



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-15; 90)$ ,  $Q(2; 90)$  и  $R(17; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8. ———

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 1:

$$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

Обозначим за  $v_k(n)$  - степень

входящего числа  $k$  в  $n$ .

$$(т.е.  $v_2(2^3 \cdot 5^2) = 3$ )$$

$\Rightarrow$  Тогда  $v_k(m \cdot n) = v_k(m) + v_k(n)$ , т.к. степени при перемножении складываются.

$$\Rightarrow v_2(ab) \geq 6, \text{ т.к. } ab: 2^6$$

$$v_2(bc) \geq 14, \text{ т.к. } bc: 2^{14}$$

$$v_2(ac) \geq 16, \text{ т.к. } ac: 2^{16}$$

$$\Rightarrow v_2(a) + v_2(b) \geq 6$$

$$+ v_2(b) + v_2(c) \geq 14$$

$$+ v_2(a) + v_2(c) \geq 16$$

$$2(v_2(a) + v_2(b) + v_2(c)) \geq 6 + 14 + 16 = 36$$

$$\Rightarrow v_2(abc) \geq \frac{36}{2} = 18$$

Аналогично для делителя 5:

$$v_5(ab) \geq 11$$

$$v_5(ac) \geq 28$$

$$v_5(bc) \geq 13$$

$$\Rightarrow v_5(abc) \geq \frac{11 + 28 + 13}{2} = 26, \text{ округляю}$$

$$v_5(ac) \geq 28 \Rightarrow v_5(abc) \geq 28, \text{ т.к. } abc: ac$$

Аналогично для делителя 3:

$$v_3(ab) \geq 13$$

$$v_3(bc) \geq 21$$

$$v_3(ac) \geq 25$$

$$\Rightarrow v_3(abc) \geq \frac{13 + 21 + 25}{2} \geq \frac{59}{2} \geq 29,5$$

$$\Rightarrow v_3(abc) \geq 30, \text{ т.к. } abc \in \mathbb{N}$$

(натуральное)

Из всех 3 неравенств на  $v_{2,3,5}(abc)$ :

$$\Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

Пример:

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$

$$\Rightarrow ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

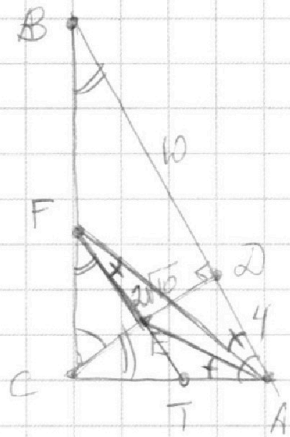
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



√2



$AB:BD = 1,4$ , Заметим, что мы можем <sup>в k раз</sup> изменить масштаб картинки и от-   
 кажутся площади не измен., т.к.  $\sqrt{}$  из   
 них увел. в  $k^2$  раз.  $\Rightarrow$  Пусть  $BD = 10$    
  $AD = 4$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{14}{10} = 1,4.$$

$\Rightarrow$  из подобия  $\triangle BDC$  и  $\triangle CDA$  (по двум углам)   
  $90^\circ$  и  $\angle 1 = \angle 2$    
 и  $\angle BDC = \angle DAC$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow DC^2 = BD \cdot DA = 40$$

$$\Rightarrow DC = 2\sqrt{10}$$

$$AC^2 = 16 + 40 = 56 \Rightarrow AC = 2\sqrt{14}$$

$$BC^2 = 100 + 40 = 140 \Rightarrow BC = 2\sqrt{35}$$

$$\begin{aligned} (*) S(ACD) &= \frac{CD \cdot DA \cdot \frac{1}{2}}{S(CEF)} = \frac{CD \cdot DA \cdot \frac{1}{2}}{CE \cdot EF \cdot \frac{1}{2}} = \frac{DA}{BD \cdot k(1-k)} \\ (**) &= \frac{4}{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{16}{10} = 1,6 \end{aligned}$$

Так как AC касательная к окружности FEA  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAE = \angle EFA$ , также  $\angle EFA = \angle FAB$  из  $FE \parallel AB$

Пусть  $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} = k \Rightarrow BF = CB - k \cdot CB = CB(1-k)$  (\*)   
  $CE = CD(1-k)$    
  ~~$FE = k \cdot BD$~~   $FE = k \cdot BD$

Продлим FE до пересечения с AC: T  $(FE) \cap AC = T$

$\Rightarrow$   ~~$TE = DA \cdot k$~~ ;  ~~$TF = BA \cdot k$~~   $TE = DA \cdot k$ ;  $TF = BA \cdot k$    
  $TA = CA(1-k)$

$TE \cdot TF = TA^2$  (степенью т. T отн (FEA)).

$$\Rightarrow DA \cdot BA \cdot k^2 = CA^2(1-k)^2$$

$$\Rightarrow \frac{4 \cdot 14}{4 \cdot 14} = \frac{(1-k)^2}{k^2} \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{2} (**)$$

Ответ: 1,6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача 1~~ Задача 3:

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

Поскольку  $\arccos(\cdot)$  возвращает значения от 0 до  $\pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$\Rightarrow 9\pi - 2x \leq 10\pi \Rightarrow -\pi \leq 2x \Rightarrow x \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$9\pi - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{9\pi}{2} = 4,5\pi$$

$$10 \arccos(\sin x) = 10 \arccos\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\text{Или тогда } -4\pi \leq -x + \frac{\pi}{2} \leq \pi$$

$\Rightarrow$  Чтобы раскрыть  $\arccos(\cdot)$   $\neq 5$  случаев:

$$1) 0 \leq -x + \frac{\pi}{2} \leq \pi \Rightarrow 10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 5\pi - 10x$$

$$= 5\pi - 10x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow -4\pi = 8x \Rightarrow$$

$$x = -\frac{4\pi}{8} = -\frac{\pi}{2}$$

и действительно  $0 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \leq \pi$

$$2) -\pi \leq -x + \frac{\pi}{2} \leq 0 \Rightarrow 10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 10\left(\frac{\pi}{2} - x + \pi\right) =$$

$$= 5\pi - 10x + 10\pi = 15\pi - 10x$$

$$15\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow 6\pi = 8x \Rightarrow$$

$$x = \frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$$

- подходит.

$$-\pi \leq -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} < 0$$

$$-\frac{\pi}{4}$$

$$3) -2\pi \leq -x + \frac{\pi}{2} < -\pi \Rightarrow 10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi\right)$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi\right) = 5\pi + 20\pi - 10x = 25\pi - 10x$$

$$-\pi \leq -2\pi + \frac{\pi}{2} < -\pi$$

$$25\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow 8x = 16\pi \Rightarrow$$

$$x = 2\pi$$

см. на след. листе

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи № 3:

$$4) \quad -3\pi \leq -x + \frac{\pi}{2} < -2\pi$$

$$\Rightarrow 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 10(\frac{\pi}{2} - x + 3\pi) = 35\pi - 10x$$

$$35\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$\Rightarrow 8x = 26\pi \Rightarrow x = \frac{26\pi}{8} = \frac{13\pi}{4}$$

$$-\frac{13\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{-13\pi + 2\pi}{4} = \frac{-11\pi}{4} < -2\pi \quad \text{и} \quad \frac{-11\pi}{4} \geq -3\pi$$

$\Rightarrow$  подходит

$$5) \quad -4\pi \leq -x + \frac{\pi}{2} < -3\pi$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 10(-\frac{\pi}{2} - x + 4\pi) = 45\pi - 10x$$

$$45\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow 8x = 36\pi \Rightarrow x = \frac{36\pi}{8} = \frac{9\pi}{2} = 4,5\pi$$

$$-4,5\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{-9\pi + \pi}{2} = \frac{-8\pi}{2} = -4\pi < -3\pi$$

$\Rightarrow$  подходит

$\Rightarrow$  Ответ:  $x = -\frac{\pi}{2}$ ;  $x = \frac{13}{4}\pi$ ;

$x = \frac{3\pi}{4}$ ;  $x = \frac{9}{2}\pi$ .

$x = 2\pi$ ;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

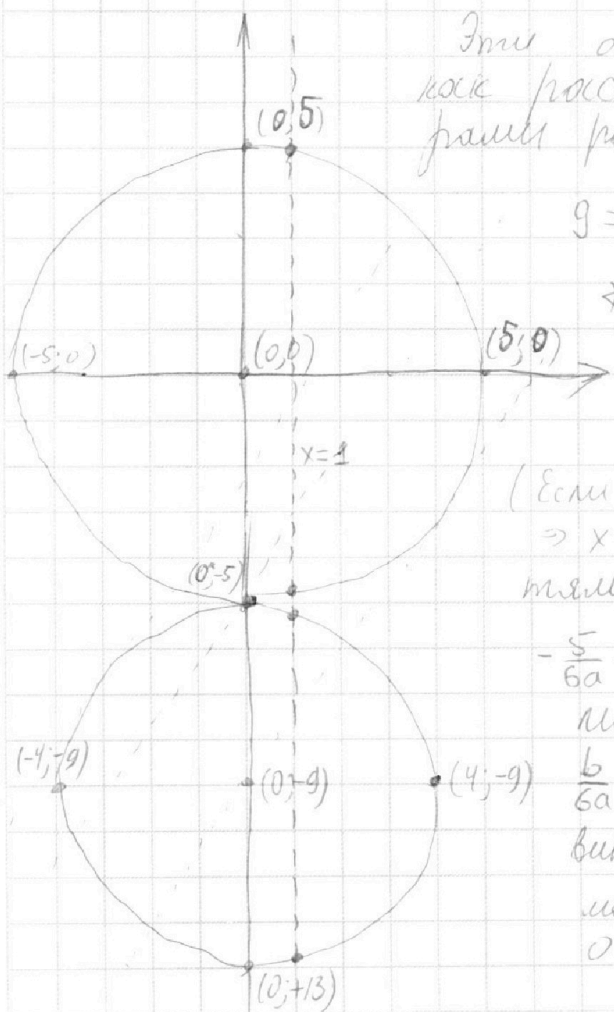
Задача №4:

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 & \text{— это какая-то прямая} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 44) = 0 & \text{— а это 2 окружности:} \end{cases}$$

Короче  $x^2 + y^2 - 25 = 0$  — уравнение окружности с центром  $(0; 0)$  и радиусом 5.

$x^2 + y^2 + 18y + 44 = x^2 + (y + 9)^2 - 16 = 0$  — уравнение окружности с центром  $(0; -9)$  и радиусом 4.



Эти окружности касаются, так как расстояние между их центрами равно сумме радиусов:

$$9 = 4 + 5.$$

и прямую  $5x + 6ay - b = 0$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a} \quad (\text{если } a \neq 0)$$

(Если  $a = 0$ , то  $5x = b \Rightarrow x = \frac{b}{5} \Rightarrow$  4 пересечения с окружностями есть)

$-\frac{5}{6a}$  — наклон прямой (может быть любым, кроме 0)

$\frac{b}{6a}$  — то, насколько эта прямая сдвинута по вертикальной оси, если может быть любым, в том числе 0 ( $b = 0$ ).  $\frac{b}{6a} = k \Rightarrow b = 6ak$ .

ан. на след. листе

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

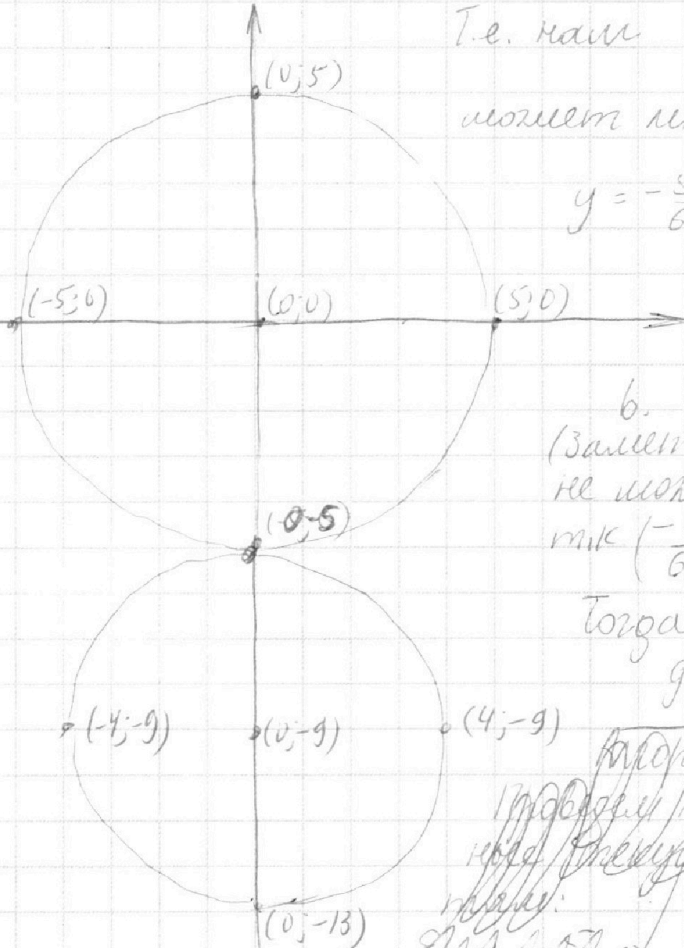
- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжение 54:



Т.е. нам необходимо понять,  
может ли прямая

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$$

пересечь эти  
окружности в 4  
точках при изменении

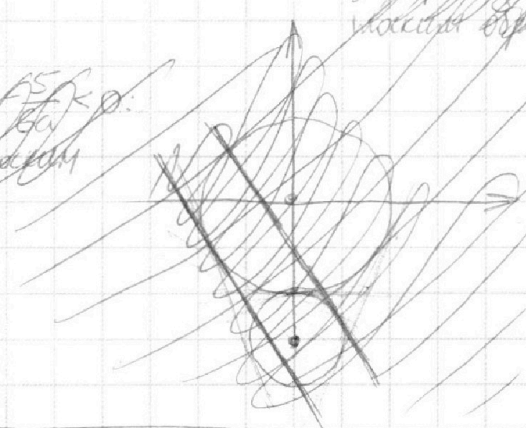
$b$ .

(Заметим, что прямая  
не может быть горизонтальной,  
так  $-\frac{5}{6a} \neq 0$ .)

Тогда (!) что это возможно  
для любой прямой.

Параметры касательных параллельных  
касательных к окружностям  
параметры касательных параллельных  
касательных к окружностям  
параметры касательных параллельных  
касательных к окружностям

~~Для  $-\frac{5x}{6a} < 0$ :  
то же самое~~



Для  $\forall$  направления прямой  
найдут такое положение, что она  
пересечет  $\forall$  из окружн. в  
2ух точках.

см. след. стр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

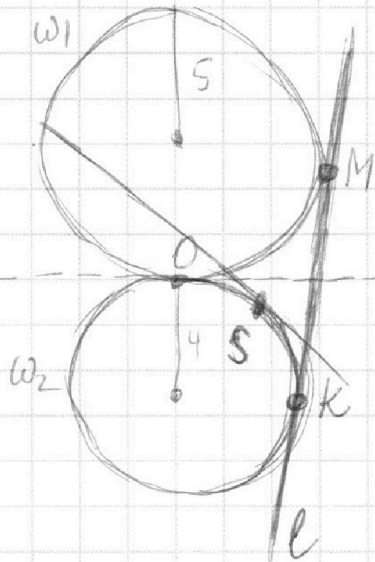
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение № 4.

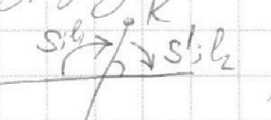


Проведем к окружностям ~~ω~~  
общую внешнюю касательную  $l$ ,  
а точку пересечения обозначим  
за  $MO$ , а точки касания  $l$   
с окружностями — за  $M$  и  $K$ ,  
(где  $M \in \omega_1$  к окружн. радиуса  $5\omega_1$ ,  
а  $K \in \omega_2$  — радиуса  $4\omega_2$ ).

$l \Rightarrow$  некоторую точку  $S$ , кото-  
рая будет бегать по дуге  $OK$ . Проведем касате-  
льную  $l_1$  в  $(1)S$  к  $\omega_1$  (  $\omega_1$  — радиуса  $5$  ). Заметим что  $l_1$   
(  $\omega_2$  — радиуса  $4$  )  
пересечет  $\omega_1$  в двух точках, пока  $S$  не попадет в  $K$ .

~~Таким образом для~~ Аналогично некоторую точку  $S'$ , которая  
будет бегать по дуге  $OM$ , к касательную  $l_2$  в  $(1)S'$  к  $\omega_1$ ,  
Заметим, что  $l_2$  пересечет  $\omega_2$  в двух точках.

Таким образом для ~~каждого~~ прямой  $l$  направления, мы  
найдем положение, в котором они касаются одной ок-  
ружности и пересекают другую.

(Каждого направления, т.к. ) Теперь для  $l$   
такой прямой достаточно  
подвинуть её чуть ближе к  $MO$  и  $OM$  ближе к  $OS$  и  $OS'$  касательная  $l_1$   
Аналогично и с  $MK$ :



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

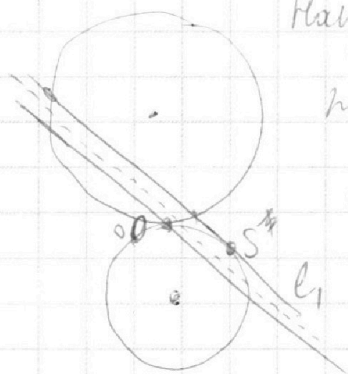
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



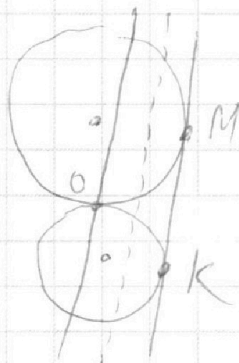
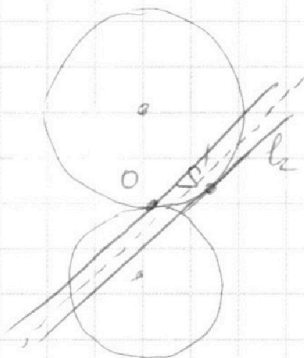
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжи №4:



Например, двигать можно так: провести параллельную линию линии  $l_1$  через  $ND$  и взять среднюю линию. Аналогично, ~~в~~ с  $l_2$ .



( $\frac{b}{2a}$  - любое!)

$\Rightarrow$  Ответ:  $a \in (-\infty; +\infty)$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача  $\sqrt{5}$ :

$$1) \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\left[ \log_a^b c = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow \log_x^3 \frac{1}{121} = \frac{\ln \frac{1}{121}}{\ln x^3} = \frac{\ln \left(\frac{1}{11}\right)^2}{\ln x^3} = \frac{2}{3} \log_x \frac{1}{11} = -\frac{2}{3} \log_x 11 = -\frac{2}{3} \frac{1}{\log_{11} x}$$

$$\Rightarrow \log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad | \cdot \log_{11} x$$

$$\log_{11}^5 x - 6 = -\frac{2}{3} - 5 \log_{11} x$$

$$\log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x - 6 + \frac{2}{3} = 0 \quad (1) \quad \log_{11}^5 x + 5 = \frac{-16}{3 \log_{11} x}$$

$$2) \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5 \quad 0,5y = t$$

$$\log_{11}^4 t + \log_t 11 = -\frac{13}{3} \log_t 11 - 5 \quad | \cdot \log_{11} t$$

$$\log_{11}^5 t + 1 + \frac{13}{3} + 5 \log_{11} t = 0 \quad (2)$$

$$(1)+(2): \log_{11}^5 x + \log_{11}^5 t + 5 \log_{11} x + 5 \log_{11} y = 0$$

$$\uparrow 1 + \frac{13}{3} - 6 + \frac{2}{3} = 0$$

Раскроем сумму степеней:

$$(\log_{11} x + \log_{11} t) (\log_{11}^4 x - \log_{11}^3 x \log_{11} t + \log_{11}^2 x \log_{11}^2 t - \log_{11} x \log_{11}^3 t + \log_{11}^4 t) = 0$$

$\Rightarrow$  Если  $\log_{11} x + \log_{11} t \neq 0$  - можно сократить

$$\text{Если } \log_{11} x + \log_{11} t = 0 \Rightarrow xt = 1 \Rightarrow 0,5xy = 1 \Rightarrow \boxed{xy = 2}$$

Сократим:  ~~$\log_{11}^5 x + \log_{11}^5 t + 5 \log_{11} x + 5 \log_{11} y = 0$~~   
 ~~$(\log_{11} x + \log_{11} t) (\log_{11}^4 x - \log_{11}^3 x \log_{11} t + \log_{11}^2 x \log_{11}^2 t - \log_{11} x \log_{11}^3 t + \log_{11}^4 t) = 0$~~   
 ~~$\log_{11}^4 x - \log_{11}^3 x \log_{11} t + \log_{11}^2 x \log_{11}^2 t - \log_{11} x \log_{11}^3 t + \log_{11}^4 t = 0$~~   
 ~~$\log_{11}^4 x - \log_{11}^3 x \log_{11} t + \log_{11}^2 x \log_{11}^2 t - \log_{11} x \log_{11}^3 t + \log_{11}^4 t = 0$~~   
 ~~$\log_{11}^4 x - \log_{11}^3 x \log_{11} t + \log_{11}^2 x \log_{11}^2 t - \log_{11} x \log_{11}^3 t + \log_{11}^4 t = 0$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение №5:

Сократим на  $\log_{11} x + \log_{11} t$

$$\begin{aligned} \log_{11} x = a &\Rightarrow a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4 + 5 = 0 && ab \geq 0, \text{ иначе} \\ \log_{11} t = b & && \leftarrow \text{положим.} \end{aligned}$$

$$(a^2 + b^2)^2 - ab(a^2 + b^2) - a^2 b^2 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - ab) - a^2 b^2 + 5 = 0$$

$$\text{т.к. } 2ab \leq a^2 + b^2$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - ab) - ab(a^2 + b^2) + 5 = 0 \quad // \text{Заменим,}$$

$$= (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 2ab) + 5 = 0$$

$$\text{т.к. } \begin{cases} a^2 + b^2 \geq 0 \\ a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \\ 5 > 0 \end{cases}$$

$$= (a - b)^2$$

$$= (a - b)^2$$

$$5 > 0$$

// что  $ab \geq 0$ ,  
// т.к. иначе  $ab < 0$   
// ~~еще в той строке~~  
//  $ab^3 < 0$   
//  $\Rightarrow$  изнач. выраж.  $> 0$ .

Ответ:  $xy = 2$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

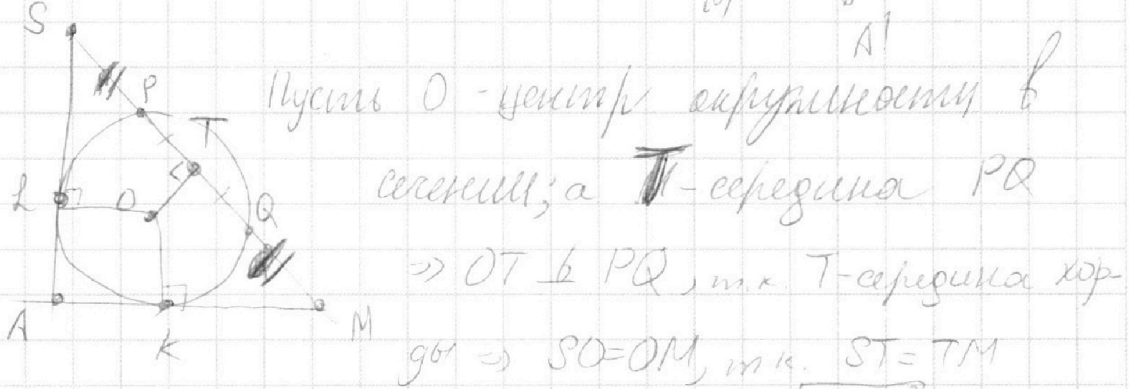
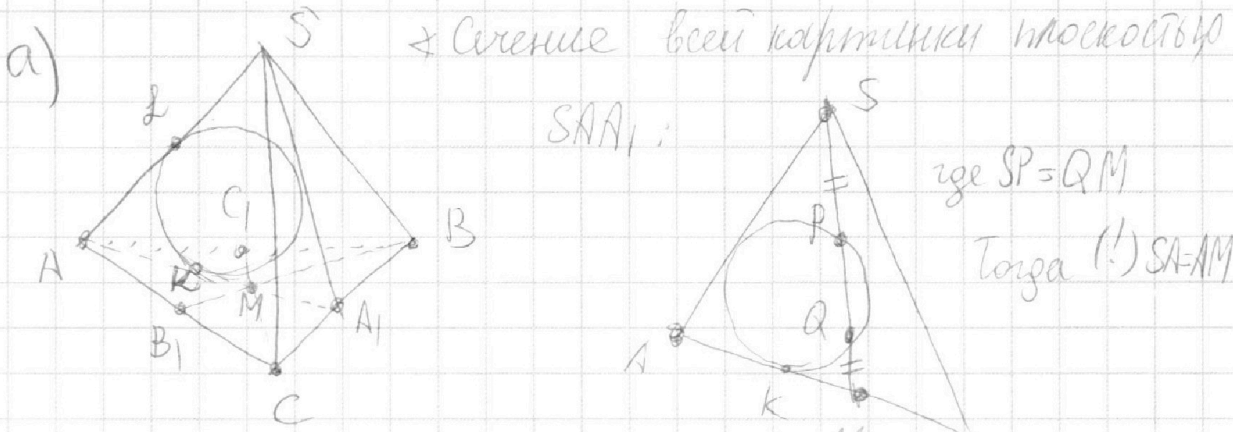
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7:

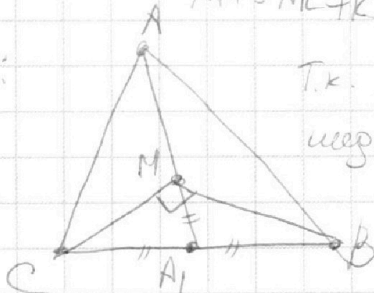


$\Rightarrow SL = MK$ , т.к.  $SL = \sqrt{SO^2 - OL^2}$  (т.к. касательная)  $SO = \sqrt{ST^2 + OT^2}$   
 $MK = \sqrt{OM^2 - OK^2}$   $OM = \sqrt{TM^2 + OT^2}$   
 $\Rightarrow \triangle SOL$  и  $\triangle OXM$  прямоугольн.

$AL = AK$ , т.к. это отрезки касательные из одной точки  $A$

$\Rightarrow SA = AM$ , т.к.  $SA = AL + LS$   
 $AM = AK + KM$

$\neq \triangle ABC$ :



Т.к.  $AA_1$  - медиана и  $M$  - центр тяжести медиан  $\Rightarrow \frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow MA_1 = \frac{AM}{2} = \frac{SA}{2} = 10$

$CA_1 = A_1B = \frac{BC}{2} = 10 \Rightarrow MA_1$  - это медиана на гипотенузу  $BC$

$\Rightarrow \angle CMB = 90^\circ$ , или этому  $S(\triangle CMB) = \frac{1}{3} S(\triangle ABC)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

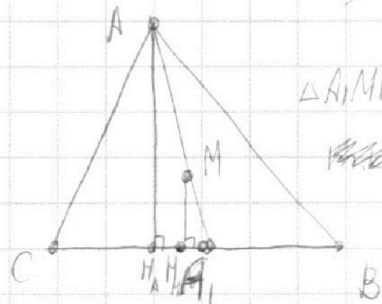
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолженные задачи:

$$S(\triangle CMB) = \frac{1}{3} S(\triangle ABC), \text{ так как высота из } A \text{ на } BC \text{ } AH_A = 3MH_M$$



$\triangle A_1MH_M \sim \triangle A_1AH_A$

~~по 2 уг~~ по 2 уг

углов:  $\angle M_1A_1M = \angle H_A A_1 A$

$\angle A_1 H_A A_1 = \angle M_1 H_M A_1 = 90^\circ$

$$\Rightarrow \frac{MH_M}{AH_A} = \frac{A_1M}{A_1A} = \frac{1}{3}$$

где  $MH_M$  - высота из  $M$  на  $BC$ .

$$\Rightarrow S(\triangle ABC) = \frac{AH_A \cdot BC}{2}$$

$$\cancel{S(\triangle ABC)} \quad S(\triangle CMB) = \frac{MH_M \cdot BC}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle CMB)} = \frac{AH_A}{MH_M} = 3$$

$$\Rightarrow S(\triangle CMB) = \frac{180}{3} = 60.$$

С другой стороны  $S(\triangle CMB) = \frac{CM \cdot MB}{2} = \frac{\frac{2}{3} CC_1 \cdot \frac{2}{3} BB_1}{2}$

$$\Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 = \frac{9}{2} \cdot 60 = 270$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot CC_1 \cdot BB_1 = 270 \cdot 30 = 8100.$$

Ответ: 8100

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик:

1) a, b, c:  $2^6 3^5 5^{11} : ab$     Найти  $\min(abc)$

$2^{14} 3^{21} 5^{13} : bc$   
 $2^{16} 3^{25} 5^{28} : ac$

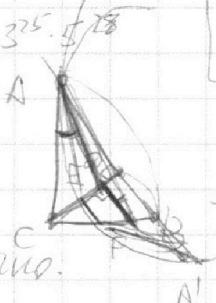
$bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}$

$ab: 2^6 3^5 5^{11}$

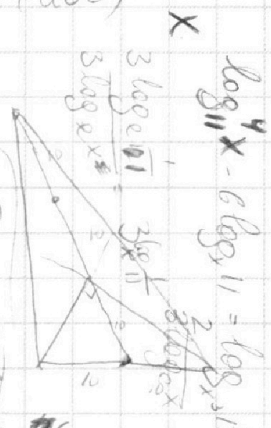
$ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

16  $abc: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$   
 $abc: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

a:  $2^4$   
 b:  $2^2$   
 c:  $2^{12}$



$$\begin{aligned} v_2(b) + v_2(a) &\geq 6 \\ v_2(b) + v_2(c) &\geq 14 \\ v_2(c) + v_2(a) &\geq 16 \\ 2v_2(b) + 2v_2(c) + 2v_2(a) &= 36 \\ \Rightarrow v_2(abc) &= 18 \end{aligned}$$



16 Кудношвилло.

$b+c=13$   
 $a+b=11$   
 $a+c=28$

$$v_5(b) + v_5(c) + v_5(a) \geq 11 + 13 + 28 = \frac{52}{2} = 26$$

a:  
 b:  
 c:

$$\begin{aligned} |b-c| &\geq 78 \\ |b-a| &\geq 31 \\ |a-c| &\geq 13 \end{aligned}$$

$$v_5(a) + v_5(b) + v_5(c) = \frac{28 + 11 + 13}{2} = 26$$

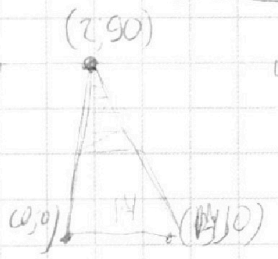
15  $b+c$

$$\begin{aligned} 13+2+25 &= 36+25 \\ 46+13 &= 36+25 \\ 59 &= 36+25 \end{aligned}$$

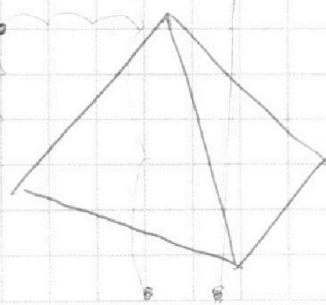
$$\frac{2(1+15+25)}{2} \geq \frac{61}{2} \geq 31$$

$$\begin{aligned} a+b &\geq 15 \\ b+c &\geq 21 \\ c+a &\geq 25 \end{aligned}$$

4+8100  
 8104  
 15^2+80^2  
 6625



$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$



$$-3+2 = -5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



arccos  $0 < \theta < \pi$   
arcsin  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$400 - c^2 = 10 \cdot k$   
 $200 - c^2 = k$   
 $k = 4$

$(6a^2 - 800 - c^2)(4a^2 - 400 - c^2)$   
 $30 \sqrt{(4a^2 + 200 - c^2)^2 - (4,5c^2 - 60)}$

$30 \sqrt{(2a^2 + 100 + c^2)(2a^2 - c^2) - (4,5c^2 - 60)}$   
 $\sqrt{(a^2 + 200 - c^2)(a^2 + 200 - c^2) - (4,5c^2 - 60)}$

$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$   
 $10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x$   
 $\Rightarrow 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$

$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$   
 $\sin x = 9\pi - 2x$   
 $x = 4\pi$

$5x + 6ay + b = 0$   
 $y = \frac{-5x - b}{6a}$   
 $y = -\frac{5x}{6a} - \frac{b}{6a}$

$SR(SA) = MK \cdot MA$   
 $5x + 6ay - b = 0$  — это гипербола которая в общем случае

$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 81) = 0$   
окружности

$(x^2 + (y + 9)^2 - 16) = 0$   
 $y^2 + 18y + 81$

$20 \cdot SR = MK \cdot MA$   
 $Ad = MK$   
 $x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$

$20 \sqrt{x^2 - 14y + 49} + x^2y^2$

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7a  
7b