



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-17; 68)$ ,  $Q(2; 68)$  и  $R(19; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17} \\ a, b \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow ab = k \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}, k \in \mathbb{N}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} bc : 2^{13} \cdot 3^{25} \cdot 5^{18} \\ b, c \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow bc = m \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}, m \in \mathbb{N}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ac : 2^{17} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \\ a, c \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow ac = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}, n \in \mathbb{N}$$

$$a^2 b^2 c^2 = kmn \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} = 3 \cdot 5 \cdot kmn \cdot (2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37})^2$$

$$abc = \sqrt{15 kmn} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37}, abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{15 kmn} \in \mathbb{N}$$

$$\text{Поймём, что } \sqrt{15 kmn} = (\sqrt{15} \cdot \sqrt{kmn}) \in \mathbb{N}$$

Чтобы получить натуральное число, наименьшее, на это нужно домножить  $\sqrt{15}$  — это  $\sqrt{15}$  (чтобы в итоге был корень из квадрата натурального числа, равный этому натуральному числу), т.к.  $15 = 3 \cdot 5$ , а 3 и 5 — простые числа, и им под корнем нужна «пара», чтобы выйти натуральным числом из под радикала:  
Тройке — тройка, пятёрке — пятёрка.

$$\text{Тогда: } \sqrt{kmn} = \sqrt{15} \Rightarrow \cancel{kmn} = 15$$

$$\text{Следовательно: } abc = \sqrt{15 kmn} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} = \sqrt{15^2} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} = 15 \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$k, \text{ например, } k=5, m=1, n=3$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

(N1)

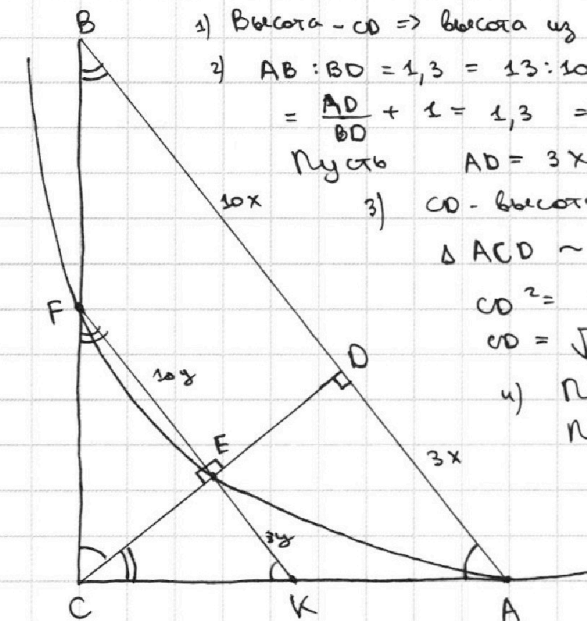
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Высота - CD  $\Rightarrow$  высота из C  $\Rightarrow \angle C = 90^\circ$  в  $\triangle ABC$

2)  $AB:BD = 1,3 = 13:10$ ;  $AB = AD + BD \Rightarrow AB:BD = \frac{AD+BD}{BD} = \frac{AD}{BD} + 1 = 1,3 \Rightarrow AD:BD = 0,3 = 3:10$

Пусть  $AD = 3x$ ,  $BD = 10x$ , тогда  $AB = AD + BD = 13x$

3) CD - высота в  $\triangle ABC \Rightarrow CD \perp AB \Rightarrow \angle BDC = \angle ADC = 90^\circ$

$\triangle ACD \sim \triangle BCD$  (по двум углам)  $\Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

$CD^2 = AD \cdot BD = 3x \cdot 10x = 30x^2$

$CD = \sqrt{30x^2} = x\sqrt{30}$

4) Проведем (EF) до пересечения с AC.

Пусть точка пересек. - K.

$EF \parallel AB \Rightarrow \begin{cases} \angle FCE = \angle CBD \\ \angle EKC = \angle DAC \end{cases}$  как соотв.

Тогда:  $\triangle CFE \sim \triangle BDC$  (по 2 углам)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{FE}{BD} = \frac{CE}{CD}$

$\triangle CKE \sim \triangle ACD$  (по 2 углам)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{KE}{AD} = \frac{CE}{CD}$

Получаем, что  $\frac{FE}{BD} = \frac{KE}{AD}$ , т.е.

$FE:KE = BD:AD = 10:3$

5) Пусть  $FE = 10y$ ,  $KE = 3y$ ;

В  $\triangle CKE$  CE - высота;

$\triangle CEF \sim \triangle CKE$  (по 2 углам)  $\Rightarrow \frac{KE}{CE} = \frac{CE}{FE} \Rightarrow CE = \sqrt{FE \cdot KE} = y\sqrt{30}$

6) По св-ву кас. и секущ., пров. из одной точки к окружн.:

$KE \cdot KF = KA^2$

$3y(3y+10y) = KA^2 \Rightarrow KA = y\sqrt{39}$

7)  $\triangle CKE \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{KE}{AD} = \frac{CK}{AC}$ ;  $\frac{3y}{3x} = \frac{AC-AK}{AC}$ ;  $\frac{y}{x} = 1 - \frac{AK}{AC}$

AC по т. Пифагора из  $\triangle ACD$ :  $AC^2 = CD^2 + AD^2$

$AC = \sqrt{30x^2 + 9x^2} = x\sqrt{39}$

Тогда:  $\frac{y}{x} = 1 - \frac{AK}{AC} = 1 - \frac{y\sqrt{39}}{x\sqrt{39}} = 1 - \frac{y}{x}$ ;

$\frac{2y}{x} = 1 \Rightarrow 2y = x$ ;  $y = \frac{x}{2}$ ;  $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ ;  $\frac{x}{y} = 2$

8)  $S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{3x \cdot x\sqrt{30}}{2} = \frac{3\sqrt{30}}{2} x^2$

$S_{CEF} = \frac{CE \cdot EF}{2} = \frac{y\sqrt{30} \cdot 10y}{2} = 5\sqrt{30} y^2$

$S_{ACB} : S_{CEF} = \frac{3\sqrt{30}}{2 \cdot 5\sqrt{30}} \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{3}{10} \cdot 2^2 = \frac{12}{10} = 1,2$

Ответ: 1,2  
(N2)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arccos(\sin x) = 5 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi + x$$

Знаем, что  $\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$ :

$$5 \arccos(\sin x) = 5(\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x)) - \pi + x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x \quad ; \quad x = \pi - 5 \arcsin(\sin x)$$

$$\} f(x) = \arcsin(\sin x)$$

$$E_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ т.е. } -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\sin x) \leq \frac{\pi}{2} \quad | \cdot 5$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin(\sin x) \leq \frac{5\pi}{2} \quad | \cdot (-1)$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq -5 \arcsin(\sin x) \leq \frac{5\pi}{2} \quad | + \pi$$

$$\sin x = \sin(\pi - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{функция } g(x) = \sin x$$

симметрична отн.

прямой  $x = \pi$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \pi - 5 \arcsin(\sin x) \leq \frac{7\pi}{2}, \text{ т.е.}$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$$

Проверим  $x = \pi$ :  $5 \arcsin(\sin \pi) = \pi - \pi$

$$5 \arcsin(0) = 0 \quad - \text{возможно}$$

Теперь найдем решения на  $(\pi; \frac{7\pi}{2}]$  и потом  
отразим их отк.  $x = \pi$  - такие решения также  
будут верными.

$g(x) = \sin x$  периодична:  $T = 2\pi$ , тогда:

$$5 \arcsin(\sin x) = 5 \arcsin(\sin(x + 2\pi n)), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$5 \arcsin(\sin(x + 2\pi n)) = 5(x + 2\pi n) \quad \text{при условии, что}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5(x + 2\pi n) \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$n = 0: 5x = \pi - x$$

$$x = \frac{\pi}{6} < \pi \quad - \text{не подходит для } (\pi; \frac{7\pi}{2}]$$

$$n = -1: 5x - 10\pi = \pi - x$$

$$x = \frac{11\pi}{6} \quad - \text{возможно} + \text{его отражение: } x = \pi - \left(\frac{11\pi}{6} - \pi\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$n = -2: 5x - 20\pi = \pi - x$$

$$x = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2} \quad - \text{возможно} + \text{его отражение:}$$
$$x = \pi - \left(\frac{21\pi}{6} - \pi\right) = -\frac{3\pi}{2}$$

$$n = -3: 5x - 30\pi = \pi - x$$

$$x = \frac{31\pi}{6} > \frac{7\pi}{2} \quad - \text{не подходит для } (\pi; \frac{7\pi}{2}]$$

Ответ:  $\left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}\right\}$   
(N3)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

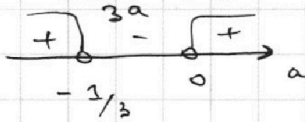


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение №4)

$$1) -1 < \frac{1}{3a};$$

$$\frac{\frac{1}{3a} + 1 > 0}{3a + 1} > 0$$

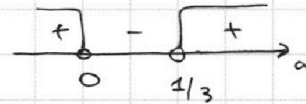


$$\begin{cases} a < -\frac{1}{3} \\ a > 0 \end{cases}$$

$$2) \frac{1}{3a} < 1$$

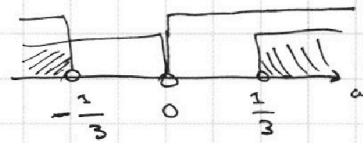
$$\frac{\frac{1}{3a} - 1 < 0}{1 - 3a} < 0$$

$$\frac{3a - 1}{3a} > 0$$



$$\begin{cases} a > \frac{1}{3} \\ a < 0 \end{cases}$$

Пересечение 1) и 2):



Т.е. 
$$\begin{cases} a < -\frac{1}{3} \\ a > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ: 
$$a \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$$
  
(№4)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



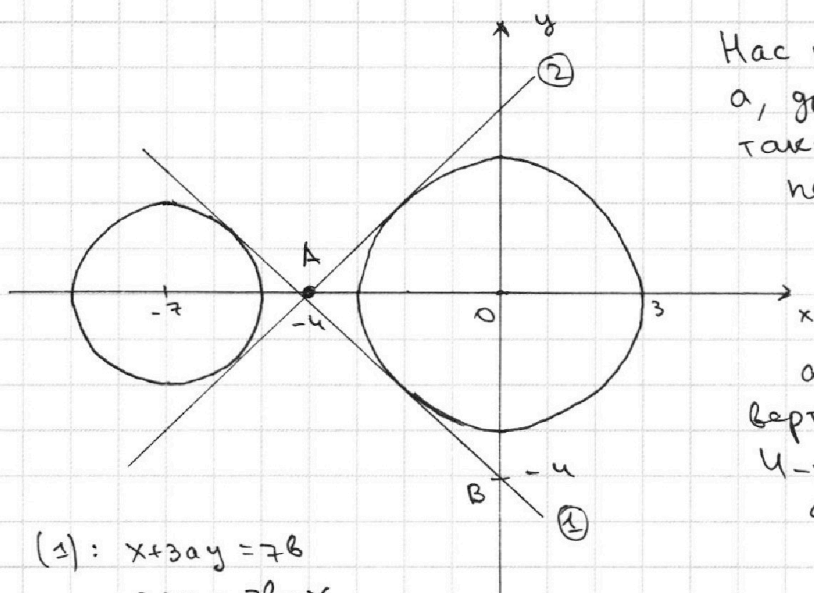
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} x^2+14x+y^2+45=0 & \text{уравнение окружности с} \\ x^2+y^2-9=0 & \text{к. в } (-7;0) \text{ и } r_2=2 \end{cases} \begin{cases} (x+7)^2+y^2=4 & \text{уравнение окружности с} \\ x^2+y^2=9 & \text{уравнение окружности с центром} \end{cases}$$

в  $(0;0)$  и  $r_2=3$

Изобразим (2) на плоскости  $(x,y)$ :



Нас интересуют значения  $a$ , для которых сущ.  $b$ , такое, что прямая (1) пересекает эти две окружности в 4-х точках. (при  $a \neq 0$ )

$a=0$ : (1):  $x=7b$  — вертикал. прямая  $\Rightarrow$  не будет 4-х пересечений  $\Rightarrow a=0$  — не подходит.

$$(1): x+3ay=7b$$

$$3ay=7b-x$$

$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} = kx+c, \text{ где } k = -\frac{1}{3a}, c = \frac{7b}{3a}$$

$c \in \mathbb{R}$  —

насколько сдвинута по вертикали прямая  $y = \frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$

Найдём такие  $a$ , что

$y = -\frac{1}{3a}x$  можно как-то сдвинуть по вертикали на  $c$  и получить 4 пересечения.

Найдём для этого такие  $-\frac{1}{3a}$  — углы наклона прямой (1)

Очевидно, самый маленький будет у внеш. кас. ①,

а самый большой — у внеш. кас. ②, при этом

$$k_{\text{①}} = -k_{\text{②}} \text{ в силу симметрии}$$

$$k_{\text{①}} = \frac{y_0 - y_A}{x_0 - x_A} = \frac{-4 - 0}{0 - (-4)} = -1 \Rightarrow k_{\text{②}} = 1, \text{ при этом у кас.}$$

2 решения  $\Rightarrow -1$  и  $1$  не годят.

Тогда:  ~~$-\frac{1}{3a}$~~   ~~$-\frac{1}{3a}$~~   $-1 < -\frac{1}{3a} < 1$   
 $-1 < \frac{1}{3a} < 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 1) \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 &= \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} &= \log_{(6x)^2} 7^3 - 4 \\ \log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} &= \frac{3}{2 \log_7(6x)} - 4 \end{aligned}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{З } \log_7 6x = a$$

$$a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2a} - 4; \quad \frac{2a^5 + 8a - 7}{2a} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 2) \log_7^4 y + 6 \log_y 7 &= \log_{y^2} (7^5) - 4 \\ \log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} &= \frac{5}{2 \log_7 y} - 4 \end{aligned}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{З } \log_7 y = b$$

$$b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4; \quad \frac{2b^5 + 8b + 7}{2b} = 0 \quad (2)$$

$$a + b = \log_7 6x + \log_7 y = \log_7 (6xy)$$

$$6xy = \frac{7^{(a+b)}}{7^{(a+b)}}$$

$$xy = \frac{7^{(a+b)}}{6}$$

необходимо найти все возможные значения этого выражения

$$(1): \begin{cases} 2a^5 + 8a - 7 = 0 \\ 2a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow 2a^5 + 8a = 7$$

$$(2): \begin{cases} 2b^5 + 8b + 7 = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2b^5 + 8b = -7 = -(2a^5 + 8a)$$

$$\textcircled{1} \quad 2b^5 + 8b = -2a^5 - 8a = 2(-a)^5 + 8(-a) \Rightarrow b = -a, \text{ тогда}$$

$$a + b = 0, \text{ и } xy = \frac{7^{(a+b)}}{6} = \frac{7^0}{6} = \frac{1}{6}$$

~~$$\textcircled{2} \quad 2a^5 + 8a = 2b^5 + 8b = 0$$~~

$$\text{Ответ: } \frac{1}{6}$$

(NS)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$$

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_2 - x_1) \in \mathbb{Z} \\ (y_2 - y_1) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$a = (x_2 - x_1) \cdot 4$  - горизонтальный катет прямоугол.  $\Delta$ -ка

$b = y_2 - y_1$  - вертикальный катет

Кас интересуют  $\Delta$ -ки : 1)  $a = 0, b = 40$ ;

таких  $\Delta$ -ов в параллелограмм влезет  $(68 - 40 + 1) \cdot 3 = 87$

2)  $a = 1, b = 36$

таких:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

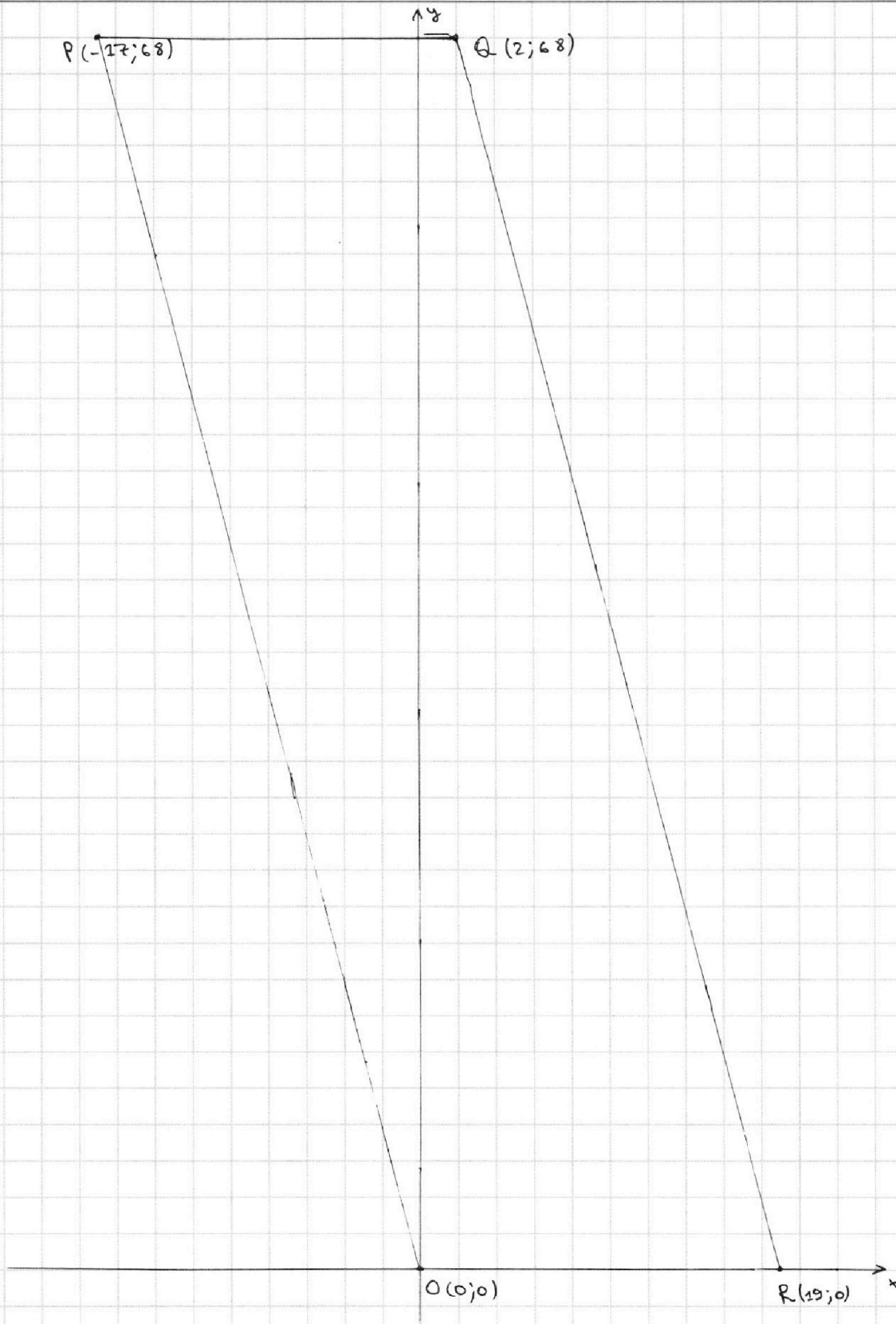
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черн

$$\log_2 6x = -\log_2 x^8$$
$$6x^{5-2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arccos(\sin x) = 5 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi + x$$

С учётом равенства:  $\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{2}$ :

$R=4$   
 $R \Delta x + \Delta y = \omega$   
 $4 \Delta x + R \Delta x = \omega$   
 $(R+4) \Delta x = \omega$

$$5 \arccos(\sin x) = 5 (\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x)) - \pi + x$$

$$5 \arccos(\sin x) = 5 \arccos(\sin x) + 5 \arcsin(\sin x) - \pi + x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

Композиция возрастающих функций  $f(x) = \arcsin x$  есть возрастающая функция  $\Rightarrow$  и  $g(x) = \sin x$  на  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow 5 \arcsin(\sin x) \uparrow \text{ на } [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

На  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$   $\arcsin(\sin x) = x$ , тогда:

$$5x = \pi - x; \quad 6x = \pi; \quad x = \frac{\pi}{6}$$

$$h(x) = \pi - x \text{ - убывает (т.к. } -x \downarrow)$$

Получаем, что  $\uparrow = \downarrow \Rightarrow$  есть единственный корень  $x = \frac{\pi}{6}$

Ответ:  $\{\frac{\pi}{6}\}$   
(N3)

$$y = -\frac{x}{2a} + \frac{b}{2a}$$

$$5x + 20\pi = \pi - x$$

$$6x = -19\pi$$

$$\frac{22\pi}{6}$$

$$5x - 20\pi = \pi - x$$

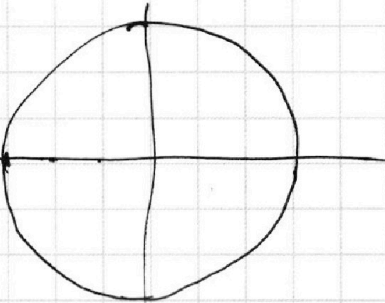
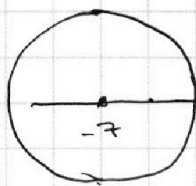
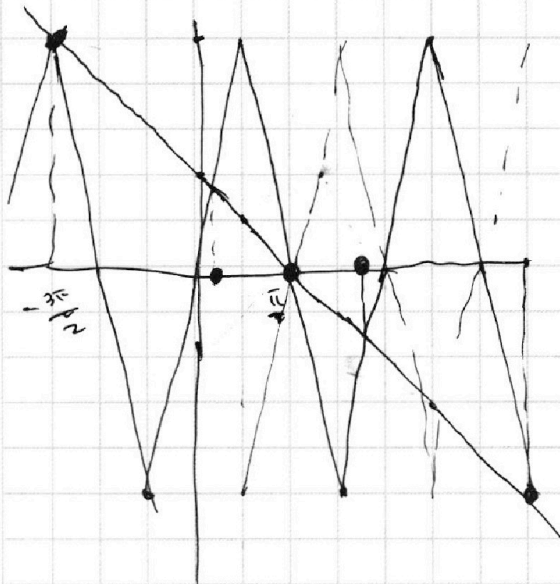
$$5x - 20\pi = \pi - x$$

$$\frac{22\pi}{6} = \frac{11\pi}{3}$$

Черн бас

$a=0$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

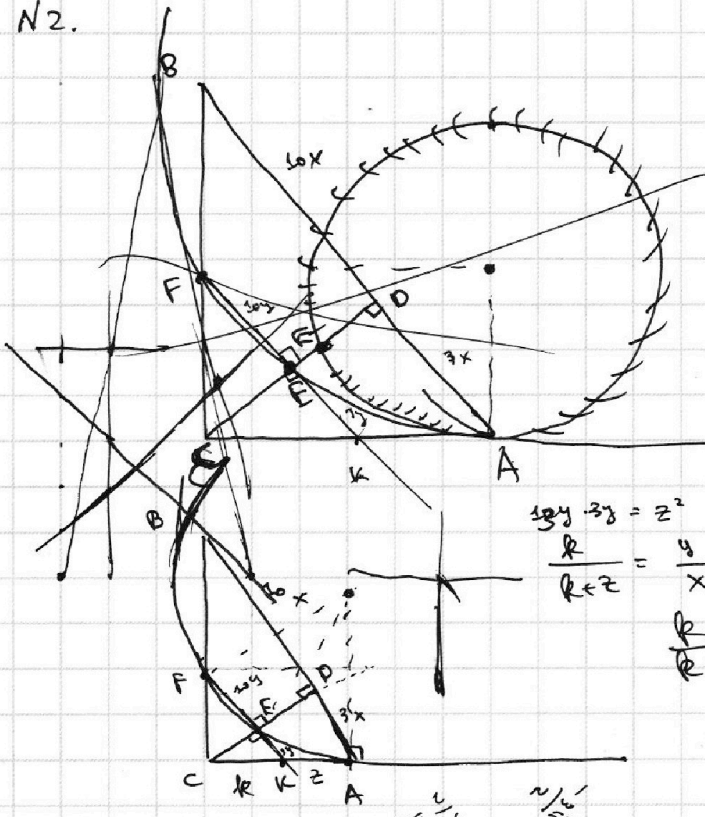
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2.



AB || EF

$$AB : BD = \frac{13}{10}$$

$$\frac{AD + BD}{BD} = \frac{13}{10}; \frac{AD}{BD} = \frac{3}{10}$$

$S_{ACD} : S_{CEAF} = ?$

$$S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2}$$

$$AO = 3x; CD = \sqrt{(R + y\sqrt{39})^2 - 9x^2} =$$

$$= \sqrt{(y\sqrt{39}(\frac{R}{y} + \sqrt{39}))^2 - 9x^2}$$

$$39y - 3y = z^2 \quad z = y\sqrt{39}$$

$$\frac{R}{R+z} = \frac{y}{x};$$

$$\frac{R}{R+y\sqrt{39}} = \frac{y}{x}$$

$$Rx = Ry + y^2\sqrt{39}$$

$$R = \frac{y^2\sqrt{39}}{x-y}$$

$$1 + \frac{1}{x-y} = \frac{x-y+z}{x-y}$$

N5.

$$1) \log_7^4(6x) - 2 \log_7 6x \cdot 7 = \log_7(6x)^2 \cdot 7^3 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \log_7(6x) - 4$$

$$2) \log_7^4 y + 6 \log_7 y \cdot 7 = \log_7 y^2 \cdot (7^5) - 4$$

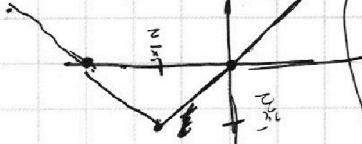
$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \log_7 y - 4$$

$$3) \begin{cases} \log_7 6x = a \\ \log_7 y = b \end{cases}$$

$$a+b = \log_7 6xy$$

$$\frac{2b^5 + 12 - 5 + 9b}{2b} = 0$$

$$\frac{2b^5 + 8b + 7}{2b} = 0$$



$$a^4 - \frac{4}{2a} = \frac{3}{2a} - 4$$

$$b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4$$

$$2ab^5 + 8ab + 7a + 2ab + 8ab - 7b = 0$$

$$2ab$$

$$CD \cdot \log x = AB \cdot BC$$

$$\frac{CD}{\log x} = \frac{3x}{CD} \Rightarrow CD = x\sqrt{30}$$

$$S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{3x \cdot x\sqrt{30}}{2} = \frac{3\sqrt{30}}{2} x^2$$

$$OD \geq \begin{cases} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$2b^5 + 8b + 7 = 0$$

$$2a^5 + 12 - 5 + 9b = 0$$

$$2a^5 - 4 - 3 + 8a = 0$$

$$\frac{2a^5 + 8a + 7}{2a} = 0$$

$$a \neq 0$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик. ①

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{6} + \frac{x}{5}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{x}{5}\right) = \sin x$$

17

N3.

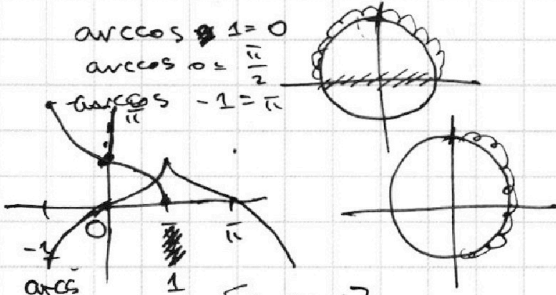
$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arccos(\sin x) = 5 \arccos(\sin x) + 5 \arcsin \sin x - \pi + x$$

$$\arccos 1 = 0$$

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(-1) = \pi$$



$x \in [-1; 1]$

$\arccos \in [0; \pi]$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\arccos(\sin x) = t$$

$$\cos t = \sin x$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 t} = \sin x$$

$$1 - \sin^2 t = \sin^2 x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

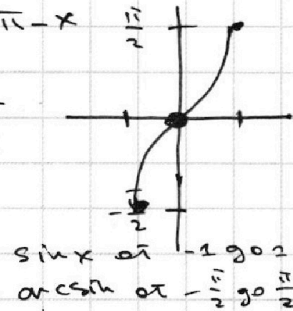
$$\arcsin 0 = 0$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$5x = \pi - x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$



Реш:

$$5 \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{9\pi + \pi}{6} \quad \text{①}$$

N1.

$$ab = k \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{24}$$

$$bc = m \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = n \cdot 2^{21} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$32 + 43 = 25$$

$$abc = k \cdot m \cdot n \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} =$$

$$= 15 k m n \cdot (2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37})^2$$

$$abc = \sqrt{15 k m n} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37}$$

$$\min(abc) = \sqrt{15} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37}$$

Например:  $k=5, m=3, n=2$

$$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{18}$$

$$ac = 2^{21} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

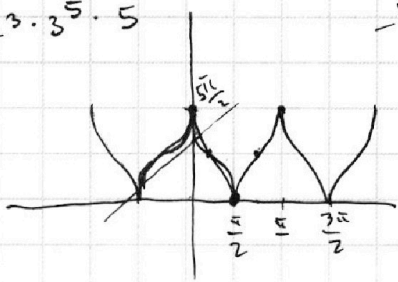
$$15kmn = x^2$$

$$x = \sqrt{15kmn} \Rightarrow kmn = 15$$

$$a = \sqrt{\frac{a^2 bc}{bc}} = \sqrt{\frac{2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{58}}{2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{18}}} = \sqrt{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 5^{40}} = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{20}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^5$$

$\arccos \frac{5}{12}$



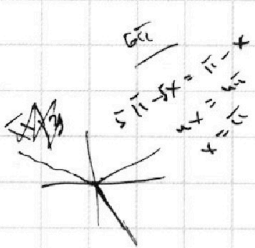
$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin x \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq -5 \arcsin x \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$5 \arccos\left(\sin \frac{23}{6}\pi\right) = \frac{5\pi}{3} = \pi - \frac{2\pi}{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

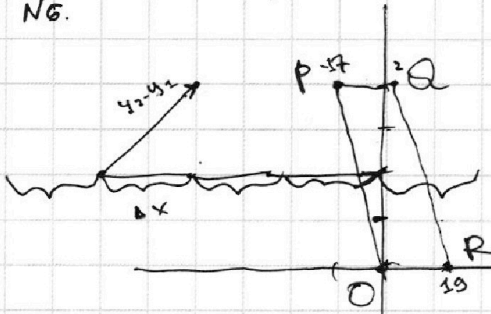


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

N6.



$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 0$$

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 0$$

пр. с функцией:  $y = kx + b$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



$(9; 4)$   
 $36 \pm 2 \pm 90$   
 $k = \frac{2}{3}$   
 28 ш. 3 р. 1  
 $(0; 1; 2)$   
 $(0; 1; 2)$   
 $\rightarrow 28; 68$

N2.  $S_{ACD} = \frac{3\sqrt{30}}{2} x^2$

$S_{CEF} = CE \cdot EF$ ;  $EF = \frac{10y}{4\sqrt{30}}$   
 $CE = \frac{y}{\sqrt{30}}$

$S_{CEF} : S_{ACD} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$S_{ABC} = \frac{CD \cdot AB}{2} = \frac{x\sqrt{30} \cdot 10x}{2}$

$S_{BCD} = \frac{10}{13} S_{ABC} = \frac{x\sqrt{30} \cdot 10x}{2} = 5\sqrt{30} x^2$

$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{30x^2 + 9x^2} = x\sqrt{39}$

$10 \leq \Delta x \leq \frac{10}{4}$   
 $0 \leq \Delta x \leq 10$

$AK = y\sqrt{39}$

$\frac{y}{x} = CK : AC = \frac{AC - AK}{AC} = 1 - \frac{AK}{AC} = 1 - \frac{y}{x}$

- 0, 1, 2, 3, 4, 5,  
6, 7, 8, 9, 10

$\frac{2y}{x} = 1$        $y = \frac{x}{2}$

$S_{CEF} = \frac{10y \cdot y\sqrt{30}}{2} = 5\sqrt{30} y^2$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{3\sqrt{30}x^2}{2} : 5\sqrt{30}y^2}{\frac{3\sqrt{30}}{2 \cdot 5\sqrt{30}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{3}{10} \cdot 2^2 = \frac{12}{10}$

N4.

$x + 3ay - 2b = 0$

$x = 2b$       1)  $a = 0$

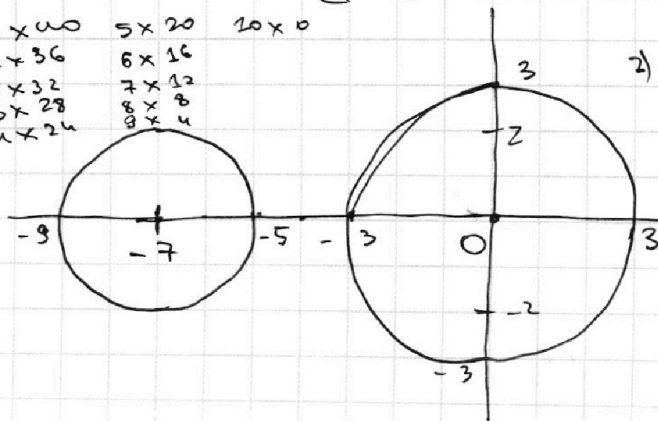
$x + 3ay = 2b$

$3ay = 2b - x$

$(x^2 + 2bx + 4b^2) + y^2 = 2^2$        $(x+7)^2 + y^2 = 2^2$   
 $x^2 + y^2 = 9$        $(x+0)^2 + (y+0)^2 = 3^2$

- 0 ш.:
- |        |        |        |
|--------|--------|--------|
| 0 x 0  | 5 x 20 | 10 x 0 |
| 1 x 36 | 6 x 16 |        |
| 2 x 32 | 7 x 12 |        |
| 3 x 28 | 8 x 8  |        |
| 4 x 24 | 9 x 4  |        |

$\frac{x+2b}{3a} + y = \frac{2b}{3a}$   
 2)  $a \neq 0$ :  $y = -\frac{x}{3a} + \frac{2b}{3a}$



$a^5 + b^5 + 8(a+b)$   
 $(a+b)(a^4 - \dots + 8) = 0$   
 $a - b$   
 $a^5 - b^5 + 4(a-b) = 0$   
 $(a-b)(\dots) +$

8?	5
2	6
3	7 a
4	2 b

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

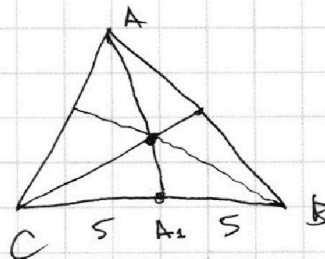
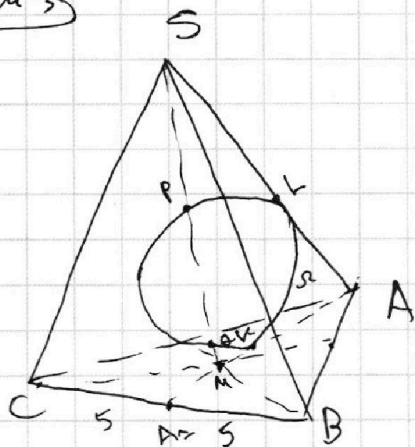
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черныш



$$a = \log_7 6x$$

$$b = \log_7 y$$

$$a+b = \log_7 6xy = \log_7 6 + \log_7 xy$$

$$\frac{(a+b)^7}{6} = xy$$

$$\frac{2a^5 + 8a - 7}{2a} = 0 = \frac{2b^5 + 8b + 7}{2b}$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$= 2b^5 + 8b + 7$$

$$7 = 2a^5 + 8a$$

$$7 = 2b^5 + 8b$$

$$a+b = \log_7 6xy$$

$$\frac{7^{a+b}}{6} = xy$$

$$a^5 - b^5 + 4(a-b) = 7^2$$

$$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = 7^2$$

$$(a-b)^7 = (a-b)^7$$

$$a+b = \log_7 6xy$$

$$7^{a+b} = 6xy$$

$$\frac{7^{a+b}}{6} = xy$$

$$\frac{(a^5 - b^5) + 4(a-b)}{6} = xy$$

$$7^{(a+b)} = ?$$

$$\log_7 \dots = 1$$

~~log~~

$$\log_7 (6xy) = a+b$$

$$xy = ?$$