



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна  $90$ ,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен  $5$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} ab &: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc &: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac &: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{9+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+30}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$



$abc : 2^{21} \cdot 3^{20,5} \cdot 5^{26,5}$ , т.к.  $a, b$  и  $c$  - натуральные числа, то  $abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$  (если степени 3 и 5 будут меньше, то  $a^2 b^2 c^2$  не будет делиться на  $3^{41}$  и  $5^{53}$ )

$ac : 5^{30} \Rightarrow abc : 5^{30}$ , т.к.  $b$  - натуральное число.

$$abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \Rightarrow abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

Пример для  $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$  ?

$$a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15}$$

~~$b = 2^7$~~

$$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$$

$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{15} : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$\Rightarrow bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

Ответ:  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \lambda \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 5 \arcsin \lambda \in \left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5 \arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow x \in [-3\pi; 2\pi]$$

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right); k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \sin\left(-x + \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right); n \in \mathbb{Z}$$

$$5 \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(-x + \frac{\pi}{2} + 2\pi n)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5x + \frac{5\pi}{2} + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

или

$$-5x + \frac{5\pi}{2} + 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi - 10\pi k$$

$$6x = 2\pi + 10\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi k}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3}$$

$$x \in \left\{-3\pi; -\frac{\pi}{2}; 2\pi\right\}$$

$$x \in \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}$$

При остальных решениях  $x \in (-\infty; -3\pi) \cup (2\pi; +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow$  эти решения не являются решениями для исходного уравнения.

$$\text{Ответ: } x \in \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



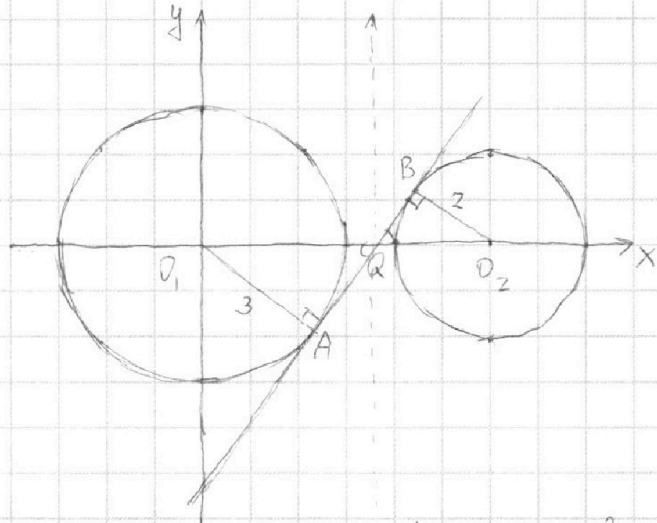
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2-12x+32=4 \end{cases}$$

$$ax+2y-3b=0 \begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + 1,5b & \text{— прямая} \\ x^2+y^2=9 & \text{— окружности} \\ (x-6)^2+y^2=4 & \text{— окружности} \end{cases}$$



Рассмотрим ситуацию, когда прямая  $y = -\frac{a}{2}x + 1,5b$  является касательной к обеим окружностям (изобр. на графике)  
 $\triangle O_1AQ \cong \triangle O_2BQ$  по 2 углам и парам равных углов,  $k = \frac{BO_2}{AO_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{OQ}{O_2Q} = \frac{2}{3} \Rightarrow OQ = \frac{12}{5}, O_2Q = \frac{12}{5}$

Выводим, что при рассмотрении этой же

возьмем точку Q за новую точку (0;0) в нашем графике, тогда прямая будет задаваться ур.:  $y=kx$ , где  $k = -\frac{a}{2}$ , а окружности:  $(x+\frac{12}{5})^2+y^2=9$  и  $(x+\frac{12}{5})^2+y^2=4$

$$y^2 = 4 - (x - \frac{12}{5})^2; y = kx \Rightarrow y^2 = k^2x^2$$

$4 - (x - \frac{12}{5})^2 = k^2x^2$  — уравнение точки пересек. прямой с окр.

$$100 - 25x^2 + 120x - 144 - 25k^2x^2 = 0$$

$$25k^2(k^2+1) - 120x + 44 = 0$$

$\frac{D}{4} = 60^2 - 44 \cdot 25 \cdot (k^2+1) = 100(36 - 11k^2 - 11) = 0$ , т.к. прямая и окр. имеют единственную точку пересек.

$$k = \pm \frac{5}{\sqrt{11}}$$

Заметим, что, если  $k \in (-\infty; -\frac{5}{\sqrt{11}}] \cup [\frac{5}{\sqrt{11}}; +\infty)$ , система не может иметь более 2 решений, а при  $k \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}})$  система будет иметь 4 решения, при таком  $b$ , что прямая  $y = kx + 1,5b$  будет проходить через точку Q.  $\Rightarrow k \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}})$

$$-\frac{a}{2} \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}}) \Rightarrow a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$$

Ответ:  $(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_2 243 - 8 \quad - 1\text{-ое уравнение}$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \log_2 \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

$$\frac{2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7}{2 \log_3 x} = 0$$

$$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7 = 0$$

$$\text{Замена: } \log_3 x = t.$$

$$f(t) = 2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$f'(t) = 10t^4 + 16 \Rightarrow$  функция непрерывно возрастает  $\Rightarrow$  имеет единственное решение  $f(t) = 0$ , при этом  $f(0) \neq 0 \Rightarrow$  исходное ур. имеет единственное решение.

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_3 y = \log_{25} y^2 (3^{11}) - 8 \quad - 2\text{-ое уравнение}$$

$$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2 \log_3 5y} - 8$$

$$\frac{2 \log_3^5(5y) + 16 \log_3(5y) - 7}{2 \log_3 5y} = 0$$

$$2 \log_3^5 5y + 16 \log_3 5y - 7 = 0 \quad \text{Замена: } \log_3 5y = t$$

Аналогично 1-ому, это уравнение (исходное ур. с переменной  $y$ ) имеет единственный корень, доказывается так же.

$$\begin{cases} 2 \log_3^5 5y + 16 \log_3 5y - 7 = 0 \\ 2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\log_3 x \neq \log_3 5y$$

Пусть  $x = a$  - решение 1-ого уравнение, тогда  $5y = \frac{1}{a}$ , то есть  $y = \frac{1}{5a}$  будет решением второго, т.к. если  $2 \log_3^5 a + 16 \log_3 a = -7$ , то  $2 \log_3^5(\frac{1}{a}) + 16 \log_3(\frac{1}{a}) = -2 \log_3^5 a - 16 \log_3 a = 7$ ,  $\Rightarrow xy = a \cdot \frac{1}{5a} = 0,2$ , т.к.  $a$  - единственное решение 1-го уравнение и  $\frac{1}{5a}$  соответственно, единственное решение 2-го.

Ответ: 0,2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

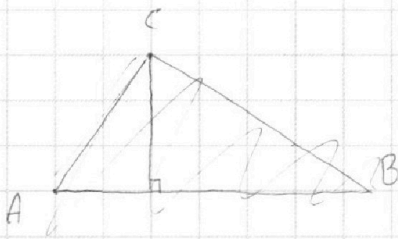
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

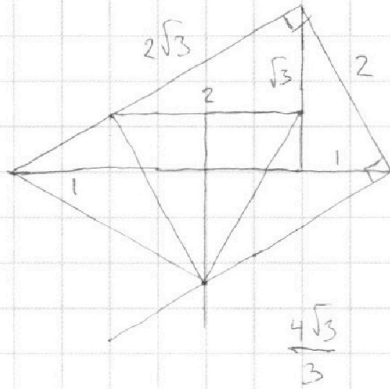
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



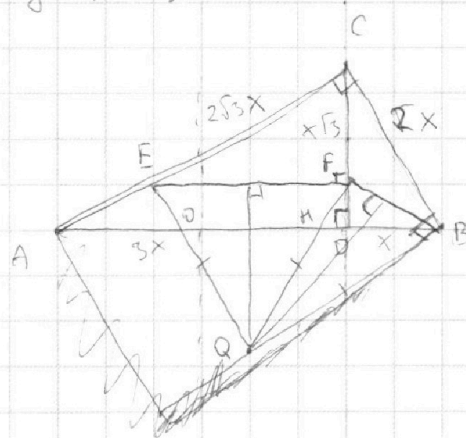
$$y = kx$$



$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$ax + 2y - 3b = 0$

$$y = -\frac{a}{2}x + 1,5b$$



$$\frac{AQ}{QB} = \frac{AO}{OB}$$

$$\begin{aligned} (x - \frac{7}{3})^2 \\ (3x - 7)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD \cdot DB = CD^2 \\ 3BD^2 = CD^2 \end{aligned}$$

$$36 - 9x^2 + 42x - 49 = 9k^2x^2$$

$$9x^2(k^2 + 1) - 42x + 13 = 0$$

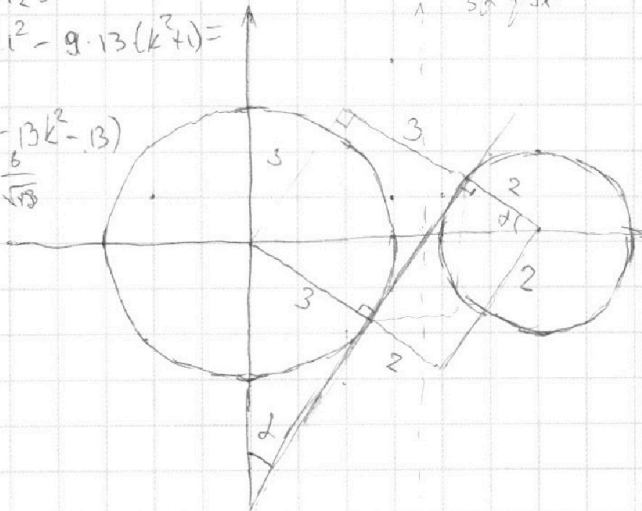
$$D = 42^2 - 4 \cdot 9 \cdot 13$$

$$\frac{D}{9} = 21^2 - 9 \cdot 13(k^2 + 1) = 0$$

$$= 9(49 - 13k^2 - 13)$$

$$k = \pm \frac{6}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{6}{\sqrt{13}}$$



$$36 - 9x^2 + 6x - 9k^2x^2 = 0$$

$$9x^2(k^2 + 1) - 6x - 35 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 35 \cdot 9(k^2 + 1) = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{cases} 4 - (x - \frac{1}{3})^2 = k^2x^2 \cdot 9 \\ 9 - (x + \frac{2}{3})^2 = k^2x^2 \cdot 9 \end{cases}$$

$$36 - 9x^2 + 6x - 1 = 9k^2x^2 = 0$$

$$9x^2 - x(6 - 9k) - 35 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (6 - 9k)^2 + 4 \cdot 35 \cdot 9 = 0 \\ &= 81k^2 - 108k + 36 + 4 \cdot 35 \cdot 9 = 0 \\ &= 81k^2 - 108k + 36^2 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$a^2 + b^2 = c^2$~~

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad 2^2 + 3^2 = 10$$

$$2^2 + 4^2 = 5^2$$

$$abc : 2^2, 3^2, 5^2$$

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$a : 2^7$$

$$b : 2^{12}$$

$$c : 2^{11}$$

$$a : 2^7$$

$$b : 2^3$$

$$c : 2^{11}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k\right)$$

$$5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi - 10\pi k$$

$$\sin(4\alpha) = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha = 4\sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$30^\circ \cdot 5 = 60^\circ + 90^\circ$$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \frac{5\pi}{2} + 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi - 10\pi k$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~$5 \arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2}))$~~

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos x =$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi = 6x \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{2} + 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

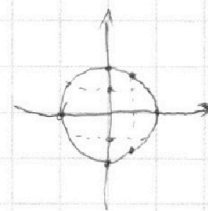
$$4x = -2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad \cos x =$$

$$\frac{\pi}{10}$$

$$x \in \left[-3\pi, 2\pi\right]$$

$$-\frac{5\pi}{2}$$



$$\frac{\pi}{6} \cdot 5 = \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \frac{6}{\log_3 x} = 10 \frac{5}{2} \log_3^3 x - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} + 8 = 0$$

$$t^4 + \frac{6}{t} - \frac{5}{2t} + 8 = 0$$

$$t^4 + \frac{7}{2t} + 8 = 0$$

$$\frac{2t^5 + 16t + 7}{2t} = 0$$

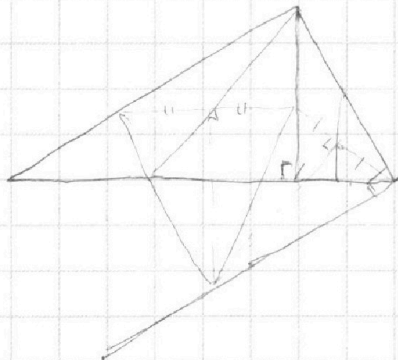
$$10t^4 + 16$$

$$\begin{cases} 2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \log_3^5 (5y) + 16 \log_3 (5y) - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\log_3^5 x + \log_3^5 (5y) + 8 \log_3 x + 8 \log_3 (5y) = 0$$

$$x = \frac{1}{5y}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$(0; 0); (-11; 0)$$

$$(0; -20); (+11; -20)$$

$$3\Delta x + \Delta y = 33$$

$$\Delta y = 33 - 3\Delta x$$

$$3\Delta x + \Delta y = 33$$

$$x = 2\sqrt{14}$$

$$(-14; 0) (+14; 33)$$

$$0; 33 \quad -1; 36$$

$$1; 30 \quad -2; 39$$

$$2; 27 \quad -3; 42$$

$$3; 24 \quad 6; 15$$

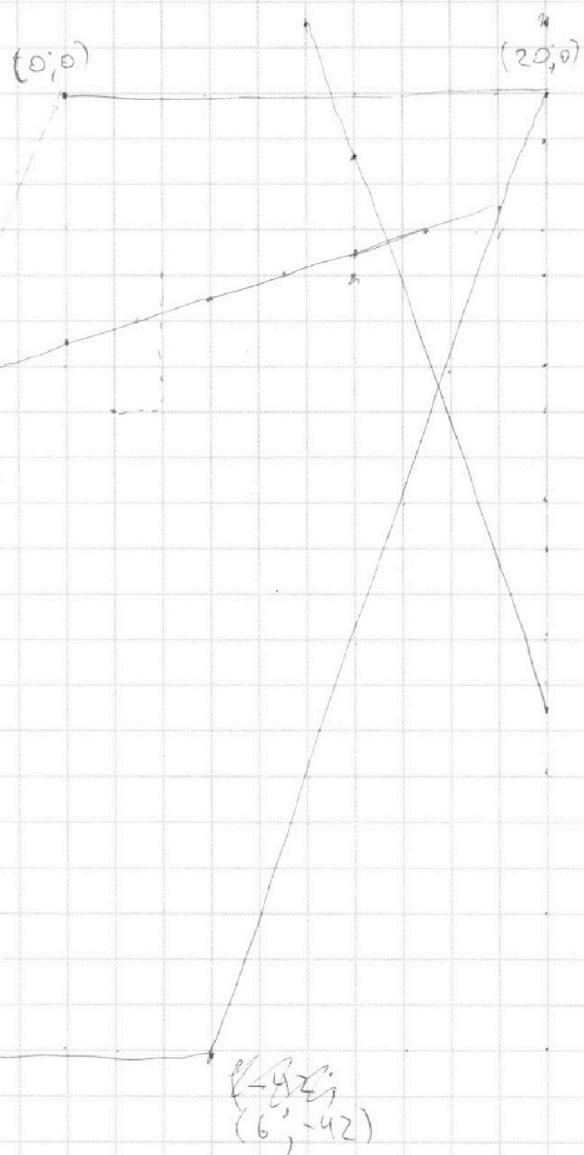
$$10; 0 \quad 7; 12$$

$$25; -42$$

$$(-14; -42)$$

$$\begin{aligned} &(-42; 6) \\ &(6; -42) \end{aligned}$$

$$\frac{42}{14} = 3$$





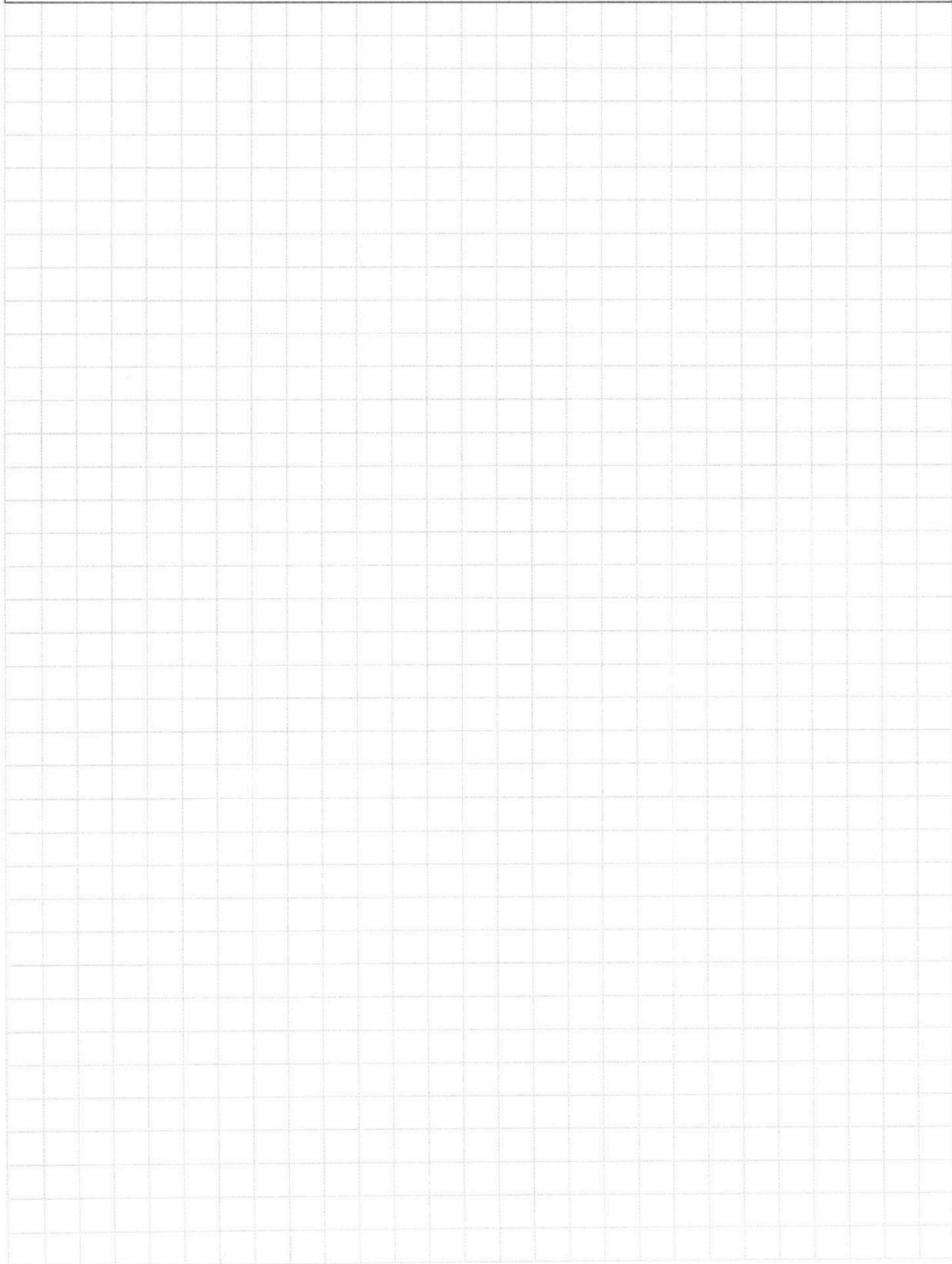
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

