МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

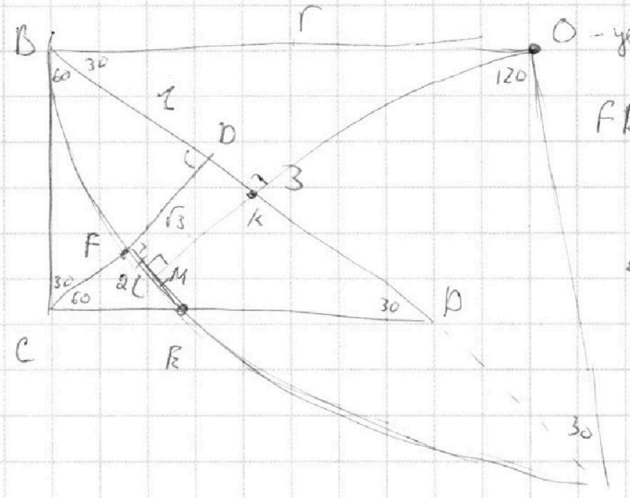
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

НУО $DB=1$ $\Rightarrow CD=\sqrt{3\cdot 1}=\sqrt{3}$ $\Rightarrow \angle DCA=60^\circ \Rightarrow \angle A=30^\circ$ ... $\angle OBA=30^\circ$ (1)

(т.к. прямоуг. Δ с катетами $\sqrt{3}$ и 3)

$FE=2l$.



O – центр. окр.

FE – хорда $\Rightarrow OM \perp EF$, $EM=FM$

$DK=FM$, т.к. FMKD – прямоуг.

(1) $\Rightarrow BK=r\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow l=4 \quad r\frac{\sqrt{3}}{2}-1 \Rightarrow r=\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2l}{\sqrt{3}}=\frac{2+2l}{\sqrt{3}}$

$(l+1)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2=r^2 \Rightarrow$ ~~...~~ $l^2+2l+1=\frac{3}{4}r^2 \Rightarrow r^2=\frac{4l^2+8l+4}{3}$

$FO^2=r^2=FM^2+MO^2$

$MO=\frac{r}{2}+\left(\sqrt{3}-\frac{2l}{3}\cdot\sqrt{3}\right)=\frac{r}{2}+\frac{3-2l}{\sqrt{3}}$

$KO+\left(CD-\frac{FE}{DA}\cdot CD\right)$ CF

$\Rightarrow r^2=l^2+\left(\frac{r}{2}+\frac{3-2l}{\sqrt{3}}\right)^2 \Big| \cdot 3$

~~$3+6l+2l^2=\left(\frac{1+l}{\sqrt{3}}+\frac{3-2l}{\sqrt{3}}\right)^2$~~

~~$9+18l+6l^2=(4-l)^2$~~

~~$9+18l+6l^2=16-8l+l^2$~~

~~$5l^2+26l-7=0$~~

~~$D_1=169+35=204$~~

~~$l=\frac{-13\pm\sqrt{204}}{5} \Rightarrow l=\frac{-13+\sqrt{204}}{5}$~~

~~$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{CA}{FE}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{2\left(\frac{-13+\sqrt{204}}{5}\right)}\right)^2=\frac{75}{(\sqrt{204}-13)^2}$ (т.к. подобие)~~

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{CA^2}{FE^2}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{2\cdot\frac{3}{4}}\right)^2=\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{16}{3}$

(подобие)

$\Leftarrow$

$3r^2=3l^2+(4-l)^2$

$3r^2=16-8l+4l^2$

$16l=12 \Rightarrow l=\frac{3}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 [x] 5 6 7

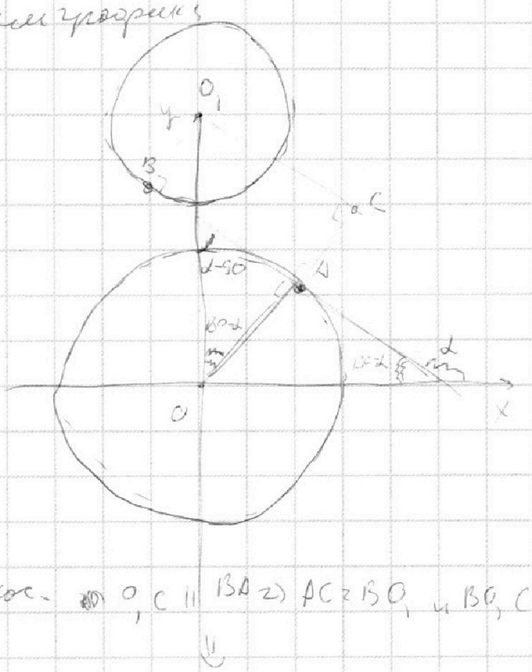
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0$

$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ x^2+(y-6)^2=2^2 \end{array}\right.$

построим графики



понятно, что ① не сходу. Точнее, что... если угол наклона графика $-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b=y$ лежит между углами касательных.

найдем ур-ния касательных.

$y=a_1x+b_1$

AB – кас. $O_1C \parallel BA \Rightarrow AC=BO_1$ и BO_1CA – прямоуг.

$OO_1=6$

$OC=R_1+R_2=3+2=5$

$\Rightarrow BA=O_1C=\sqrt{36-25}=\sqrt{11}$

$a_1=tg\alpha=-tg(180-\alpha)=\frac{-\sqrt{11}}{5}$

Состав. ур. второй касательной в силу симм.

$a_2=\frac{\sqrt{11}}{5}$

$-\frac{\sqrt{11}}{5}<-\frac{a}{2}<\frac{\sqrt{11}}{5} \Rightarrow \frac{2\sqrt{11}}{5}>a>-\frac{2\sqrt{11}}{5}$ – меньше 4 точек

$\Downarrow$

$a\in\left(-\inf;-\frac{2\sqrt{11}}{5}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{11}}{5};+\inf\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} \frac{\ln^4 x}{\ln^4 3} + \frac{6\ln 3}{\ln x} = \frac{\ln 3^5}{2\ln x} - 8 \\ \frac{\ln^4 z}{\ln^4 3} + \frac{2\ln 3}{\ln z} = \frac{\ln 3^{11}}{2\ln z} - 8 \end{cases}$$

пусть $l(x) = \log_3(x)$

$8x\, z = 5y$

$$\begin{cases} l^4 x + \frac{6}{lx} = \frac{5}{2lx} - 8 \\ l^4 z + \frac{2}{lz} = \frac{11}{2lz} - 8 \end{cases}$$

$lz = b$
$lx = a$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \end{cases}$$

$2a^5 + 12 = 5 - 16a$
$2b^5 + 4 = 11 - 16b$

$$\begin{cases} 2a^5 + 7 = -16a \\ 2b^5 - 7 = -16b \end{cases}$$ (возр. и убыв.) $\Rightarrow$ 1 решение

если t корень $2a^5 + 7 = -16a$, то

$-t$ - корень $2b^5 - 7 = -16b$

$\Downarrow$

$a^5 + b^5 = -8(a+b)$

$\Downarrow$

$a + b = 0 \Rightarrow lx + lz = 0 \Rightarrow \log_3(x \cdot z) = 0 \Rightarrow$

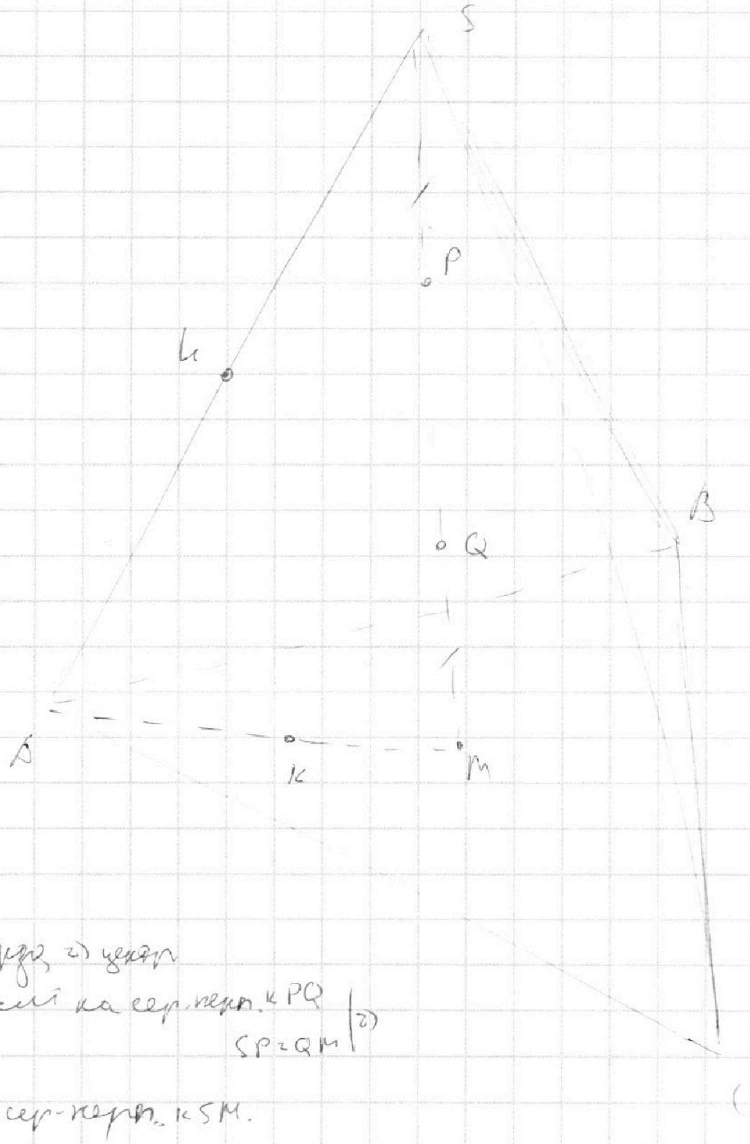
$\Rightarrow \log_3(x \cdot 5y) = 0 \Rightarrow x \cdot 5y = 1 \Rightarrow \boxed{x \cdot y = \frac{1}{5}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



PQ – хорда ⇒ центр
Ω лежит на сер. перп. к PQ
SP = QM ⇒

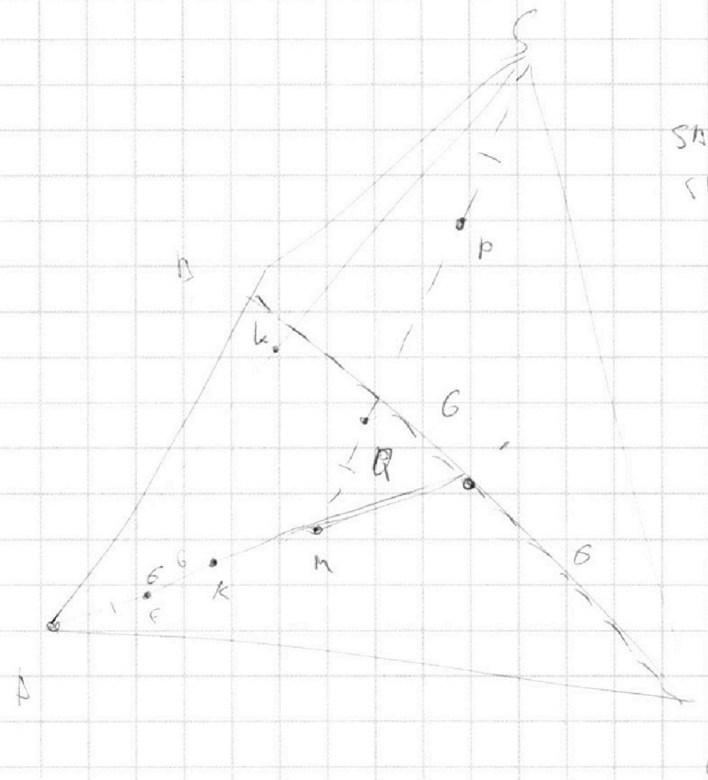
⇒ на сер-перп. к SM.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

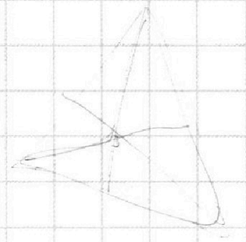
МФТИ

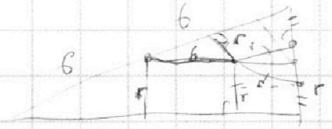


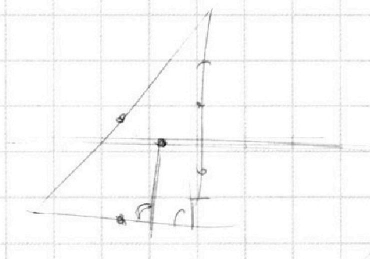
SA=BC=12
SP=MQ

SABC=90

AF

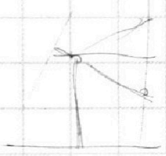


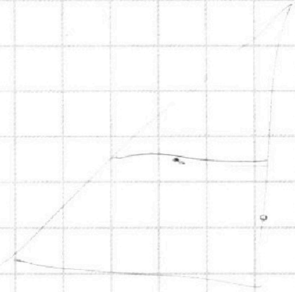


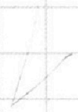


$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}$

$\frac{1}{2}$







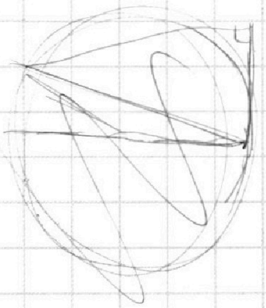
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

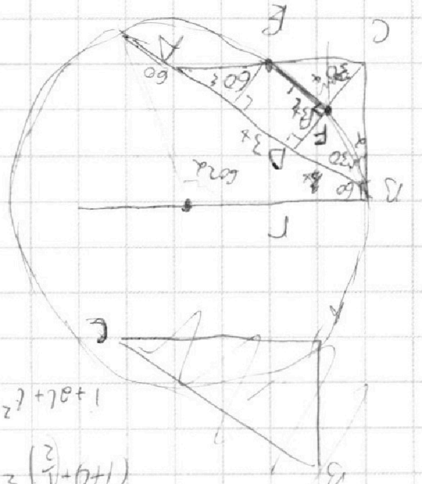
1	2	3	4	5	6	7
		X	X	X	X	X

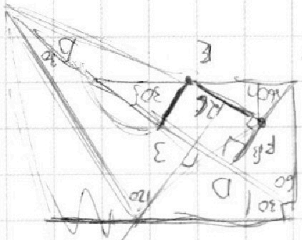
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$3(x_2-x_1)+(y_1-y_1)=33$





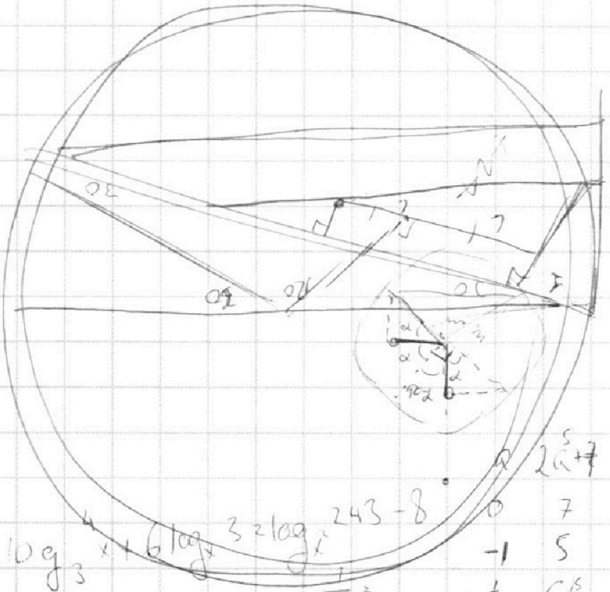


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

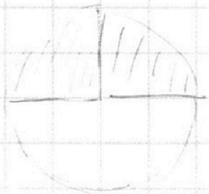
1	2	3	4	5	6	7
x	x	x	x	x	x	x

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

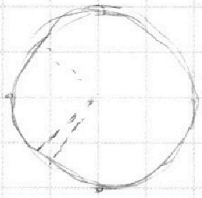


$a^5+b^5=-8(a+b)$



$2a(a^4+8)=-7$

$a(a^4+8)=-3,5$



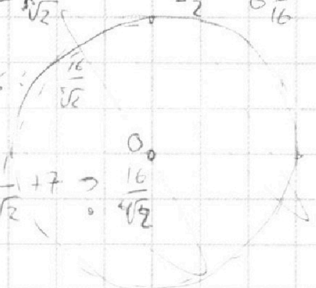
a	$2a^5+7$	$-16a$
0	7	0
-1	5	16
$-\frac{1}{2}$	$6\frac{15}{16}$	

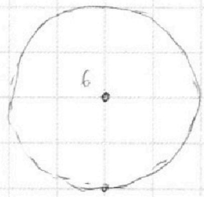
$\log_3^4 x+6\log_x 3=\log_{x^2}243-8$

$kx+b=y$

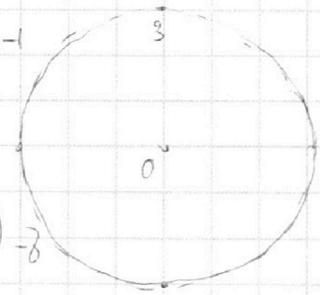
$ax+2y-3b=0$

$-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b=y$





$243=81\cdot3=3^5$



$\log_3^4(5y)+2\log_{5y}3=\log_{25y^2}(3^{11})-8$

$\log_3^4 x+6\log_x 3=\log_{x^2}243-8$

$\frac{\ln^4 x}{\ln^4 3}+\frac{6\ln 3}{\ln x}=\frac{\ln 3^5}{2\ln x}-8$

$\frac{\ln^4(5y)}{\ln^4 3}+\frac{2\ln 3}{\ln(5y)}=\frac{\ln 3^{11}}{2\ln 5y}-8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Будем ~~искать~~ брать точки A и искать к ним все возможные точки B.

Заметим, что ~~для~~ мн-во точек B будет $\parallel^*$ OP

~~Тогда~~ также заметим, что мы можем выбирать точки A, которые находятся ~~...~~ левее* $(9; 0)$. (и только их, т.к. мн-во точек иначе будет вне пол-ма, точнее за (10))
(во мн-во прямых $\parallel$ OP, проходящих через точку)

Причем, для каждой точки A будет одинаковое кол-во точек B,

а именно: $1+7\cdot2=15$

$(9\cdot3+1) = 420$

точку A мы можем выбрать $15\cdot$ [illegible] вариантов.

Тогда всего: ~~...~~ вариантов.

$15\cdot420 = 6300$

Как мы можем выбрать точку B: 1. Выбрать прямую* $(N; 0)$
$0\le N\le 9$

2. м/у двумя соседними прямыми* $(N; 0)$ и $(N+1; 0)$ есть еще 2 прямые*: $(N; 1)$ и $(N; 2)$ ~~есть~~
$(0\le N\le 9)$.

~~Тогда~~ на каждой прямой* мы можем выбрать 15 точек, т.к.

$42 \vdots 3 = 0$, а 15, т.к. $\frac{42}{3}+1=15$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\arcsin(\cos(x)) = x + \frac{\pi}{2}$

$5\operatorname{asin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$ $\quad (0 \le x \le \pi)$

$\pi \le x \le 2\pi$

$5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$

$5(\pi - (\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$5(\frac{\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$2\pi = 6x + 2\pi k$

$2\pi = -4x + 2\pi k$

$x = \frac{-2\pi + 2\pi k}{4}$

$x = \frac{2\pi + 2\pi k}{6}$

$(\operatorname{asin}(x): [-1; 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}])$

$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Чистовик~~

поймём, что $a^2b^2c^2 : 2^9 3^{10} 5^{10} \cdot 2^{14} 3^{13} 5^{13} \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} = 2^{42} 3^{41} 5^{53}$

Т.к. мы ищем НОД этих чисел 3 когда поделим $2^{42} 3^{41} 5^{53}$ на

$(2^9 3^{10} 5^{10})^2 = 2^{22} 3^{21} 5^{23}$

будем представлять числа в виде (a, b, c), подразумевая $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$

$ab^2c : (23, 23, 23)$
$ac : (19; 18, 30)$
$\Rightarrow ab^2c : (23, 23, 30) \Rightarrow$ [illegible]

минимум произведения.

$a = (a_1, a_2, a_3)$
$b = (b_1, b_2, b_3)$
$c = (c_1, c_2, c_3)$
$\in \mathbb{N}_0$

$a_1 + b_1 \geq 9$
$a_2 + b_2 \geq 10$
$a_3 + b_3 \geq 10$
$a_1 + c_1 \geq 19$
$a_2 + c_2 \geq 18$
$a_3 + c_3 \geq 30$
$b_1 + c_1 \geq 14$
$b_2 + c_2 \geq 13$
$b_3 + c_3 \geq 13$

$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 \\ a_1 + c_1 \geq 19 \\ b_1 + c_1 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 = 9 \\ a_1 + c_1 = 19 \\ b_1 + c_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 12 \end{cases}$

$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 10 \\ a_2 + c_2 \geq 18 \\ b_2 + c_2 \geq 13 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 + b_2 = 10 \\ a_2 + c_2 = 18 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases}$ - нет решений в $\mathbb{N}$. Т.к. мы минимизируем сумму $a_2 + b_2 + c_2$, то (на $\mathbb{N}$) следующий вариант будет, когда сумма больше на 1, например:

$\begin{cases} a_2 + b_2 = 10 \\ a_2 + c_2 = 18 \\ b_2 + c_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 7 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 10 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \end{cases} \Rightarrow$

один из вариантов:

$\Rightarrow \begin{cases} a_3 = 15 \\ c_3 = 15 \\ b_3 = 0 \end{cases}$

оптимально, т.к. $a_3 + b_3 + c_3 \geq \max(a_3 + b_3, a_3 + c_3, b_3 + c_3)$

$a_3 + c_3 + b_3 = \frac{30+30}{2} = 30$
$a_2 + b_2 + c_2 = 7 + 3 + 11 = 21$
$a_1 + b_1 + c_1 = 7 + 2 + 12 = 21$
$\Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$