



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } abc \geq 2^{x_a+x_b+x_c} 3^{y_a+y_b+y_c} 5^{z_a+z_b+z_c} \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

Можно взять  $a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{13}$ ,  $b = 2^2 \cdot 3^3$ ,  $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{17}$ , тогда  $ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{13}$ ;  $2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ ,  
 $bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13}$ ;  $2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$ ,  $ca = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$ ;  $2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

Отв.  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$a, b, c \in \mathbb{N}, ab: 2^9 3^{10} 5^{10}, bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}, ca: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

Пусть 2 как множитель в  $a$  входит  $x_a$  раз, в  $b$   $x_b$  раз, в  $c$   $x_c$  раз,  
( $a = 2^{x_a} \cdot A \cdot x^2$ )  
по условию  $ab: 2^9 \Rightarrow x_a + x_b \geq 9, bc: 2^{14} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x_b + x_c \geq 14, ca: 2^{19} \Rightarrow x_c + x_a \geq 19$

Сложив 3 нерав-ва получим, что  $2(x_a + x_b + x_c) \geq 42 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_a + x_b + x_c \geq 21$ . Если взять  $x_a = 7, x_b = 3, x_c = 11$ ,

то  $ab = 2^9 AB: 2^9, bc = 2^{14} BC: 2^{14}, ca = 2^{19} CA: 2^{19}$ .

Аналогично  $3$ -ый-фактор, которое входит в разл.  $a, y_b - b, y_c - c$

$ab: 3^{10} \Rightarrow y_a + y_b \geq 10, bc: 3^{13} \Rightarrow y_b + y_c \geq 13, ca: 3^{18} \Rightarrow y_c + y_a \geq 18$

Сложив нерав-ва  $2(y_a + y_b + y_c) \geq 41 \Rightarrow y_a + y_b + y_c \geq 20,5$ , т.к.

$y_a, y_b, y_c$  цел., то их сумма тоже натуральное  $\Rightarrow y_a + y_b + y_c \geq 21$

Если взять  $y_c = 11, y_a = 7, y_b = 3$ , то  $ab: 3^{10} \cdot y_a b: 3^{10}$

$bc = 3^{14} y_{bc}: 3^{14}, ca = 3^{18} y_{ac}: 3^{18}$ .

$5$ -ый-фактор, которое входит в ариф. множители,  
 $z_b - b, z_c - c$  раз

$ab: 5^{10} \Rightarrow z_a + z_b \geq 10, z_b + z_c \geq 13, z_c + z_a \geq 30, z_b \geq 0$

$z_a + z_b + z_c \geq 30 + 0 = 30$ . Если  $z_c = 17, z_a = 13$ , то  
все нерав-ва выполняются



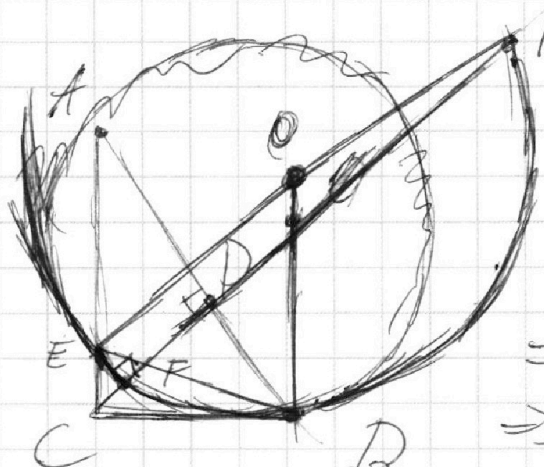
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \parallel EF, AD:DB = 3:1$$

$$\Rightarrow AD = 3DB$$

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot DB =$$

$$= 3DB^2 \Rightarrow CD = \sqrt{3}DB \quad (\triangle CPB \sim \triangle AC)$$

$$\Rightarrow CB^2 = CD^2 + DB^2 = 4DB^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CB = 2DB \Rightarrow \cos \angle CBD = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle CBD = 60^\circ,$$

$$EF \parallel AB \Rightarrow \angle CFE = \angle CDA = 90^\circ,$$

$$\angle ECF = 90^\circ - \angle DCB = 30^\circ \Rightarrow \triangle ECF \sim \triangle ACB,$$

$$K = \frac{EC}{AB} = \frac{EF}{AC} = \frac{CF}{CB}, \text{ т.к. } CB - \text{кам. катет, то}$$

$$CF \cdot CR = CB^2, \quad CR \cdot EF = 2S_{\triangle ECF} = EC \cdot ER.$$

$$\sin \angle CEO = \frac{EC \cdot ER \cdot \sin(180^\circ - \angle EOB)}{EC \cdot ER \cdot \sin(180^\circ - \angle EOB)}$$

$$= EC \cdot ER \sin(90^\circ - 2\angle EBO) = EC \cdot ER \sin(2(90^\circ - \angle ECB)) =$$

$$= EC \cdot ER \cdot \sin 2\angle EBC = 2 EC \cdot ER \cdot \frac{EC}{EB} \cdot \frac{CB}{EB}, \quad ER =$$

$$= \frac{EO}{2} = \frac{EB \cdot \sin \angle EBO}{2 \sin \angle EBC} = \frac{EB \cdot \sin \angle EBO}{2 \sin \angle EBC}$$

$$= \frac{EB \sin \angle EBO}{2 \sin(180^\circ - 2\angle EBO)} = \frac{EB}{4 \cos \angle EBO} = \frac{EB}{4(\cos(90^\circ - \angle EBC))}$$

$$= \frac{EB}{4 \sin \angle EBC} = \frac{EB^2}{4EC}$$

$$CR \cdot EF = 2ECER \cdot \frac{EC \cdot CB}{EB^2} = 2 \frac{EC \cdot CB}{4} = \frac{EC \cdot CB}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CR = \frac{EC \cdot CB}{2EF} \quad \text{CF}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если  $x \in [-3\pi, -2\pi]$ , то  $\arccos(\cos x) =$

$= -2\pi - x$ . Тогда  $x = 2\pi - 5(-2\pi - x)$ ,

~~$-4x = 12\pi$~~   $-4x = 12\pi$ ,  $x = -3\pi \in [-3\pi, -2\pi]$

Мы перебрали все возможные  $x$ , а значит нашли все корни

Ответ.  $x = -3\pi$ ,  $x = -\frac{4}{3}\pi$ ,  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

Для всех  $d \in [-1, 1]$  верно:  $\arcsin d + \arccos d = \frac{\pi}{2}$

возьмем  $d = \cos x$ , тогда  $\arcsin(\cos x) +$   
 $\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin(\cos x) =$   
 $= \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)$

$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{5\pi}{2} - 5 \arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x + 5 \arccos(\cos x) = 2\pi$ , т.к.  $\arccos d \in [0, \pi]$ , то  
 $5 \arccos(\cos x) \in [0, 5\pi] \Rightarrow x \in [2\pi - 5\pi, 2\pi] = [-3\pi, 2\pi]$

Если  $x \in [\pi, 2\pi]$ , то  $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$   
 $x = 2\pi - 10\pi + 5x \Rightarrow x = 2\pi \in [\pi, 2\pi]$  - корень

Если  $x \in [0, \pi]$ , то  $\arccos(\cos x) = x$   
 $x = 2\pi - 5x \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$  - корень

Если  $x \in [-\pi, 0]$ , то  $\arccos(\cos x) = \pi - x$   
 $x = 2\pi - 5(\pi - x) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, 0]$  - корень

Если  $x \in [-2\pi, -\pi]$ , то  $\arccos(\cos x) = x + 2\pi$   
 $x = 2\pi - 5(x + 2\pi) \Rightarrow 6x = -8\pi \Rightarrow x = -\frac{4}{3}\pi \in [-2\pi, -\pi]$  - корень



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3 x t (\log_3^3 x - \log_3^3 t) (\log_3 x - \log_3 t) + \log_3^2 x \log_3^2 t + 8 = 0$$

$$\log_3 x - \log_3 t \geq 0 \Leftrightarrow \log_3 x \geq \log_3 t \Leftrightarrow \log_3^3 x \geq \log_3^3 t \Leftrightarrow \log_3^3 x - \log_3^3 t \geq 0.$$

$\log_3^3 x - \log_3^3 t = 1$   $\log_3 x - \log_3 t$  всегда одного знака ~~тогда~~, тогда их произведение  $\geq 0$ . Тогда  $\neq 0$

$$(\log_3^3 x - \log_3^3 t) (\log_3 x - \log_3 t) + \log_3^2 x \log_3^2 t + 8 > 0 \text{ - не может быть } 0, \text{ тогда}$$

$$\log_3 x t = 0 \Rightarrow x t = 1 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

Ур-ние  $\log_3^5 x + 8 \log_3 x = \frac{7}{2}$  - 5-ой степени, а значит имеет хотя бы одно решение  $x_0$ , тогда

$$\text{если } \log_3^5 x_0 + 8 \log_3 x_0 = \frac{7}{2}, \text{ то}$$

$$\log_3^5 \frac{1}{x_0} + 8 \log_3 \frac{1}{x_0} = -\log_3^5 x_0 + 8 \log_3 \frac{1}{x_0} = -\log_3^5 x_0 - 8 \log_3 x_0 = -\frac{7}{2} \text{ - тоже имеет}$$

решение

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



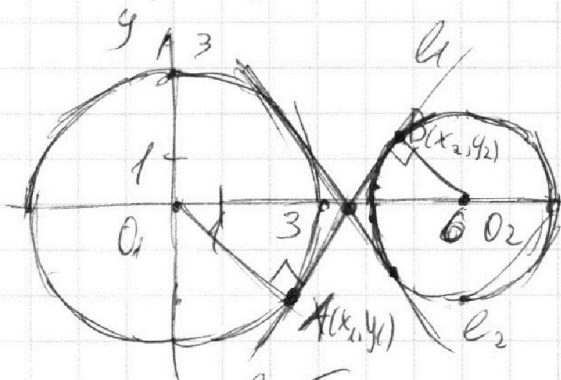
15

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0$$

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-9)((x-6)^2+y^2-4)=0 \text{ найдем второе уравнение:}$$



это 2 окр. Темные

второго - прямая, она  
имеет с окр. не более

2 пересечения. Выбираю

е мы выбираем как-то прямой, выбираю  
в мы перекошил прямую вверх и вниз.

Заметим, что если у прямой угол наклона меньше  
чем у  $l_1$ , или больше чем у  $l_2$ , то мы можем

перекосить её так, чтобы она пересекла обе  
окр-ти. (Сначала мы перекосим её до т. касание

с 1-ой окр-тью, при этом она будет пересекать  
вторую, затем значительно её подвинув, она

всё равно будет пересекать вторую окр., но при  
этом будет уже не касаться первой окр., а пересекать её.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Удобн рассч. от предполож касательств окр., нужно, чтобы  
расст. от  $O_1$  до прямой было равно радиусу  
окр. Для  $\omega_2$  это  $\frac{a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{6 + 0 + c}{6}$

$\ell_1$  кас.  $\omega_1$  в  $A(x_1, y_1)$ ,  $\omega_2$  в  $B(x_2, y_2)$ . Тогда  
 $\vec{O_1A} \cdot \vec{AB} = 0 : (x_1, y_1) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0$

$$x_1 x_2 - x_1^2 + y_1 y_2 - y_1^2 = 0, \text{ также}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{O_2B} = 0 \Rightarrow (6 - x_2, y_2) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0$$

$$\begin{cases} 6x_2 - x_2^2 + x_1 x_2 + y_2^2 + y_2 y_1 = 0 \\ -x_1^2 + x_1 x_2 - y_1^2 + y_1 y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ r^2=9}}{x_1^2 + y_1^2} + 6x_2 - 6x_1 - \underset{\substack{\parallel \\ -r^2=-9}}{x_2^2 + y_2^2} = 0$$

$$6x_2 - 6x_1 = 5$$



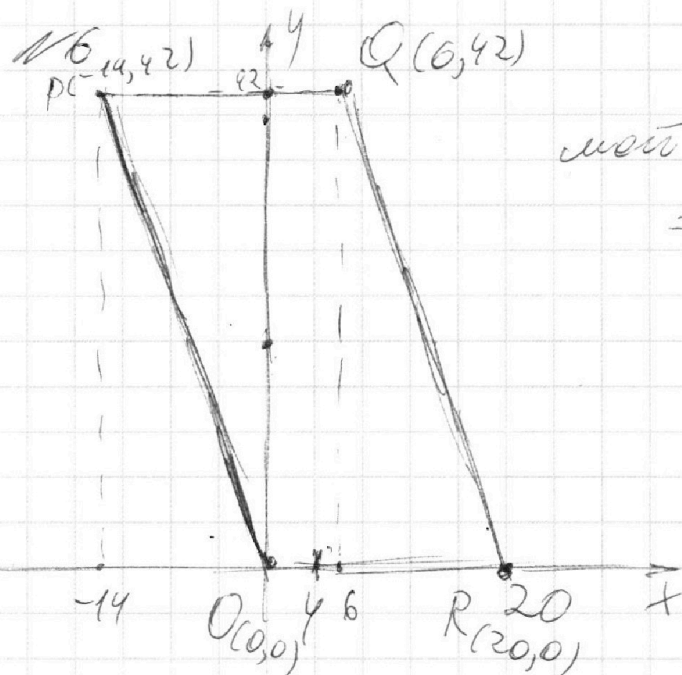
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найдём уравнение прямой  $QR$

$$\frac{x-6}{20-6} = \frac{y-42}{0-42}$$

$$x-6 = -\frac{y}{3} + 14$$

$$x = -\frac{y}{3} + 20$$

Все точки в параллелограмме лежат слева этой прямой, значит

$$x \leq -\frac{y}{3} + 20, \text{ также } 0 \leq y \leq 42$$

Найдём уравнение прямой  $PO$ :  $\frac{x-0}{-14-0} = \frac{y-0}{42-0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = -\frac{y}{3} \text{ Все то параллельно лежат правее}$$

этой прямой, значит  $x \geq -\frac{y}{3}$ . По все

точки параллельно заданы пересечением

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ -\frac{y}{3} \leq x \leq 20 - \frac{y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ 0 \leq 3x + y \leq 60 \end{cases}$$

По. есть  $3x_2 + y_2 \in [0, 60]$ ,  $3x_1 + y_1 \in [0, 60]$ ,

$$\text{Тогда } 3x_1 + y_1 = 3x_2 + y_2 - 33 \leq 27 \Rightarrow 3x_1 + y_1 \in [0, 27]$$

Рассмотрим все варианты  $3x_2 + y_2 = 33 + 3x_1 + y_1$

$$3x_1 + y_1 = \frac{3}{k} \in [33, 60], k \in [11, 20].$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= 2 \cdot 36 - 2 \cdot 36 \cos \frac{\sqrt{11}}{6},$$

$$CM^2 = CA_1^2 + A_1M^2 - 2CA_1 \cdot A_1M \cdot \cos \angle CA_1M =$$

$$= 2 \cdot 36 + 2 \cdot 36 \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow (CM \cdot BM)^2 =$$

$$= (2 \cdot 36)^2 \cdot \left(1 - \frac{11}{36}\right) = 4 \cdot 36 \cdot 25 \Rightarrow CM \cdot BM = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 = \frac{3}{2} CM \cdot \frac{3}{2} BM = 135, \text{ тогда}$$

$$CC_1 \cdot BB_1 \cdot AA_1 = 135 \cdot 18 = 2430$$

Ответ: 2430

$$5) SO = \sqrt{ON^2 + SN^2} = \sqrt{41}, SL = \sqrt{SO^2 - ON^2} = 4,$$

$$\text{Тогда } AL = AS - SL = 8, AK = AL = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KA_1 = AA_1 - AK = 10.$$

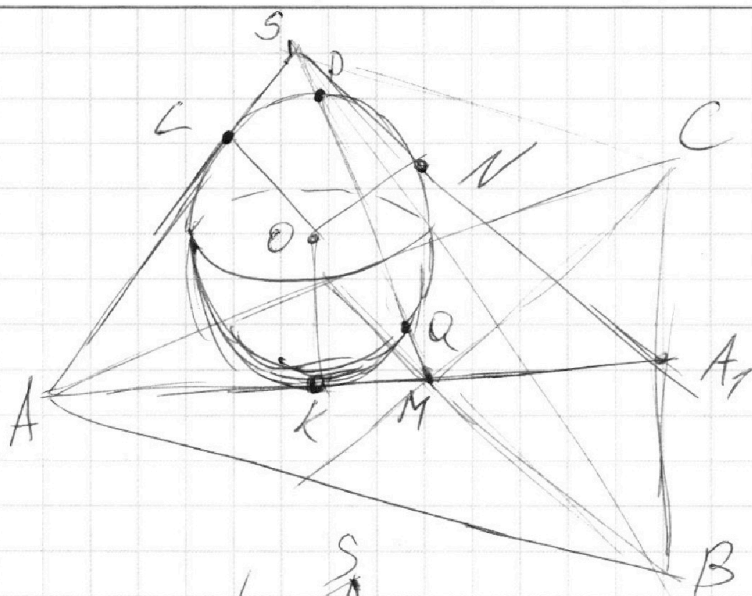
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

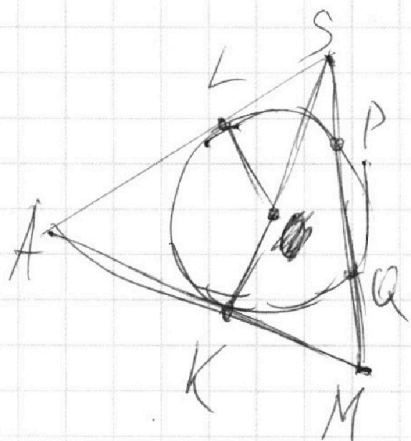
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

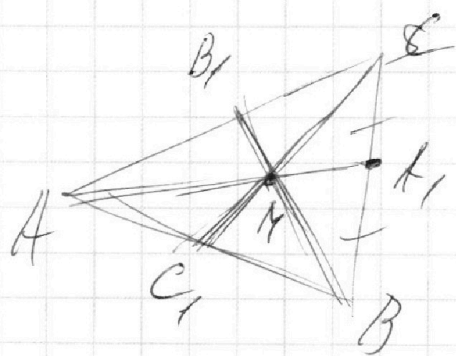
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 SP &= MQ, S_{ABC} = 90, \\
 SA &= BC = 12, \\
 SN &= 4, r = 3
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 SL^2 &= SP \cdot SQ = SP \cdot (PQ + SP) = \\
 &= QM \cdot (PQ + QM) = QM \cdot MP = MK^2, \\
 AL &= AK \Rightarrow AM = AK + KM + AL + \\
 &+ LS = AS = BC = 12.
 \end{aligned}$$



Тогда  $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 18$ ,  
 $S_{AA_1B} = \frac{AA_1 \cdot A_1B \cdot \sin \angle AA_1B}{2}$

$$= \frac{S_{ABC}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 \cdot \frac{12}{2} \cdot \sin \alpha = 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}. \text{ Опустим}$$

из углов  $AA_1B$  и  $AA_1C$  высотой, другой функцией,

и.ч.о  $\cos \angle AA_1B = \frac{\sqrt{11}}{6}, \cos \angle AA_1C = -\frac{\sqrt{11}}{6},$

$$A_1M = \frac{AA_1}{3} = 6 \Rightarrow MB = MA_1^2 + A_1B^2 - 2MA_1 \cdot A_1B \cos \angle AA_1B$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 / \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$x \neq 1 \Rightarrow \log_3 x \neq 0$ . Докажем первое  
рав-во на  $\log_3 x$

$$\log_3^5 x + 6 = \frac{5}{2} \log_x 3 \log_3 x - 8 \log_3 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3^5 x + 8 \log_3 x = -\frac{7}{2}$$

Сделаем замену  $t = 5y$ ,  $t \neq 1 \Rightarrow \log_3 t \neq 0$

Докажем второе рав-во  $\log_3 t$

$$\log_3^5 t + 2 = \frac{11}{2} \log_t 3 \log_3 t - 8 \log_3 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3^5 t + 8 \log_3 t = \frac{7}{2}$$

Сложим 2 полученных уравнения:

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x + \log_3^5 t + 8 \log_3 t = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}$$

$$(\log_3 x + \log_3 t) (\log_3^4 x + \log_3^3 x \log_3 t +$$
  
 $+ \log_3^2 x \log_3^2 t - \log_3 x \log_3^3 t + \log_3^4 t) +$   
 $+ 8(\log_3 x + \log_3 t) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\log_3 x + \log_3 t) (\log_3^3 x (\log_3 x - \log_3 t) +$$
  
 $+ \log_3^3 t (\log_3 t - \log_3 x) + \log_3^2 t \log_3^2 x + 8) = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда  $x_1 = k - \frac{y_1}{3}$  сюда подходит все  $y \in [0, 42]$ ,  $y \in 3$  и  $y \in \frac{42}{3}$  ~~и  $y \in 15, 6$~~  то же время  $x_2 = \frac{33 + 3k - y_2}{3} = 11 + k - \frac{y_2}{3}$ , сюда также подходит все  $y$  кратные 3. При этом таких  $k$ :  $\frac{27}{3} + 1 = 10$  (выкрывшие 307 190 27 и 0).

Пар  $10 \cdot 15^2$  пар

Если  $3x_1 + y_1 = l$ , то  $x_1 = \frac{l - y_1}{3}$

Если  $l = 3k + 1$ , то  $y = 3k + 1$ ,  $y \in [0, 42]$ , таких  $y$  равно  $\frac{42}{3} = 14$ , также  $l = 3k + 2$

$y_2 + 3x_2 = 33 + l$ ,  $x_2 = 11 + \frac{l - y_2}{3}$ , также  $y_2$  будет

также 14 (все они подходят, т.к.  $y_2 + 3x_2 \in [0, 60]$ ), что верно для всех оставшихся  $l$ , которых 28-10. Тогда мы добавим  $18 \cdot 14^2$  пар

Ответ: всего  $10 \cdot 15^2 + 18 \cdot 14^2$  пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1 = 20 - \frac{y_1}{3}$$

$$x_2 = 9 - \frac{y_2}{3}$$

$$x_1 = \frac{59 - y_1}{3}, \quad x_2 = \frac{28 - y_2}{3}$$

$$x_2 = \frac{58 - y_1}{3}, \quad 9$$

$$19 - \frac{y_1}{3}$$

9





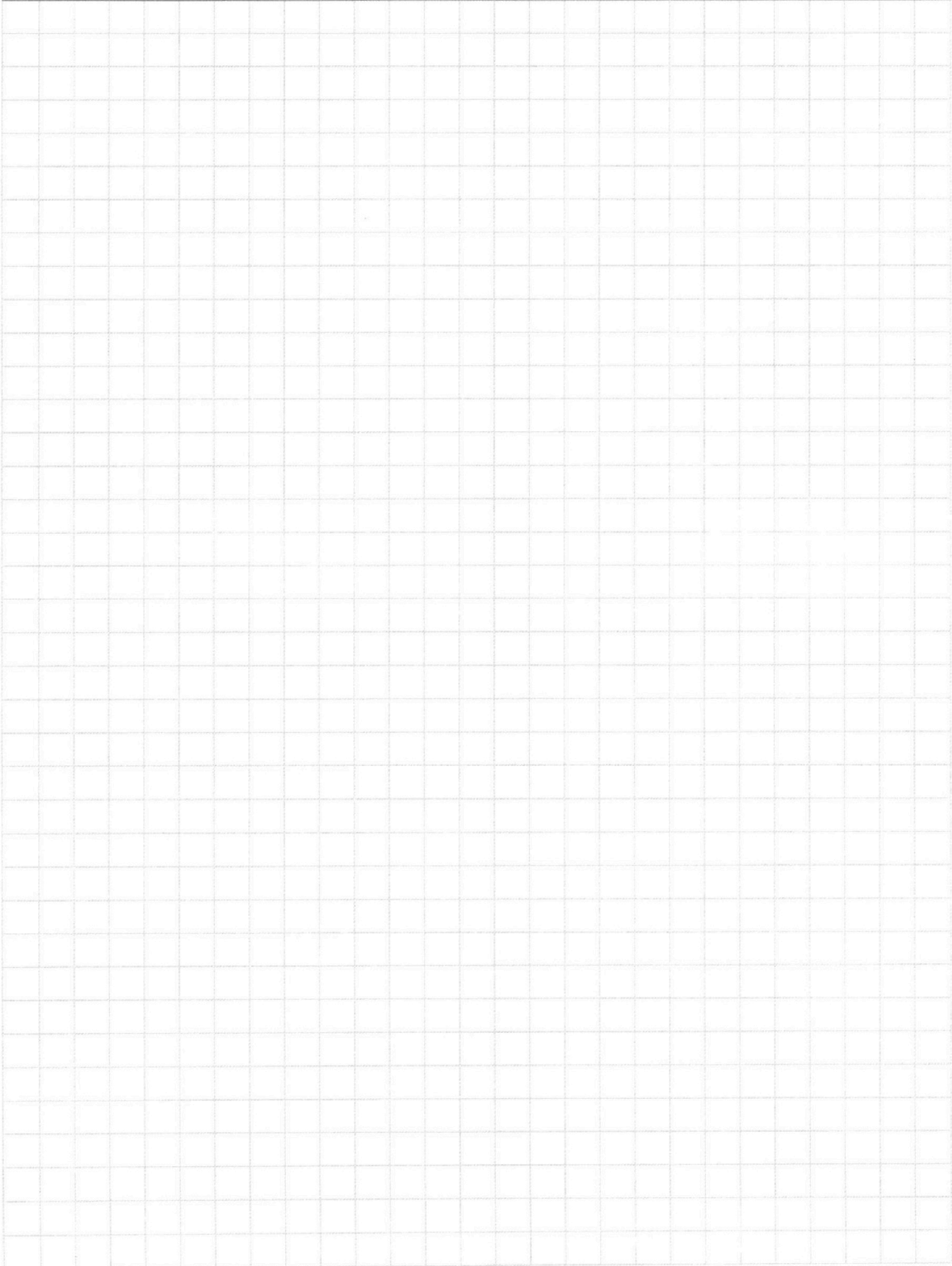
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



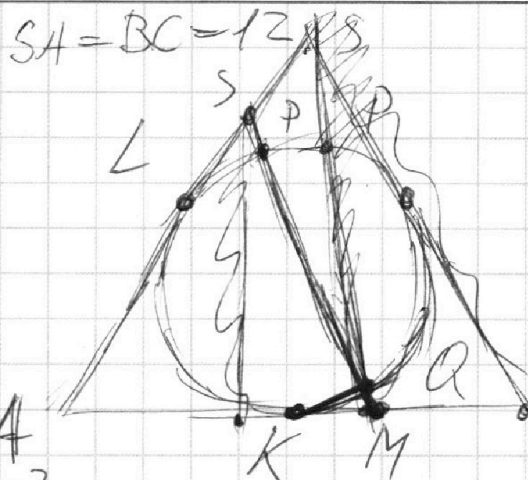
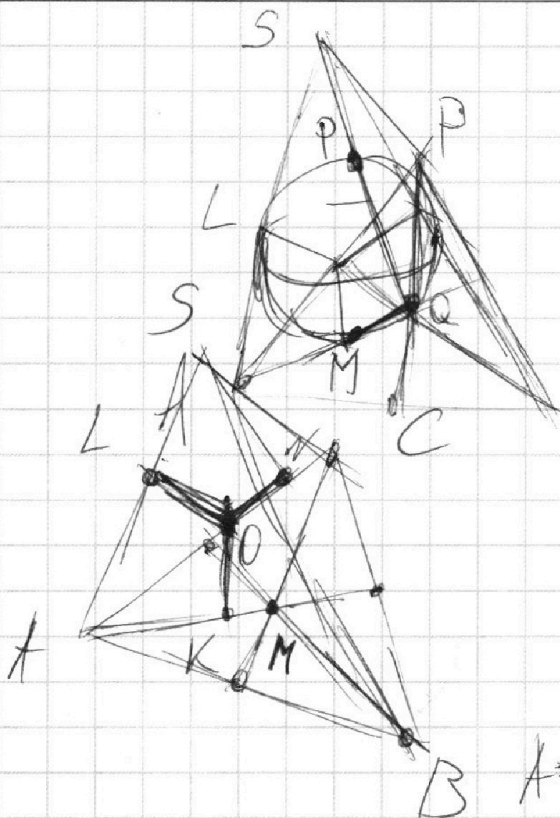
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

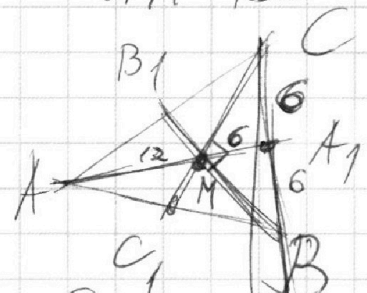
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$SA = BC = 12$   
 $SL^2 = SP \cdot SQ = MK^2 = SA \cdot AM$   
 $AM = BC = 12 \Rightarrow AM = 12, A_1B = 18$



$AA_1 \cdot A_1B \cdot \sin \angle AA_1B = S$   
 $= 18 \cdot 6 \cdot \sin \angle AA_1B = 108 \sin \angle AA_1B$   
 $18 \cdot 6 \cdot \sin d = 90 \sin d = \frac{5}{6}$

$AA_1 \cdot A_1B \cdot \sin d = \frac{S}{2}$   
 $18 \cdot 6 \cdot \sin d = 90 \Rightarrow \sin d = \frac{5}{6}$   
 $\cos d = \pm \frac{\sqrt{11}}{6}$   
 $MB^2 = MA_1^2 + A_1B^2 - 2MA_1 \cdot A_1B \cos d =$   
 $= 2 \cdot 36 \cdot (1 \pm \frac{\sqrt{11}}{6})$   
 $MB^2 \cdot MC^2 = 4 \cdot 36^2 \cdot (1 - \frac{11}{36}) =$   
 $= 100 \cdot 36^2$   
 $MB \cdot MC = 360 \cdot 60$   
 $BB_1 \cdot CC_1 = \dots$   
 $SN = 4, ON = 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

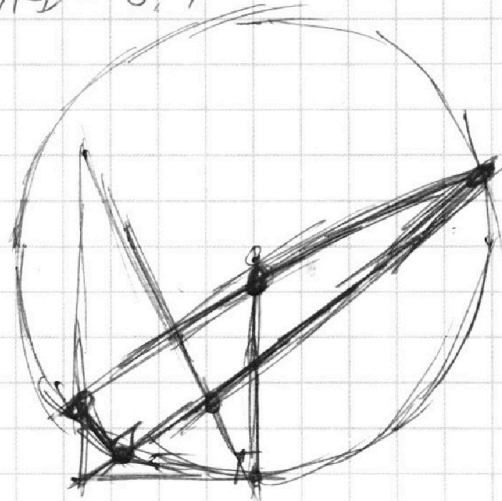
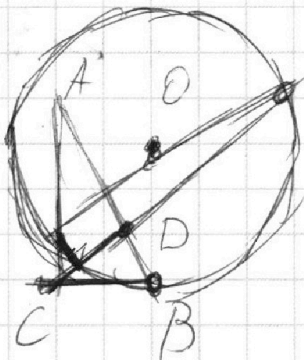
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}, bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}, ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$x_a + x_b \geq 9 \quad x_b + x_c \geq 14 \quad x_a + x_c \geq 19 \Rightarrow x_b + x_c \geq 21$$

$$(2, 7, 2)$$

$$AD: AD = 3, 1$$



$$\begin{array}{r} +135 \\ \quad 18 \\ \hline 1080 \\ 135 \\ \hline 2430 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

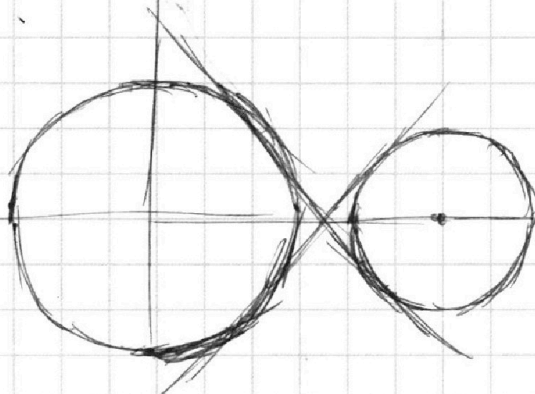
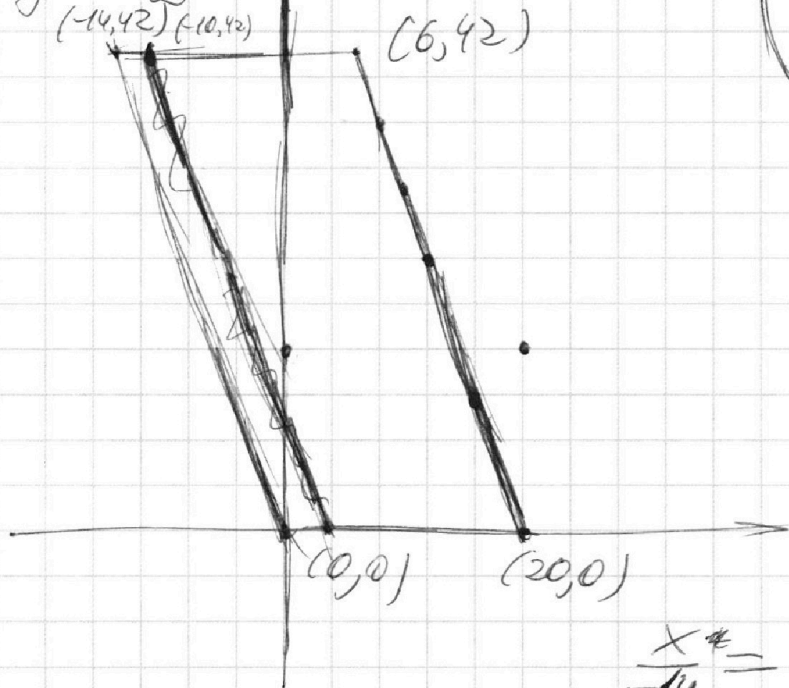


$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$$



$$3x_2 - 3x_1 + 4y_2 - 4y_1 = 33$$

$$\frac{x-6}{20-6} = \frac{y-42}{-42}$$

$$x-6 = \frac{4}{3} + 14$$

$$x = \frac{4}{3} + 20$$

$$x \leq \frac{4}{3} + 20$$

$$x \geq \frac{4}{3}$$

$$\frac{x-6}{-14} = \frac{y}{42} \quad x \geq -\frac{4}{3}$$

$$0 \leq y \leq 42 \quad 0 \leq 3x + y \leq 60 \quad 0 \leq y \leq 42$$

$$-y \leq 3x \leq 60 - y \quad -y \leq 3x \leq 60 - y \quad y = 20x$$

$$-y \leq t \leq 60 - y \quad t_2 + y_2 - t_1 - y_1 = 33$$

$$y_1 = 42 \quad t \in [-42, 18] \quad y_1 + t_1 \in [0, 60]$$

$$y_1 + t_1 = 60 \quad t_1 = 60 - y_1 = 18 \quad y_1 = 42, 39, \dots, 0 \quad 13$$

$$t_2 = 27 - y_2 \quad y_2 = 0, \dots, 37 \quad 59 \Rightarrow y_1 = 5, \dots, 91, 14$$

$$\frac{4}{3}\pi \quad \frac{2\pi}{3} \quad 120 \quad -60 = -\frac{1}{2} \quad -\frac{\pi}{6} \quad -\frac{5\pi}{6} = -\frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{6}$$



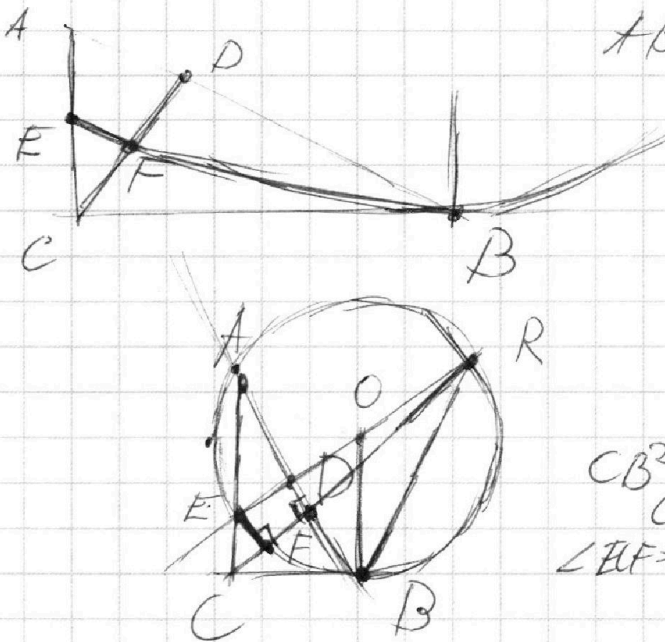
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AB \parallel EF \quad AD:DB = 3:1$

$\frac{AD}{AC} = \frac{DB}{BC}$

$\frac{AD}{DB} = 3 \quad \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{PB}$

$CD^2 = 3DB^2 \quad CR = \sqrt{3}DB$

$BC = 2DB \quad \angle ABC = 60^\circ$

$CB^2 = 4DB^2 \quad CF \cdot CR = CB^2 = 4DB^2 = \frac{4}{3}CD^2$

$\angle CEF = 60^\circ$

~~$5\sqrt{1-x^2} = x + \frac{\pi}{2}$~~   $\arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}$

$5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2} \quad 2\pi = 6x \quad x = \frac{\pi}{3}$

$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 =$

$= \frac{5}{2} \log_x 3 - 8 \quad \log_3^5 x + 6 = \frac{5}{2} - 8 \log_3 x$

$\log_3^4 t + 2 \log_t 3 = \log_{t^2} (3^{11}) - 8$

$\log_3^5 t + 2 = \frac{11}{2} - 8 \log_3 t \quad \frac{7}{2} \quad -\frac{7}{2}$

$\log_3^5 t + 8 \log_3 t = \frac{7}{2} \quad + \log_3^3 x (\log_3 x + \log_3 t) + t = 1$

$\log_3^5 t + 8 \log_3 x = -\frac{7}{2} \quad \log_3^3 t + (\log_3 t - \log_3 x) +$

$\log_3 x t + (\log_3^4 t - \log_3^3 t \log_3 x + \log_3^2 t + \log_3^2 x -$

$\log_3^4 t \log_3^3 x + \log_3^4 x + 8) = 0$