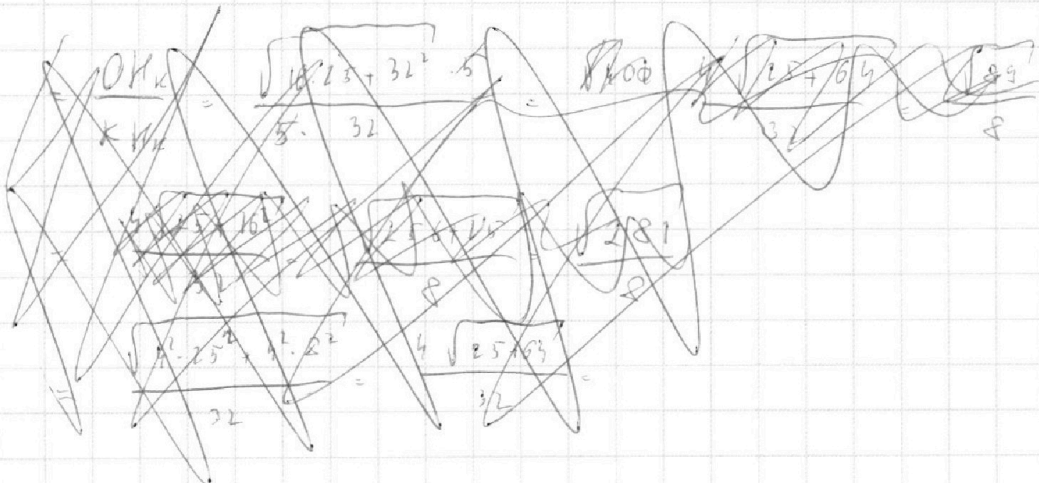
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4) $K = \text{пр}(O; \triangle ABC) \left\{ \begin{array}{l} 3^2 \\ \Rightarrow OI_K \perp BC \end{array} \right.$
 $KI_K \perp AC$



$$OI_K = \sqrt{16 + \frac{32^2}{25}}$$

5) $KBC = \text{пр}_{ABC} OBC \Rightarrow \cos \widehat{BC} = \frac{S(KBC)}{S(ABC)} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot OI_K}{\frac{1}{2} AC \cdot OI_K} =$



$$= \frac{32 \cdot 5}{5 \cdot \sqrt{16 + 32^2}} = \frac{32}{\sqrt{25 + 64}} = \frac{8}{\sqrt{89}}$$

$$\widehat{BC} = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{89}}\right)$$

$$\text{Ответ: } \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{89}}\right)$$

~~.....~~



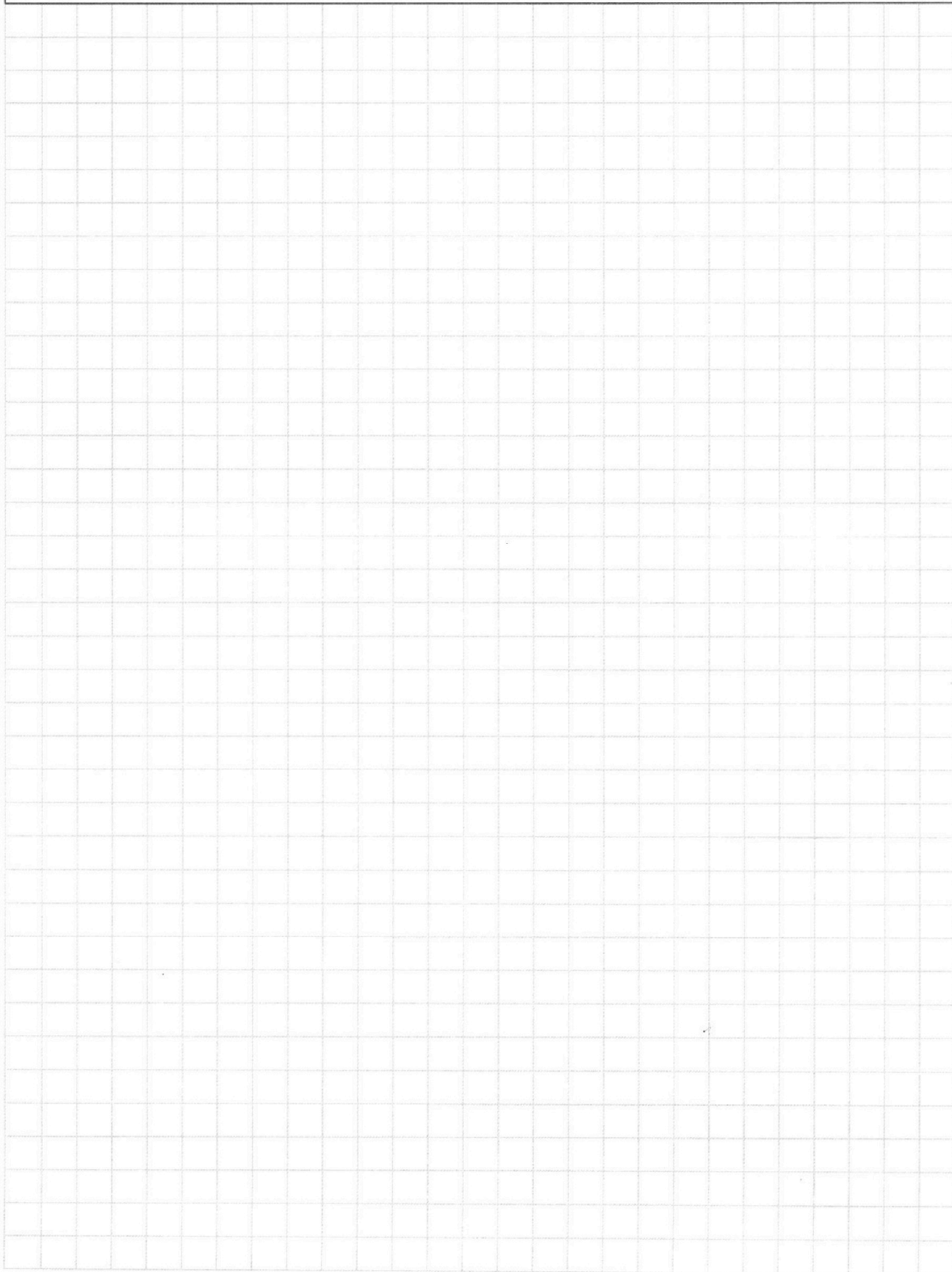
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 4 \quad | \cdot 2t$$

$$2t^5 + 12 = 5 - 8t$$

$$2t^5 + 8t + 7 = 0$$

$$t = \log_4 y$$

$$2u^5 + 8u - 7 = 0$$

$$u = \log_7 6x$$

$$t^5 + u^5 + 4(t+u) = 0$$

$$(t+u)(t^4 - t^3u + t^2u^2 - tu^3 + 2t^4) + 4(t+u) = 0$$

$$(t+u)(t^4 - t^3u + t^2u^2 - tu^3 + u^4 + 4) = 0$$

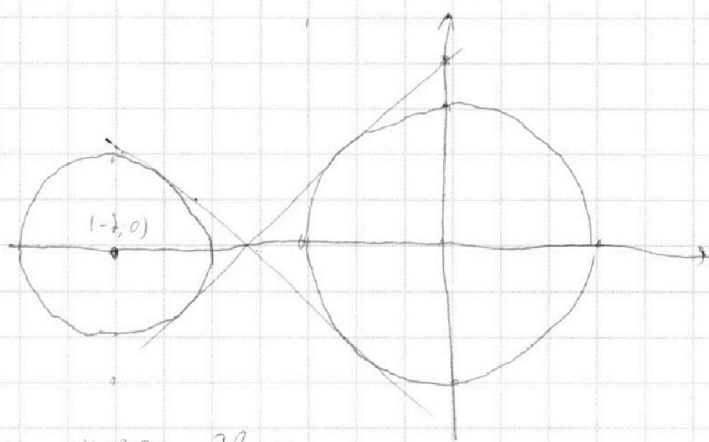
$$t = -u$$

$$\log_2 y + \log_2 6x = 0$$

$$\log_2 6xy = 0$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$(x+y^x)^2 + y^2 = 4$$



Прямая $x + 3y - 7 = 0$

пересекает в 4-х точках

$$y = \frac{x}{3} + \frac{7}{3} \quad D = 0 \quad \text{но не}$$

не

модуль Δ и Δ при подб, тогда $f(a, c)$ го $3y + x - 7 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4 \quad \text{ОДЗ: } 6x > 0$$

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4 \quad 6x \neq 1$$

$$\log_7(6x) = t$$

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \quad | \cdot 2t$$

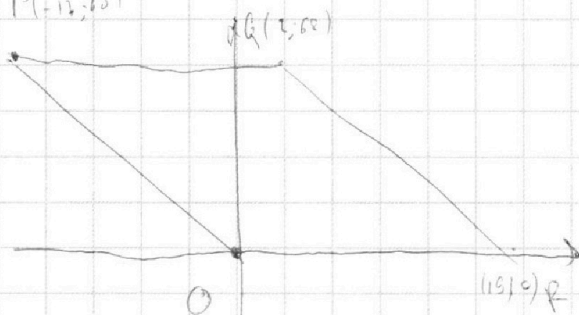
$$2t^5 - 4 = 3 - 8t$$

$$2t^5 + 8t - 7 = 0$$

$$2t^5 + 8t - 7 = 0$$

$$t = 1 \quad t = \frac{1}{2} \quad t = \frac{7}{2}$$

$$\begin{array}{r} 2t^5 + 0t^4 + 0t^3 + 0t^2 + 8t - 7 \quad | \quad 2t + 7 \\ \underline{2t^5 + 7t^4} \\ + 7t^4 + 8t - 7 \end{array}$$



$$4a + b = 40$$

$$4a + b = 40$$

$$4a - b = 40$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

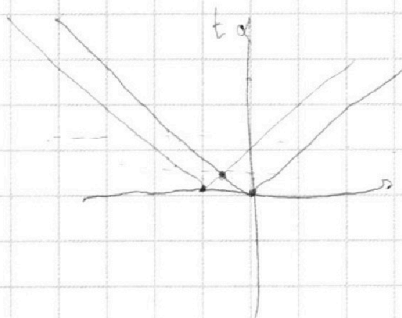
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \frac{|7b|}{\sqrt{9a^2+1}} < 3 \\ \frac{|-7-7b|}{\sqrt{9a^2+1}} < 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} |b| < \frac{3\sqrt{9a^2+1}}{7} \\ |b+1| < \frac{2\sqrt{9a^2+1}}{2} \end{cases}$$

~~Или~~

$$t = \sqrt{9a^2+1}$$

Или равносильно $t \geq 1$

$$\begin{cases} |b| < \frac{3}{7}t \\ |b+1| < \frac{3}{7}t \end{cases}$$

1) $b \geq 0$, то $\begin{cases} b < \frac{3}{7}t \\ b+1 < \frac{3}{7}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < \frac{3}{7}t \\ b < \frac{3}{7}t - 1 \end{cases}$

еще $\frac{3}{7}t - 1 < 0$ то $b > \frac{3}{7}$

$$t < \frac{7}{2}$$

$$9a^2+1 < \frac{49}{4}$$

$$9a^2 < \frac{45}{4}$$

$$a^2 < \frac{5}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} < a < \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

2) $b < 0$, то $\begin{cases} b > \frac{3}{7}t \\ b+1 > \frac{3}{7}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > \frac{3}{7}t \\ b > \frac{3}{7}t - 1 \end{cases}$

т.е. $\frac{3}{7}t - 1 \geq 0$, то $b > \frac{3}{7}t - 1$

$$b > \frac{3}{7}t - 1 < 0$$

$$t < \frac{7}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



При $k \geq 1$

$$\exists b: \begin{cases} |b| < \frac{3}{7}t \\ |b+1| < \frac{2}{5}t \end{cases}$$

$$\sqrt{9a^2-1} > \frac{2}{5}$$

$$9a^2-1 > \frac{4}{25}$$

$$9a^2 > \frac{25}{25} \quad a^2 > \frac{4}{5}$$

Посмотрим, когда есть $b > 0$.

$$b < \frac{3}{7}t$$

$$b < \frac{2}{7}t - 1$$

$$\text{При } \frac{2}{7}t - 1 > 0$$

$$t > \frac{7}{2} \quad \text{и.е. } t \in \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$$

Посмотрим, когда есть $b \in [-1; 0]$:

$$\begin{cases} b > \frac{2}{7}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases}$$

$$\frac{2}{7}t > \frac{2}{7}t - 1$$

$$\begin{cases} 2t > 2t - 7 \\ t < -7 \end{cases}$$

Посмотрим, когда есть $b < -1$:

$$-\frac{3}{7}t < -1$$

$$\begin{cases} b > -\frac{3}{7}t \\ b > -\frac{2}{7}t - 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{9a^2+1} > \frac{4}{2}$$

$$9a^2+1 > \frac{16}{4}$$

$$9a^2 > \frac{15}{4}$$

$$a^2 > \frac{5}{4}$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$$

$$\left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right]$$

$$t > \frac{7}{5}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{7}t \leq 0 \\ \frac{2}{7}t - 1 \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2}t < \frac{7}{2}t - 1$$

$$\frac{5}{2}t > -1$$

$$\begin{cases} \frac{3}{7}t > 0 \\ \frac{2}{7}t - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > \frac{7}{2} \\ t > 0 \end{cases}$$

$$t > \frac{7}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

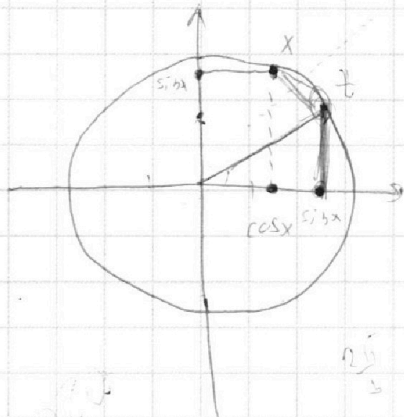
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arccos \cos x \in [0; \pi]$$



$$\frac{1}{\cos x} \cdot \cos x$$

$$\cos x$$

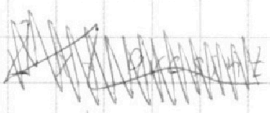
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x = \sin x$$

$$\sin^2 x + y^2 = 1$$

$$y = \cos x$$

$$\arccos(\sin x) = \sqrt{1-x^2}$$



$$\sin x = \cos t$$

$$x = \frac{\pi}{2} - t$$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{3\pi}{2} + x \quad x \in [-1; 1]$$

$$25 - 25x^2 = \frac{9\pi^2}{4} + 3\pi x + x^2 \quad \frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2}$$

$$26x^2 + 3\pi x + \frac{9\pi^2}{4} - 25 = 0$$

$$\frac{-2x}{25} \quad \frac{3\pi}{2} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2} - x} = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

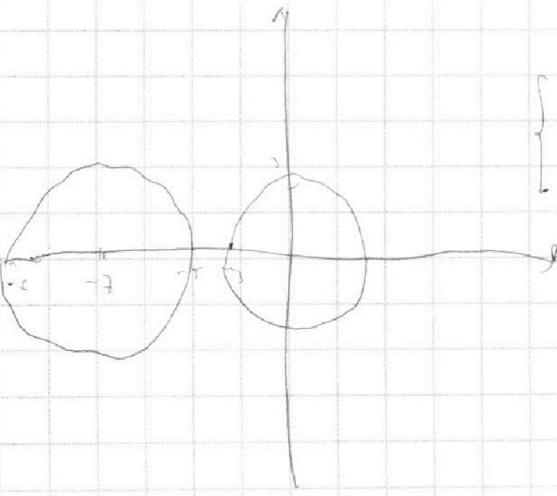
$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$



$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ ((x + \frac{7}{2})^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\arccos(\sin x) = t$$

$$\sin x = \cos t$$

$$x = -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$BC: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$AC: 2^{15} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23}$$

$$a = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3}$$

$$b = 2^{y_1} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{y_3}$$

$$c = 2^{z_1} \cdot 3^{z_2} \cdot 5^{z_3}$$

$$\therefore abc: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$\begin{cases} x+y+z=14 \\ x+y=7 \\ y+z=13 \\ z+x=14 \end{cases} \Rightarrow x+y+z = \frac{34}{2} = 17$$

$$x+y \geq 7$$

$$x+z \geq 13$$

$$14+18=32$$

$$AC^2 = CE \cdot CD = CF \cdot CB$$

$$\triangle CAD \sim \triangle FCE$$

$$\triangle ADC \sim \triangle CAB$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{CD}{BC}$$

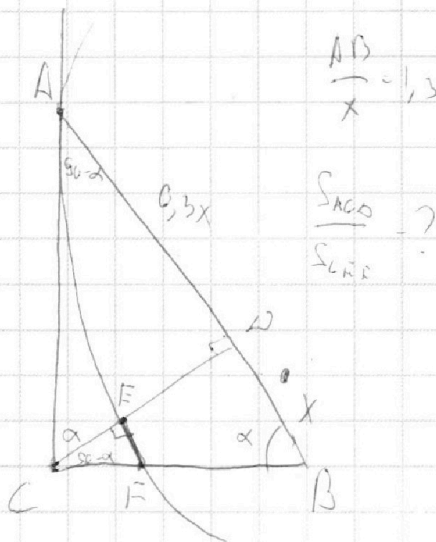
$$\frac{AD}{AC} = \frac{DC}{AB} \Rightarrow DC = \sqrt{AD \cdot AB} = x \sqrt{\frac{3}{10}}$$

$$BC = \sqrt{x^2 + x^2 \cdot \frac{3}{10}} = x \sqrt{\frac{13}{10}}$$

$$AC = \sqrt{\frac{3}{10}x^2 + \frac{9}{100}x^2} = x \sqrt{\frac{39}{100}} = x \frac{\sqrt{39}}{10}$$

$$x \cdot \frac{\sqrt{39}}{100} = CF \cdot x \sqrt{\frac{13}{10}} \Rightarrow CF = x \cdot \frac{29 \cdot \sqrt{10}}{100 \cdot \sqrt{13}}$$

$$\frac{AC}{CF} = \frac{x \cdot \sqrt{39 \cdot 100 \cdot \sqrt{13}}}{10 \cdot x \cdot 39 \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}} = \sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow \frac{5}{5} = \frac{10}{3}$$



$\frac{AD}{x} = 1,3$
 $\frac{S_{ADC}}{S_{CFE}} = ?$
 $\frac{S_{ADC}}{S_{CFE}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$t^4 - t^3 u + t^2 u^2 - t u^3 + u^4 + 4 = (t^2 + u^2)^2 - t^2 u^2 - t u (t^2 + u^2) + 4 =$$

$$= (t^2 + u^2)(t^2 - t u + u^2) - 2 t^2 u^2 + 4 =$$

$$(t-u)(t^2 + u^2) +$$

$$\begin{cases} -b < \frac{3}{2}t \\ b+1 < \frac{7}{2}t \end{cases} \quad \begin{cases} b > -\frac{3}{7}t \\ b < \frac{7}{2}t - 1 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2}t < \frac{7}{2}t - 1 \Leftrightarrow -\frac{5t}{2} > -1 \quad t > \frac{2}{5}$$

$$-\frac{3}{2}t < -\frac{3}{7}$$

и... 3

$$\frac{7}{2}t - 1 > -\frac{3}{7} \Rightarrow t > \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$49 + 25 = 74$$

$$t \approx \sqrt{2}$$

$$b > -\frac{3}{7}t$$

$$b > -\frac{7}{2}t - 1$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}t < -1 \\ -\frac{7}{2}t - 1 < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}t > 1 \\ t > 0 \end{cases} \quad t > \frac{2}{3}$$

$$AM = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 160 + 2 \cdot 340 + 100} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{900} =$$

$$320 + 200 = 520$$

$$180$$

$$620 - 160 = 460$$

$$400 - 20 + 100 = 480$$

$$-180$$

$$900 - 180 = 720$$

$$9 \cdot 15 =$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ +45 \\ \hline 1350 \end{array}$$

$$9 \cdot 8 = 72$$



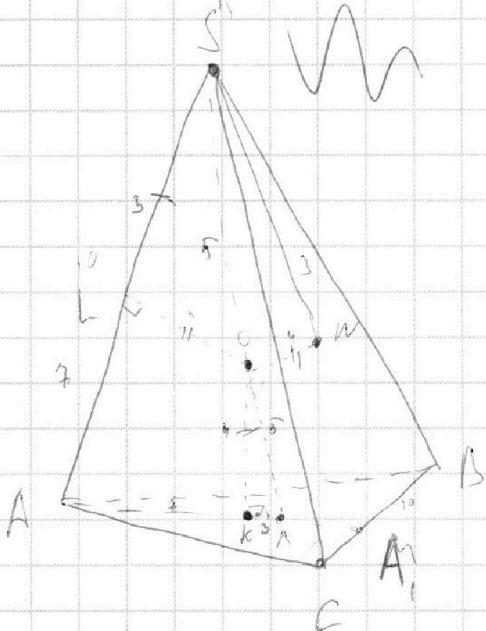
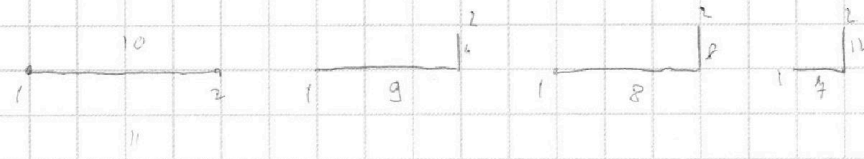
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$S(ABC) = 60$
 $BC = 10$
 $P(ABC) = 12$

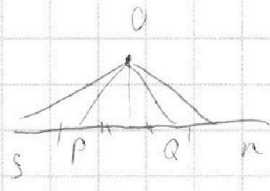
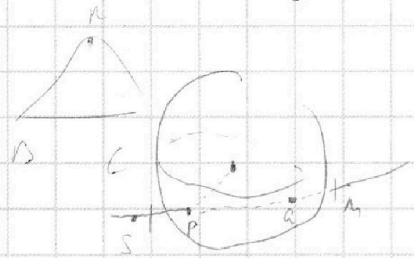
$\triangle OSM \sim \triangle OKN$

$\frac{1}{8} \sqrt{(2a^2 + 2b^2 - d)(2a^2 + 2c^2 - d)(2a^2 + 2b^2 - d)}$

$50 + 15 =$

$$\begin{array}{r} 144 \\ + 16 \\ \hline 160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ + 196 \\ \hline 340 \end{array}$$



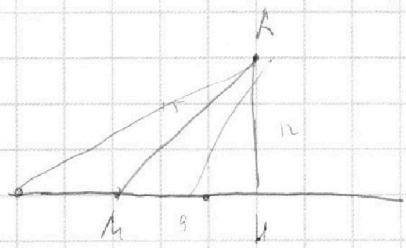
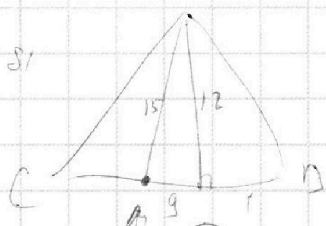
$OS = OM$

$SL = KM$

$AL = AK$

$LS = KM$

$\Rightarrow AS = AM \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AA_2$



5