МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot p$ $\quad$ p, q, r – либо 1, либо числа
(все показатели $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot q$ $\quad$ взаимнопростые с 2, 3, 5.
степеней – це- $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot r$
лые числа, не меньшие 0)

Тогда $abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \cdot pqr \geqslant$

$\geqslant 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$

По условию: 1) $\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geqslant 7 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geqslant 13 \\ \alpha_1+\alpha_3 \geqslant 14 \end{cases}$, тогда $2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \geqslant 34$
$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geqslant 17$

при $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 17$ возможна ситуация:

$\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 10$. – удовлетворяют системе

2) $\begin{cases} \beta_1+\beta_2 \geqslant 11 \\ \beta_2+\beta_3 \geqslant 15 \\ \beta_1+\beta_3 \geqslant 17 \end{cases}$, тогда $2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \geqslant 43$
$\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant 21{,}5$
$\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant 22$ (т.к. все числа

при $\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 22$ возможна ситуация: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – целые)
$\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 5$, $\beta_3 = 10$ – удовлетворяют системе

3) $\begin{cases} \gamma_1+\gamma_2 \geqslant 14 \\ \gamma_2+\gamma_3 \geqslant 18 \\ \gamma_1+\gamma_3 \geqslant 43 \end{cases}$ т.к. $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geqslant \gamma_1+\gamma_3 \geqslant 43$, то

пусть $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 43$, тогда возможна ситуация: ~~$\gamma_3 = 43$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 =$~~ $\gamma_1 = 20$, $\gamma_3 = 23$, $\gamma_2 = 0$ – удовлетворяют системе.

Тогда $abc \geqslant 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$
$abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ при $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{20}$, $b = 2^3 \cdot 3^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{23}$

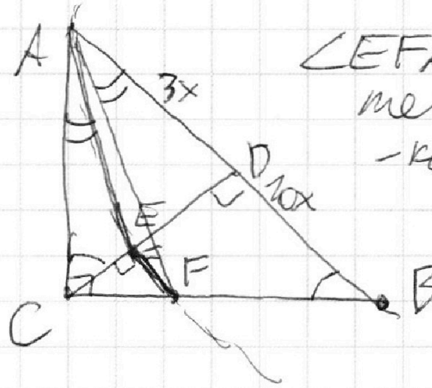
Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\angle EFA = \angle CAE$ (~~как~~ по св-ву касательной: AE – хорда, $\angle EFA$ – впис., AC – кас.)

$\angle EFA = \angle FAB$ (как накрест лежащие углы)

$\angle CAD = 90^\circ - \angle CBA = 90^\circ - (90^\circ - \angle BCD) = \angle BCD$; $\angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$ (как соотв. углы)

$\angle CEF = \angle ADC$, значит $\Delta CAD \sim \Delta CEF$ (по двум углам); $k^2 = \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$; $\cancel{k = \frac{AC}{CE} = \frac{EF}{CD} = \frac{AF}{DF}}$ $k = \frac{AC}{CF} = \frac{CD}{EF} = \frac{AD}{CE}$

~~$\angle CAE + \angle EAF = \angle CAF = \angle EFA + \angle EAF = \angle ADE$~~

~~$\angle ACB = \angle ADC = 90^\circ$~~

~~значит $\Delta ADE \sim \Delta CAF$ (по двум углам)~~

~~$\frac{AD}{CE} = \frac{CD}{EF} = \frac{ADC}{CF}$ $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CF} = \frac{AE}{ACE}$~~

$\angle ACD = \angle ABC$, значит $\Delta ACE \sim \Delta ABF$ (по двум углам)

$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF}$; $\frac{CE}{BF} = \frac{CE}{BC - CF}$; $\frac{CF}{CE} = \frac{BC}{CD}$, значит

$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BC - \frac{BC \cdot CE}{CD}}$; $\frac{AC}{AB} = \frac{CE \cdot CD}{BC(CD - CE)}$

Пусть $AB = 13x$, тогда $BD = 10x$, $AD = 3x$, $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = 3\sqrt{10}x$, $BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{90 + 100}x = \sqrt{190}x$; $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = 3\sqrt{11}x$:

$\frac{3\sqrt{11}}{13} = \frac{CE \cdot 3\sqrt{10}\cancel{x}}{\sqrt{190} \cdot (3\sqrt{10}x - CE)}$; $\frac{\sqrt{11}}{13} = \frac{CE}{\sqrt{19}(3\sqrt{10}x - CE)}$

$3 \cdot \sqrt{11 \cdot 19 \cdot 10}x - \sqrt{11} \cdot CE = 13CE \Rightarrow CE = \frac{3\sqrt{11 \cdot 19 \cdot 10}}{\sqrt{11} + 13}x$

$$k=\frac{AD}{CE}=\frac{\sqrt{11}+13}{\sqrt{11\cdot19\cdot10}}$$

$$k^2=\frac{(\sqrt{11}+13)^2}{11\cdot19\cdot10}=\frac{169+11+26\sqrt{11}}{2090}=\frac{180+26\sqrt{11}}{2090}=\frac{90+13\sqrt{11}}{1045}$$

Ответ: $\frac{90+13\sqrt{11}}{1045}$.

3) $5\arccos(\sin x)=\frac{3\pi}{2}+x$

$5\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sin x)\right)=\frac{3\pi}{2}+x$

$\pi-5(x+2\pi k)=x \quad , k\in\mathbb{Z}, -\frac{\pi}{2}\le x+2\pi k\le\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi k}{3}=x$

Проверка: $-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi k}{3}+\frac{2\pi k}{1}\le\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\le\frac{\pi}{2}$

$-\frac{2\pi}{3}\le\frac{\pi k}{3}\le\frac{\pi}{3}$

$-2\le k\le 1$

при $k\in\mathbb{Z}$ есть следующие значения:

$k=-2$, $k=-1$, $k=0$, $k=1$.

при $k=1$, $x=\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{3}=-\frac{3\pi}{2}$, но $5\arccos(\sin\frac{3\pi}{2})=5\pi$

$\frac{3\pi}{2}+x=0$ – не подх.

при $k=0$, $x=\frac{\pi}{6}$

$5\arccos(\sin\frac{\pi}{6})=\frac{5\pi}{3}$

$\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{3}$ – подх.

при $k=-1$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{3}=\frac{11\pi}{6}$, но $5\arccos(\sin\frac{11\pi}{6})=$

$=5\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$

при $k=-2$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{10\pi}{3}=\frac{21\pi}{6}=\frac{7\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}+\frac{11\pi}{6}=\frac{20\pi}{3}$ – не подх.

$\frac{3\pi}{2}+\frac{7\pi}{3}=\frac{23\pi}{6}$

$5\arccos(\sin\frac{7\pi}{3})=5\cdot\frac{\pi}{3}$ – не подх.

значит $x=\frac{\pi}{6}$ – единственное решение

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

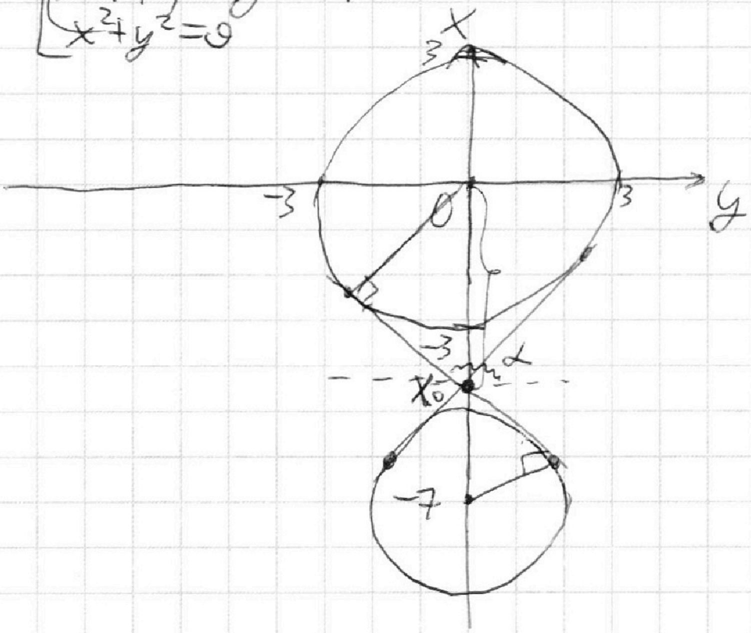
МФТИ

4) $\begin{cases} x+3ay-7b & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$

~~решим~~ построим множество точек, удовлетворяющих (2)

$\left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=4 \\ x^2+y^2=9 \end{array}\right.$



(1): ~~$x=7b-3ay$~~ Найдем уравнения касательных, ~~проходящих~~ к двум данным окружностям.

$\frac{3}{-x_0}=\frac{2}{7+x_0}$; $21+3x_0=-2x_0$; $x_0=\frac{-21}{5}$

~~$\sin(90^\circ-\alpha)=\frac{3}{|x_0|}=\cos\alpha=\frac{3}{\frac{21}{5}}=\frac{5}{7}, \sin\alpha=\frac{2\sqrt6}{7}$~~

$\sin(\alpha-90^\circ)=\frac{3}{|x_0|}$; $-\cos\alpha=\frac{3}{\frac{21}{5}}$; $\cos\alpha=-\frac{5}{7}$, $\sin\alpha=\frac{2\sqrt6}{7}$

$tg\,\alpha=-\frac{2\sqrt6}{5}$

Итак, данные уравнения: $x=-\frac{21}{5}-\frac{2\sqrt6}{5}y$ и

$x=-\frac{21}{5}+\frac{2\sqrt6}{5}y$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

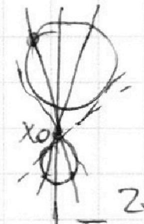
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(1): $x=7b-3ay$

Заметим, что при любом значении a

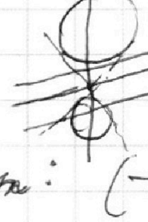
мы можем подобрать значение b так, чтобы данная прямая проходила через точку $(0;x_0)$ $\left(b=\frac{x_0+3ay}{7}\right)$, тогда если $|-3a| > \frac{2\sqrt6}{5}$, то любая прямая, проходящая через $(0;x_0)$ пересечет обе окружности в двух точках:



т.е. такие a уд. условию
$$\left[\begin{array}{l} a > \frac{2\sqrt6}{15} \\ a < -\frac{2\sqrt6}{15} \end{array}\right.$$

Если $|3a| = \frac{2\sqrt6}{5}$, то такие прямые — общие ~~касательные~~ касательные двух окружностей. Тогда точек пересечения всего 2.

Если $|-3a| < \frac{2\sqrt6}{5}$, то обе прямые, проходящие через точку $(0;x_0)$ не будут ~~пересекать~~ иметь с окружностями общих точек. Если мы будем двигать данную прямую вверх или вниз, ~~то пра~~ расстояние от прямой до одной из окружностей будет увеличиваться, значит она не будет иметь с этой окружностью общих точек и тогда такие a нам не подходят:



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2\sqrt6}{15}\right); \left(\frac{2\sqrt6}{15}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) ~~Решим уравнение~~ $\log_7^4 6x - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4$

$\log_7^4 6x \cancel{-2\log} - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{1}{\frac{2}{3}\log_7 6x} - 4$ $\quad x \neq 1$

$y \neq 1$

$t = \log_7 6x;\quad t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$ $\quad t \neq 0$

$t^4 - \frac{7}{2t} + 4 = 0 \quad (1)$

2) $\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7)^5 - 4$

$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2\log_7 y} - 4$; $p = \log_7 y,\ p \neq 0$

$\cancel{y^4 + \frac{7}{y}}$ $p^4 + \frac{7}{2p} + 4 = 0 \quad (2)$

Вычтем из (1) уравнение (2):

$t^4 - p^4 - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{p}\right) = 0$

$(t-p)(t+p)(t^2+p^2) - \frac{7}{2}\left(\frac{p+t}{pt}\right) = 0$

1) $p + t = 0$: $\log_7 y + \log_7 6x = 0$

$\log_7 6xy = 0$

$6xy = 1$

$xy = \frac{1}{6}$

2) $p + t \neq 0$

$2(t-p)(t^2+p^2)pt - 7 = 0 \quad (pt \neq 0)$

$(t-p)(t^2+p^2)pt = \frac{7}{2}$

~~при $p > 0$ уравнение~~ $p^4 + \frac{7}{2p} + 4 = 0$ ~~не имеет корней,~~

~~поэтому $p < 0$~~

Теперь сложим уравнения (1) и (2):

$t^4 + p^4 - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{p}\right) + 8 = 0$

$t^4 + p^4 + 8 = \frac{(p-t)\cdot 7}{2pt}$; $\quad p - t = \frac{2pt}{7}(t^4 + 8 + p^4)$

Подставим в ранее полученное ур-е:

$$-\frac{2}{7}p^2t^2\cdot(p^2+t^2)\cdot(t^4+8+p^4)=\frac{7}{2}$$

л. часть <0, а правая – >0, значит уравнение не имеет корней и такая ситуация невозможна.

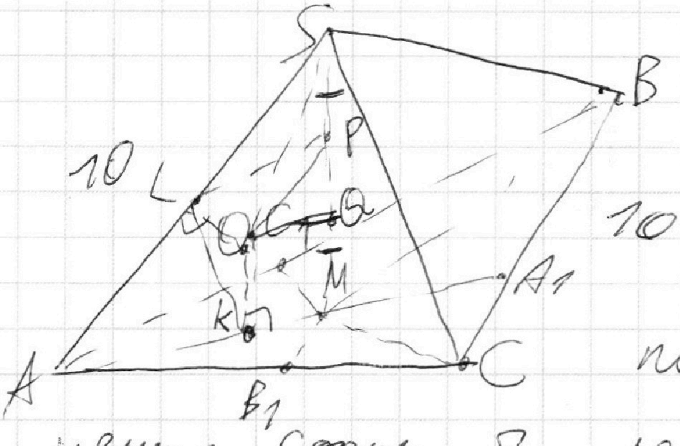
Ответ: $\frac{1}{6}$.

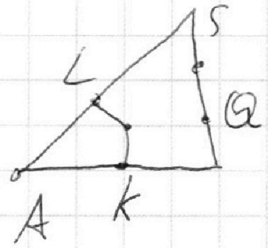
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





точки L, P, Q, K лежат на сфере и в одной плоскости,

центр сферы Ω лежит на перпендикуляре к плоскости (ABC), проходящем через K,

$\cancel{AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{1}{8}\sqrt{2(AB^2+BC^2)-AC^2}}$ а так же

на перпендикуляре к отрезку AS в точке L, значит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

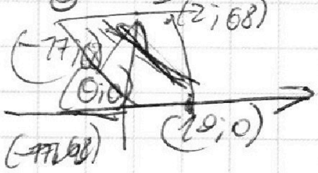
3) $5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\pi - 5(x + 2\pi k) = x$, $k \in \mathbb{Z}$ $-\frac{\pi}{2} \le x + 2\pi k \le \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3}$

Проверка: $x + 2\pi k = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} + 2\pi k = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$



$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \le \frac{\pi}{2}$

$-\frac{2\pi}{3} \le \frac{\pi k}{3} \le \frac{\pi}{3}$

$-2 \le k \le 1$ при $k \in \mathbb{Z}$ подходят следующие значения: $-2, -1, 0, 1$ $\quad 4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$

тогда $x = \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{3}$ $(k=-2)$ $\quad$ ~~$y = 4x$~~

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$ $(k=-1)$ $\quad y = 4x + 20$

$x = \frac{\pi}{6}$ $(k=0)$

$x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$ $(k=1)$

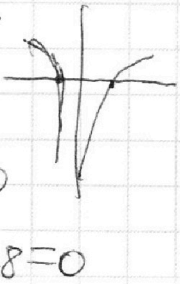
при $x = \frac{7\pi}{3}$ $\quad 5\arccos\left(\sin\frac{7\pi}{3}\right) = $ ~~$5\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5$~~

$= 5\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{3}$, $\quad \frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{3} = \frac{23\pi}{3}$ значения не равны, значит $x = \frac{7\pi}{3}$ не подх.

при $x = \frac{11\pi}{6}$ $\quad 5\arccos\left(\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 5\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$

$\frac{3\pi}{2} + \frac{11\pi}{6}$

$3t^4 + \frac{7}{2t^2} = \frac{6t^5 + 7}{2t^2}$ $\quad t \to 0$



$(t-p)(t^2+p^2)pt = \frac{7}{2}$ $\quad t^4 + p^4 - \frac{7}{2}(t-p) + 8 = 0$

~~pt~~

$t^4 + p^4 - \frac{7}{2}\frac{(p-t)}{pt} + 8 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3) $5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

~~$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$~~

~~$\pi = 6x$~~

~~$x = \frac{\pi}{6}$ - уд условию~~

~~Ответ: $\frac{\pi}{6}$.~~

$\frac{5\pi}{2} - 5(x + 2\pi k) = \frac{3\pi}{2} + x$, $k \in \mathbb{Z}$, $-\frac{\pi}{2} \le x + 2\pi k \le \frac{\pi}{2}$

$\pi - 10\pi k = 6x$

$x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3}$

Проверка: $x + 2\pi k = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} + 2\pi k$

$-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \le -\frac{5\pi k}{3} + \frac{2\pi k}{1} \le \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi k}{3} \le \frac{\pi}{2}$

$-\frac{3}{2} \le k \le \frac{3}{2}$

при $k \in \mathbb{Z}$ подходят 3 значения: $k=-1, k=0, k=1$

$ab \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ $\quad abc_{min} - ?$

$bc \vdots 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ $\quad ab = k \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$ac \vdots 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$ $\quad bc = p \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

$bc = r \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$\alpha_1 + \alpha_2 \ge 7$ $\quad \beta_1 + \beta_2 \ge 11$

$\alpha_1 + \alpha_3 \ge 14$ $\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\ {}_{min} - ?$ $\quad \beta_2 + \beta_3 \ge 15$

$\alpha_2 + \alpha_3 \ge 13$ $\quad 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \ge 34$ $\quad \beta_1 + \beta_3 \ge 17$

$(0, 4, 3)$ $\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ge 17$ $\quad 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \ge 43$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \ge 22$

7, 4

3, 11

$(5, 7, 11)$

$\gamma_1 + \gamma_2 \ge 14$

$\gamma_2 + \gamma_3 \ge 18$ $\quad 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \ge 75$

$\gamma_3 + \gamma_3 \ge 43$ $\quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \ge 38$ $\quad k \ge 43$ $\quad k \ge 43$

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = k$ $\quad k \ge 43$ $\quad k - \gamma_1 \ge 43$ $\quad \gamma_1 \le k - 43$

$\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 14$,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$49k^2+49b^2-98bk \leq 3k^2+1$

$49b^2-42kb+21k^2<2k^2+2$

$6x\neq 1$

$-6x\neq 1$

5.) $\log_7^4 6x - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4$

$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{1}{\log_{343}36x^2} - 4$

$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{1}{\frac{2}{3}\log_7 6x} - 4$

$t = \log_7 6x$

$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$

$t^4 - \frac{7}{2t} + 4 = 0$

$2t^4 + 8t - 7 = 0$

$\frac{5\pi}{3}k$

$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = \frac{3\pi}{2} + x$

$-\frac{\pi}{2} < x + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2}$

$\pi + 10\pi k = 6x$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}$

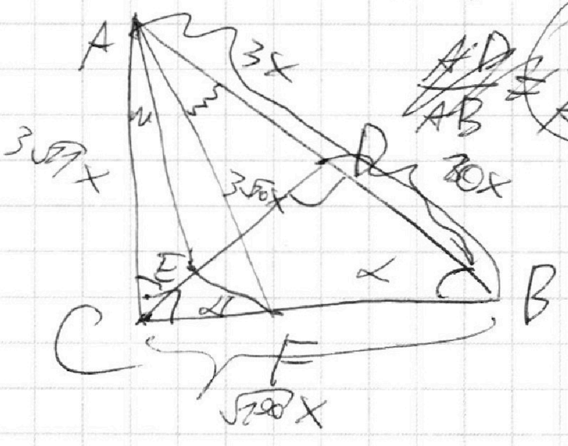
$\frac{5\pi}{2} - 5\arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$x + 2\pi k$

$t^4 + p^4 = \frac{7}{2}\left(\frac{p-t}{pt}\right) - 8 \quad p - t = \frac{(t^4+p^4+8)}{7}pt$

$-(t^2+p^2)(pt)^2(t^4+p^4+8)$

$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BC-CF}$



$\frac{AD}{AB} \neq \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF}$

МФТИ

$$CE=\frac{AC\cdot BC\cdot CD}{AC\cdot CD+AC\cdot BC}\qquad X=\frac{AC\cdot AD\cdot CD}{BC\cdot\frac{(AC\cdot BC\cdot CD)^2}{(AC\cdot CD+AB\cdot BC)^2}}=$$

$$=\frac{(AC\cdot CD+AB\cdot BC)^2}{BC^3\cdot AC\cdot CD}$$

3) $5\arccos(\sin x)=\frac{3\pi}{2}+x$

$5\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sin x)\right)=\frac{3\pi}{2}+x$

$\frac{5\pi}{2}-5x=\frac{3\pi}{2}+x;\quad \pi=6x;\ x=\frac{\pi}{6}$

$5\arccos\frac{1}{2}=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$

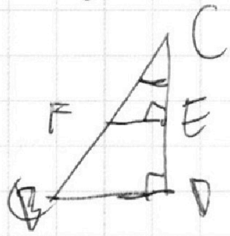
$\frac{5\pi}{3}$ = $\frac{10\pi}{6}=\frac{5\pi}{3}$

$\cancel{4)}$ $CF=\frac{BC\cdot CE}{CD}=\frac{AC\cdot DE}{AD}$

$\Delta ACD\sim\Delta ACEF$

$$k=\frac{CF}{AC}=\frac{EF}{CD}=\frac{CE}{AD}$$

$k=\frac{CE}{DE}$



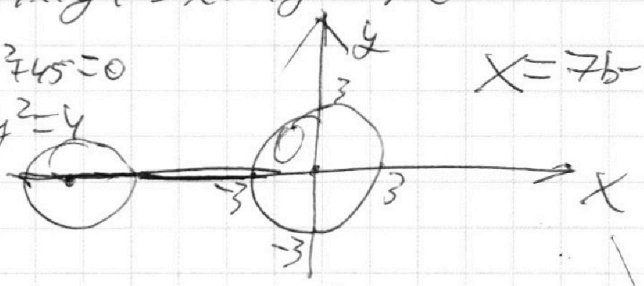
$\frac{7\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}=\frac{23\pi}{6}$

и реш.

4) $\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$

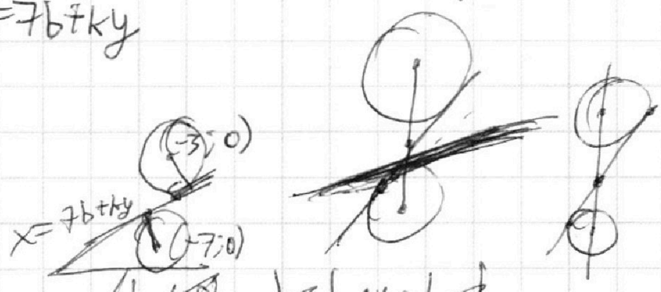
$x^2+14x+y^2+45=0$

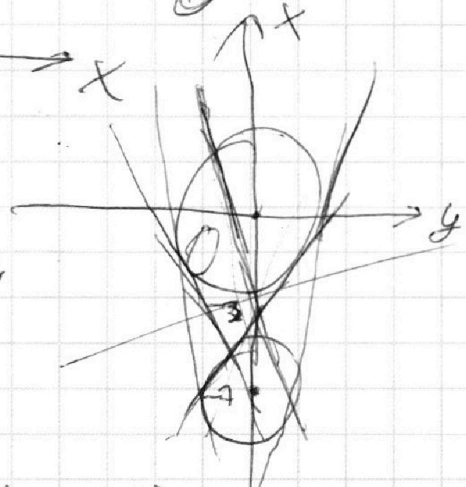
$(x+7)^2+y^2=4$



$x=7b-3ay\quad -3a=k$

$x=7b+ky$





$\cancel{\rho_1=\left|\frac{-49b}{\sqrt{49b^2+k^2}}\right|\ \left|\frac{49b}{\sqrt{49b^2+k^2}}\right|<3}$

$\cancel{\rho_2=\left|\frac{-21b}{\sqrt{49b^2+k^2}}\right|<2}$

$ky-x+7b=0$

$\rho_1=\left|\frac{-7k+7b}{\sqrt{k^2+1}}\right|<3$

$\rho_2=\left|\frac{-3k+7b}{\sqrt{k^2+1}}\right|<2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $ab \,\vdots\, 2^7 3^{11} 5^{14}$

$bc \,\vdots\, 2^{13} 3^{15} 5^{18}$

$ac \,\vdots\, 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

$abc \min - ?$

$(abc)^2 \,\vdots\, 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$

$(abc)^2 = k \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} \quad k \in N$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \cdot \sqrt{15k}$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \cdot 3 \cdot 5$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

$15k = n^2$

$k \,\vdots\, 3$

$k \,\vdots\, 5$

$\cancel{k=15}$

$k = 25$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \cdot \sqrt{15k}$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{43} \cdot 3$

$2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

$k = 5^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot \ell$

$15k = 5^{\alpha+1} 3^{\beta+1} \cdot \ell$

$\frac{\alpha+1}{2} \geq 6 \quad \alpha \geq 11$

$\alpha = 11, \beta = 1, \ell = 1$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot q_1$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot q_2$

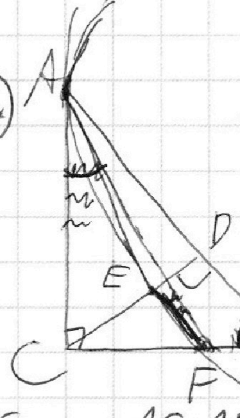
$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot q_3$

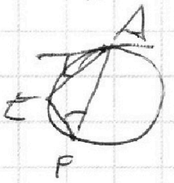
$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 7$

$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$

$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 14$

2)

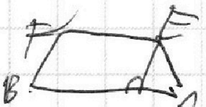




$AB \parallel EF$

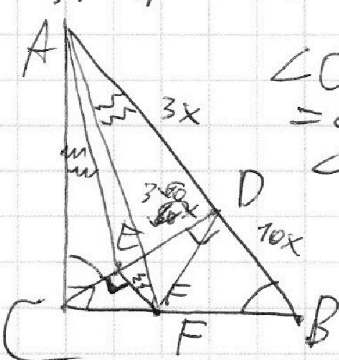
$AB : BD = 1,3$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} - ?$



$AB = 13x$

$BD = 10x$



$\angle CAE = \angle EFA = \angle FAB$

$\angle ACD = \angle CBA$

$\angle AED = \angle AFC$

$\triangle ADE \sim \triangle ACF$

$\frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{FC}{DE}$

$\triangle ACE \sim \triangle ABF$

$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BF}$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{AC \cdot AD}{CF \cdot CE}$

$\frac{CF}{BC} = \frac{CE}{CD}$

$\frac{CF}{CE} = \frac{BC}{CD}$

$CF = \frac{BC}{CD} \cdot CE$

$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BC - CF}$

$\triangle ACF \sim \triangle ADE$

$\frac{AC}{AD} = \frac{CF}{DE} = \frac{AF}{AD}$

$\frac{AC}{CF} = \frac{AD}{DE}$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{AC \cdot AD \cdot CD}{CE^2 \cdot BC}$

$AC \cdot BC - AC \cdot CF = AB \cdot CE \,|: CE$

$\frac{AC \cdot BC}{CE} - AC \frac{BC}{CD} = AB; \quad AB + \frac{AC \cdot BC}{CD} = \frac{AC \cdot BC}{CE}$

$\frac{AB}{AC \cdot BC} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{CE}$