



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-16;80)$ ,  $Q(2;80)$  и  $R(18;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Число  $a$ :  $a = 2^{\alpha_a} \cdot 3^{\beta_a} \cdot 5^{\gamma_a}$

$b$ :  $b = 2^{\alpha_b} \cdot 3^{\beta_b} \cdot 5^{\gamma_b}$

$c$ :  $c = 2^{\alpha_c} \cdot 3^{\beta_c} \cdot 5^{\gamma_c}$ , Тогда  $abc = 2^{(\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c)} \cdot 3^{(\beta_a + \beta_b + \beta_c)} \cdot 5^{(\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c)}$

1) Достаточно, чтобы числа разлагались только на эти 3 простых числа, так как если бы было число  $a'$ , которое содержало простой множит. ( $\neq 2, 3, 5$ ), то мы всегда бы нашли  $a$ , которое меньше, не содержащий "лишних" простых множ., при этом умнож. произв.  $abc$ , и которое не влияло бы на делимость.

2) Простые множители независимы, поэтому можно отдельно рассматривать (2), (3), (5) и их степени.

$$\begin{cases} \alpha_a + \alpha_b \geq 8 \\ \alpha_b + \alpha_c \geq 12 \\ \alpha_a + \alpha_c \geq 14 \end{cases} \begin{cases} "+" \\ "+" \end{cases} \rightarrow 2(\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c) \geq 34 \Rightarrow \alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq 17$$

(минимально возможный вариант, иначе одной из пар не хватало бы "2")

Пример:  $\alpha_a = 5$ ;  $\alpha_b = 3$ ;  $\alpha_c = 9 \Rightarrow \Sigma \alpha = 17$

$$\begin{cases} \beta_a + \beta_b \geq 14 \\ \beta_b + \beta_c \geq 20 \\ \beta_a + \beta_c \geq 21 \end{cases} \rightarrow 2(\beta_a + \beta_b + \beta_c) = 55 \Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c = 27,5$$

Но у нас числа натуральные  $\Rightarrow$  не может быть дробных степеней  $(\beta_a, \beta_b, \beta_c) \Rightarrow \min(\beta_a + \beta_b + \beta_c) = 28$

Пример:  $\beta_a = 8$ ;  $\beta_b = 6$ ;  $\beta_c = 14 \Rightarrow \Sigma \beta = 28$

$$\begin{cases} \gamma_a + \gamma_b \geq 12 \\ \gamma_b + \gamma_c \geq 17 \\ \gamma_a + \gamma_c \geq 39 \end{cases} \rightarrow \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c \geq 34$$

Пример для 34: ~~...~~  
Так как  $\gamma_a + \gamma_c \geq 39$ , то и вся сумма  $\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c \geq 39$

Пример:  $\gamma_a = 12$ ;  $\gamma_c = 27$ ;  $\gamma_b = 0 \Rightarrow \Sigma \gamma = 39$

Ответ:  $(abc)_{\min} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

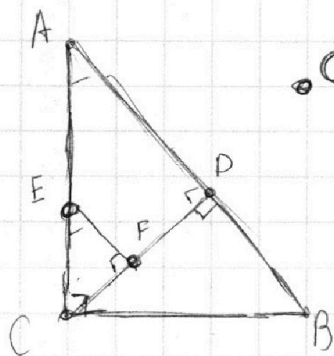
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) EF \parallel AB \Rightarrow \angle BAE = \angle FFC \\ \Rightarrow \angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$$

$$2) \triangle CFE \sim \triangle CDA \text{ (по 2-м угл.)}$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{EF}{AD}$$

$$S_{CFE} = CF \cdot EF \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{CDA} = CD \cdot AD \cdot \frac{1}{2}$$

$$3) S_{CFE} = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 \cdot S_{CDA} \text{ (треуг. подобия)}$$

$$4) S_{ADC} = \frac{5}{7} S_{ACB}, \text{ т.к. } \frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}, \text{ а } CD \text{ — общ. высота.}$$

$$\Rightarrow S_{CFE} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 \cdot \frac{7}{5} = S_{CDA} \cdot \left(\frac{CD}{CF}\right)^2 \cdot S_{CFE} = \frac{5}{7} S_{ACB}$$

$$\frac{S_{CFE}}{S_{ACB}} = \left(\frac{CD}{CF}\right)^2 \cdot \frac{7}{5};$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

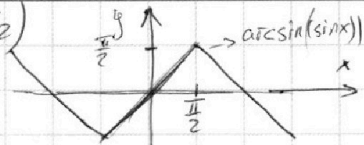


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



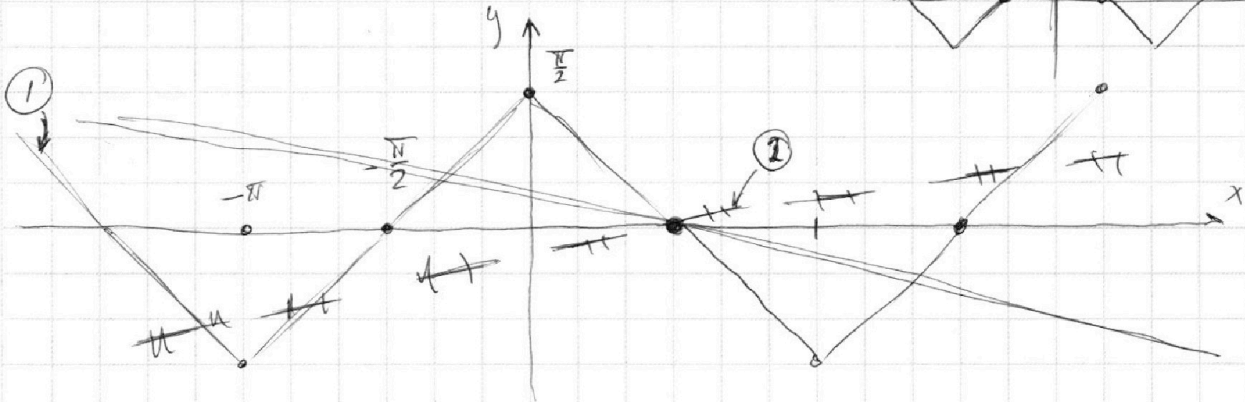
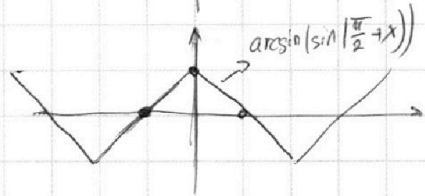
$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

(мет  $\pi/2$ )



~~$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \pi - 2x;$$~~

$$① \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x \quad ②$$



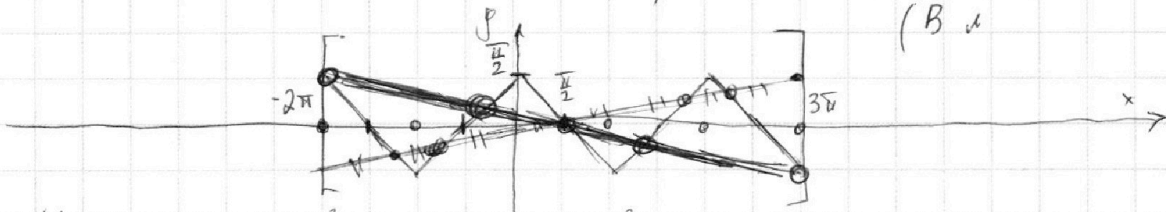
$$②: \text{Прямая с этой точкой вращения } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{10} - \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2}}{10} = 0\right)$$

и коэф.  $(-\frac{2}{10}) = k$  у прямой.

Найдем ограничения для  $x$ :  $1) \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x > -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2} > \frac{2}{10}x \Rightarrow (x < 3\pi)$

$$2) \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x = \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2} < \frac{2}{10}x; \Rightarrow (-2\pi < x) \Rightarrow x \in [-2\pi; 3\pi]$$

(В.д)



Из графика видно, что уравнение имеет 5 решений, найдем их.

$$1) \begin{cases} y = \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x \\ y_1 = -x - \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x = -x - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{8}{10}x = -\frac{16\pi}{10}; \frac{8}{10}x = -\frac{16\pi}{10}; \Rightarrow \begin{cases} x = -2\pi \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

~~$$2) \begin{cases} y_2 = x + \frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{12}{10}x = -\frac{4\pi}{10}; \frac{12x}{10} = -\frac{4\pi}{10}; \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4\pi}{12} \\ y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$~~

$$2) \begin{cases} y = x + \frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{10}x + \frac{\pi}{10} \\ \frac{12}{10}x = \frac{\pi}{10} - \frac{5\pi}{10} \\ \frac{12x}{10} = -\frac{4\pi}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4\pi}{12} \\ y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Из графика;  $(x = \frac{\pi}{2}; y = 0)$

(мис  $\sqrt{2}$ )

4) 
$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x \\ y = x - \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$
$$\frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x = x - \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{12}{10}x = \frac{\pi + 15\pi}{10}, \quad 12x = 16\pi;$$
$$x = \frac{16}{12}\pi, \quad y = \frac{16}{12}\pi - \frac{3}{2}\pi = -\frac{2}{12}\pi = -\frac{1}{6}\pi$$

5) Из графика  $(y = -\frac{\pi}{2}; x = 3\pi)$

Ответ:  $(x = -2\pi; y = \frac{\pi}{2}); (x = \frac{-\pi}{3}; y = \frac{\pi}{6}); (x = \frac{\pi}{2}; y = 0);$   
 $(x = \frac{4}{3}\pi; y = \frac{-1}{6}\pi); (\cancel{x = 3\pi}; y = \frac{-\pi}{2})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



• Нарисовать систему:

$$2) ax - 3y + 4b = 0$$

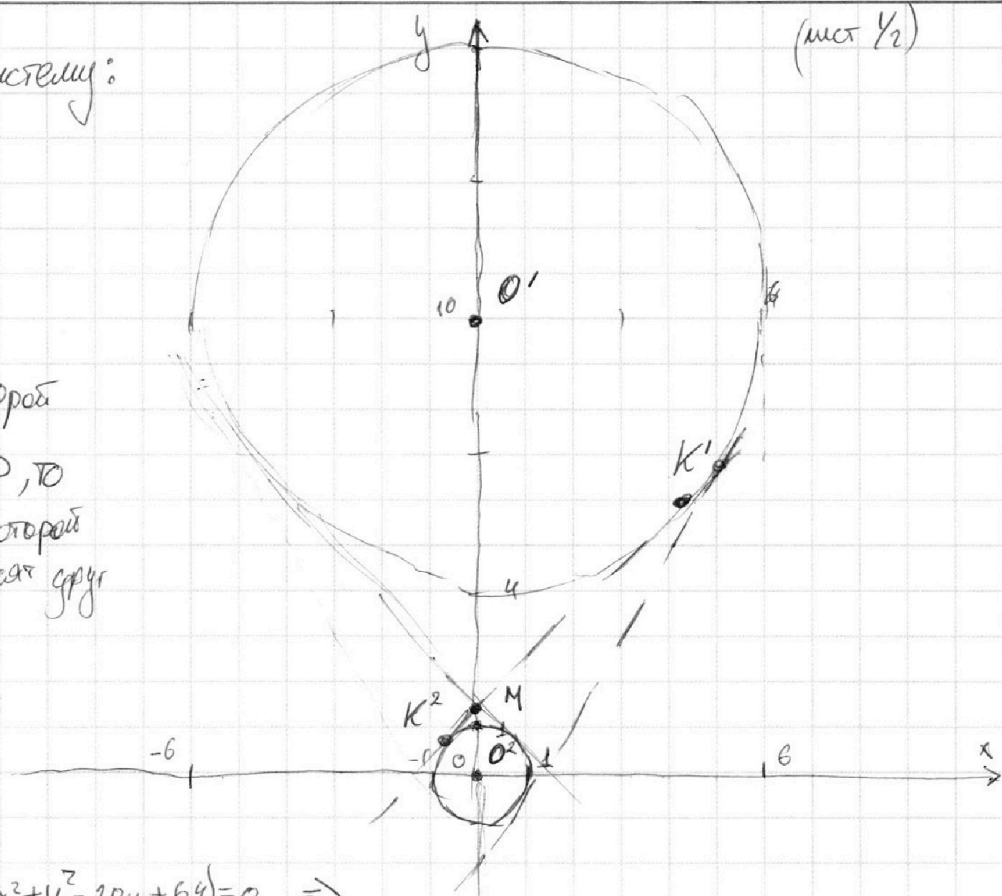
$$\frac{ax + 4b}{3} = y$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

- Прямая, у которой

$$k = \frac{a}{3}, b' = \frac{4}{3}b, \text{ то}$$

это прямая, у которой  $k$  и  $b'$  не зависят друг от друга.



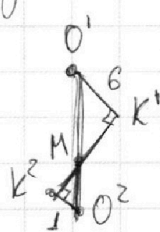
$$1) (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 20y + 100 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - \text{Окр. с центром } (0, 0) \text{ } R=1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 - \text{Окр. с ц. } (0, 10) \text{ } ; R=6 \end{cases}$$

• Вернемся к прямой; (Ещё все симм. отн. ОУ, логично для отрезка  $(\frac{a}{3})$  будет оциф.)  
• Пока в расчётах  $k \neq 0$

Найдём общую касательную к окружностям. (Есть внешн. и внутр.)

1) Внутр.



$$\Delta O'K'M \sim \Delta O''K''M \quad \left( \begin{array}{l} \angle O'K'M = \angle K''O'' = 90^\circ \\ \angle K''M O'' = \angle K'M O' \text{ (верт.)} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{O'M}{O''M} = \frac{O'K'}{O''K''} = \frac{6}{1} = 6; \quad O'M = 6 O''M$$

$$\text{При этом } O'O'' = 10; \Rightarrow 7 O''M = 10; \quad O''M = \frac{10}{7}$$

$$O'M = \frac{60}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

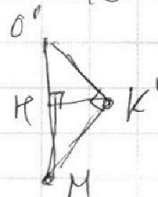


• Возьмем  $T.M$  и проведем касательные к большой окр. (мех  $\frac{1}{2}$ )

$y_k = k^k x + b^k$ ; каждый коор

$MK^1 = \sqrt{MO'^2 - O'K'^2} = \sqrt{\frac{3600}{49} - 36} = \sqrt{\frac{36 \cdot 100 - 36 \cdot 49}{49}} = \sqrt{\frac{36 \cdot 51}{49}}$

• Опустим из  $T.K^1$  перп. на  $O'M \Rightarrow$



$\Rightarrow K'H \cdot O'M = MK^1 \cdot O'K^1$  (S. прямоуг.)

$K'H = \frac{MK^1 \cdot O'K^1}{O'M} = \frac{\frac{6}{7} \sqrt{51} \cdot 6}{\frac{60}{7}} = \frac{36}{60} \sqrt{51}$ ;  $\rightarrow$  Коорд  $K^1$  ( $\frac{6}{10} \sqrt{51}$ ;  $y_{k^1}$ ) (по x)

• Так как треугол подобны, но  $K^1$  и  $K^2$  по разные стороны от  $OX \Rightarrow$   $K^2$  ( $-\frac{\sqrt{51}}{10}$ ;  $y_{k^2}$ ) (знак по x в 6 раз меньше  $k=6$  и с противоп. знаками)

$y_{k^2} = \sqrt{1 - \frac{51}{100}} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10}$ ;  $K^2$  ( $-\frac{\sqrt{51}}{10}$ ;  $\frac{7}{10}$ )

• Построим уравнение прямой;  $y = k^k x + b^k$

$T.K^2 \left\{ \begin{aligned} \frac{7}{10} &= k^k \cdot \frac{-\sqrt{51}}{10} + b^k \\ \frac{10}{7} &= b^k \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{7}{10} - \frac{10}{7} = k^k \cdot \left( \frac{-\sqrt{51}}{10} \right); \frac{49 - 100}{70} = \frac{-\sqrt{51}}{10} k^k$

$\frac{-51 \cdot 10}{-\sqrt{51} \cdot 70} = \frac{-\sqrt{51}}{7} = k^k$

2) Внешн. касательная, у нее  $k^k$  всегда будет входить в рашки внутр.

(видно из рисунка, что  $|k^k_{\text{внеш}}| \geq |k^k_{\text{внутр}}|$ )

• Внутр. касательная оптимальна (она является границей), т.к. если  $k^k$  будет меньше, то тогда 4 решений не будет (т.к. прямая уже не будет касаться какой-нибудь из окр.  $\Rightarrow$  реш.  $< 4$ )

• Если  $k^k$  больше, то всегда будет 4 реш.;  $k^k = \frac{a}{3}$ ;  $a = 3k^k = 3 \cdot \frac{\sqrt{51}}{7}$

Ответ:  $(-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{51}) \cup (\frac{3}{7} \sqrt{51}; +\infty)$  (\* т.к. симм. от  $OY$ )

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(ОДЗ:  $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$ )

~~$\log_5 2x = t$~~   $\log_5 2x = t$ ;  $t^4 - 3 \frac{1}{t} = \frac{1}{\frac{5}{4}t} - 3$ ;  $t^4 - \frac{3}{t} - \frac{4}{3t} + 3 = 0$ ;

$t^4 - \frac{9+4}{3t} + 3 = 0$ ;  $3t^5 - 13 + 9t = 0$ ;  $t \neq 0$  (ОДЗ)

$3t^5 + 9t = 13$ ;  $t(3t^4 + 9) = 13$ ; 1) Если  $t < 0$ , то  $t(3t^4 + 9) < 0 \Rightarrow \times$   
 2) Если  $t > 0$ , то реш. ег., т.к.  $t(3t^4 + 9)$  - монотон. возраст.

$\Rightarrow t$  - ег. реш.  $\Rightarrow x$  - ег. реш.  
 (т.к. они взаимно обратны.) При этом  $t > 1$

2)  $u = \log_5 y$ ;  $u^4 + 4 \cdot \frac{1}{u} = -\frac{3}{u} - 3$ ;  $u^4 + \frac{4}{u} + \frac{1}{3u} + 3 = 0$ ;

$u^4 + \frac{12+1}{3u} + 3 = 0$ ;  $\frac{3u^5 + 13 + 9u}{3u} = 0$ ;  $u \neq 0$  (ОДЗ:  $y > 0, y \neq 1$ )

$3u^5 + 9u = -13$ ;  $3u(u^4 + 3) = -13$ ; 1)  $u > 0 \Rightarrow 3u(u^4 + 3) > 0 \rightarrow \times$   
 2)  $u < 0$  - то реш. ег., т.к.  $3u(u^4 + 3)$  - монот. убыв.

$\Rightarrow u$  - ег. реш.  $\Rightarrow y$  - ег. реш.  
 При этом  $u < -1$

3)  $xy$  - ег. вариант;  $\log_5 2x = t$ ;  $2x = 5^t$ ;  $x = \frac{5^t}{2}$   
 $\log_5 y = u$ ;  $y = 5^u \Rightarrow xy = \frac{5^{t+u}}{2}$

4)  $3(t^5 + u^5) + 9(u+t) = 0$ ;  $3(t^5 + u^5) = -9(u+t)$ ;  $\left(\frac{3}{-9} = \frac{(u+t)}{(u^5+t^5)}\right)$

- обе функции имеют один знак, т.к.  $\left. \begin{matrix} t > 1 \\ u < -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} u+t > 0 \\ \Rightarrow t^5 + u^5 > 0 \end{matrix}$   
 • Но  $u+t < 0$

$\Rightarrow (u+t) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} u+t < 0 \\ \Rightarrow t^5 + u^5 < 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow xy = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$

Ответ:  $xy = \frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

①  $S_{\Delta x} + \Delta y = 45 \Rightarrow \Delta y = y_2 - y_1 : 5$

②  $\Rightarrow 10$  комбинаций  $\Delta x = x_2 - x_1 = 0$   $\Delta y = 45$   
 $\vdots$   $\Delta y = 0$

3) Заметим, что в 17 из 81 строчках присутствуют все ~~22~~ (16+18) чисел. Тогда как в остальных только ~~22~~ (16+18-1)

$\Rightarrow$  ①  $\Delta y = 0; \Delta x = 9 \Rightarrow \left( 17 \cdot C_{34}^9 + (81-17) \cdot C_{33}^9 \right) / 2$  (т.к. порядок важен)

②  $\Delta y = 5; \Delta x = 8 \Rightarrow$  Прямоуг.  $((18-1) \times 5)$  и  $x = 17$ .  
 $17 \cdot C$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
 5   
 6   
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



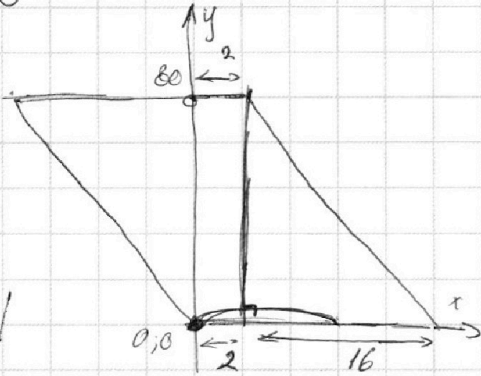
1)  $Sx_2 - Sx_1 + y_2 - y_1 = 4S$ ,  $S\Delta X + \Delta Y = 4S$  Черновик.

$\Rightarrow \Delta y : 5$ , т.к.  $\begin{cases} S\Delta X : 5 \\ 4S : 5 \end{cases}$

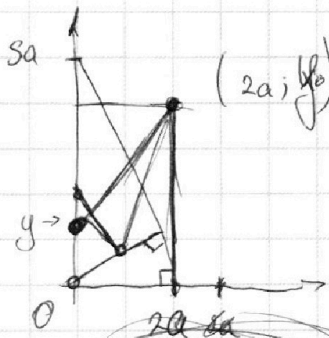
$\Rightarrow \Delta y = 0; \Rightarrow \Delta X = 9;$   
 $\Delta y = 5; \Rightarrow \Delta X = 8$

$\Delta y = 4S; \Rightarrow \Delta X = 0$

40 комбинаций;  
 4



$S = M_0$



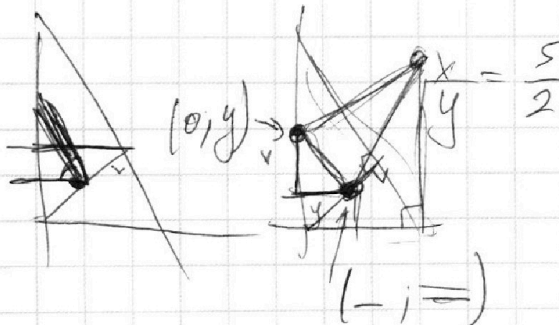
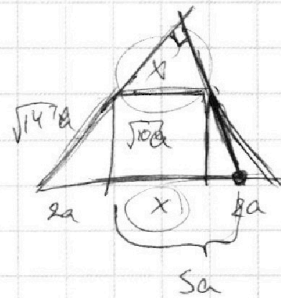
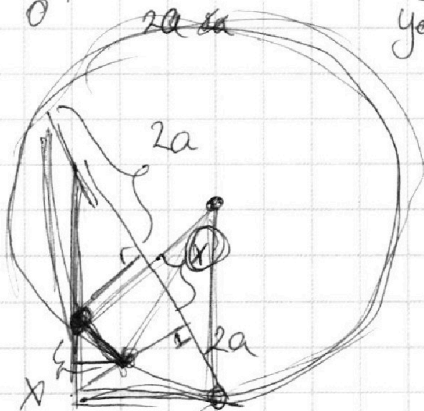
$2a^2 + y_0^2 = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{4a^2 + y_0^2}$

$(x-2a)^2 + (y-y_0)^2 = y_0^2$

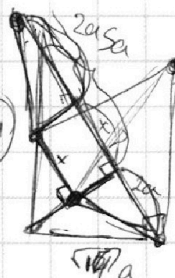
$y_0^2 = (2a)^2 + (y-y_0)^2$

$y^2 - 2yy_0 + 4a^2 = 0$

$y = \frac{2y_0 \pm \sqrt{D'}}{2}$



0, y



$2(0 - \dots) = S(y - \dots)$

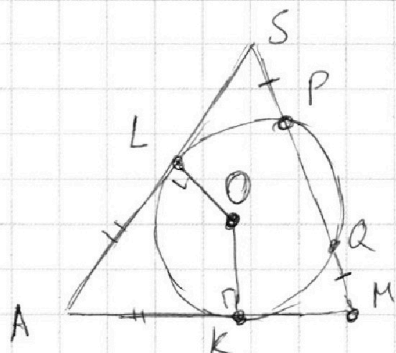
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



а) • Рассмотрим  $(SAM)$

окл  $\cap$  окр  $\cap$  ка

1)  $AS$  и  $AM$  — касат. к шару  $\Rightarrow$

$$AL = AK$$

$$2) SL^2 = SP \cdot SQ = PR \cdot QM = KM^2$$

$\Rightarrow MK = LS$  (касат. и сек. к окр.)

$$3) AS = AM = 16$$

4)  $\Delta A_1B_1C_1$  гомотетичен  $\Delta ABC$  с центром  $M$  гомотетии  $AA_1$  в отн  $2:1$  шот. от верш. ( $M$  —  $\Delta$  пересеч. медиан.)

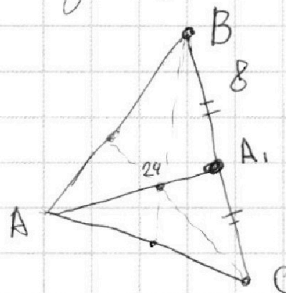
$$\Rightarrow MA' = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \Rightarrow AA' = 24$$

$$5) S_{AB_1C_1} = 100 = \frac{1}{2} \sin \angle AA'B \cdot AA' \cdot BC$$

$$200 = 24 \cdot 16 \cdot \sin \angle AA'B$$

$$\sin \angle AA'B = \frac{25}{48} \quad AB^2 = AA_1^2 + BA_1^2 - 2 BA_1 \cdot AA_1 \cdot \cos \angle AA_1B$$

$$AB^2 = 576 + 64 - 384 \cdot \frac{\sqrt{73 \cdot 23}}{48} = 576 + 64 - 8 \sqrt{73 \cdot 23} = 640 - 8 \sqrt{73 \cdot 23}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



**N5**  $\log_5^4(2x)$   $\log_5 2x = t$ ;  $t^4 - 3\frac{1}{t} = \frac{1}{\frac{3}{4}t} - 3$ ;  $t^4 - \frac{3}{t} - \frac{4}{3t} + 3 = 0$

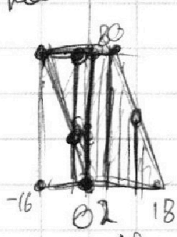
$t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0$ ;  $3t^5 - 13 + 9t = 0$ ;  $t \neq 0$ ;  $t + \frac{1}{2}$

$3t^5 + 9t - 13 = 0$ ;  $t = 1$ ;  $3 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 - 13$

$t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0$ ;  $1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3$

$t(t^4 + 3) = \frac{13}{3}$ ;  $t(\frac{t^4}{3} + 1) = \frac{13}{3}$

**N6**; куб



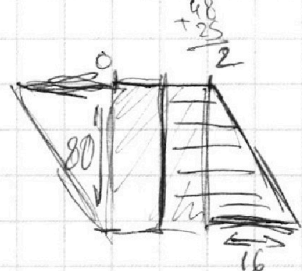
$\frac{48}{25}$

$5x_2 + 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ ;  
 $5\Delta x + \Delta y = 45$ ;  
 $\Delta x + \frac{\Delta y}{5} = 9$ ;

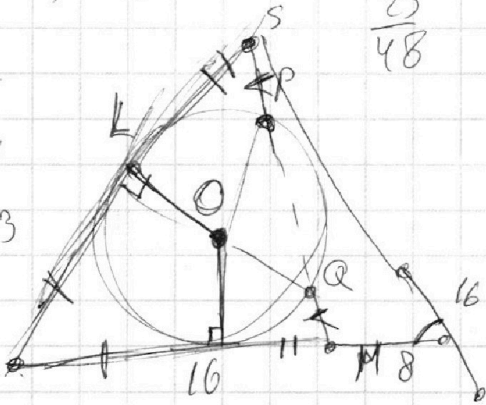
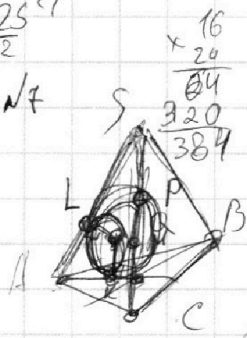
$\frac{100}{24 \cdot 16} = \frac{100}{12 \cdot 16}$

$\frac{100}{8 \cdot 16} = \frac{50}{3 \cdot 16}$

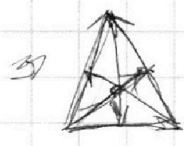
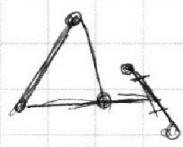
$\frac{25}{48}$



$\sqrt{\frac{48^2 - 25^2}{48^2}}$



$(AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1)$



$\frac{48}{25} = \frac{48}{25}$

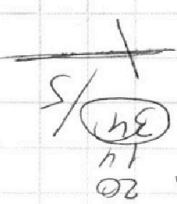
$\sqrt{73 \cdot 23}$

384

$\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

$824$

$5 = p \cdot 1$



37 91

5

91: 08

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{S_1F}{S_1D}\right)^2$$

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{5}{7}$$

$$S_3 = \frac{7}{5} S_2 = \frac{7}{5} \cdot \frac{S_1 D^2}{S_1 F^2} \cdot S_1$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{27}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{27}}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{CF}{CE} = \frac{CE}{EA}$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CE}{EA} \Rightarrow CE^2 = CF \cdot EA$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{27}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{27}}{3}$$

$$\frac{336}{100} = \frac{\sqrt{336}}{10}$$

$DH = CB = CD = DB$   
 $DB \cdot DB = CD \cdot CD$   
 $AD \cdot DB = CD \cdot DB$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

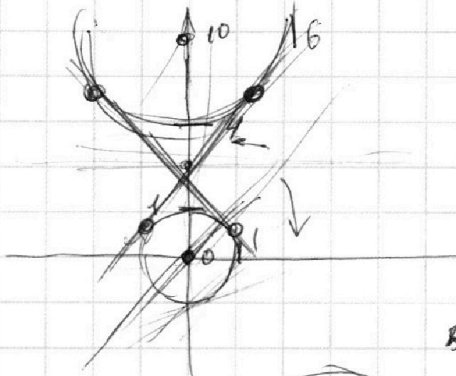
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



√4



$$x^2 + y^2 - 20y + 100 = 36$$

$$x^2 + (y-10)^2 = 6^2$$

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$ax = 3y; \quad \frac{ax}{3} = y;$$

$$\frac{ax + 4b}{3} = y;$$

$$\frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b = y$$

$$625 = 5^4, \quad 8x^3 = (2x)^3$$

NS;

$$\log_5 2x = t; \quad (2x > 0)$$

$$2x \neq 1$$

$$x \neq \frac{1}{2}$$

$$\log_5 t^4 - 3 \frac{1}{t} = \frac{4}{3} \frac{1}{t} - 3$$

$$t^4 + 4 \frac{1}{t} = \frac{1}{3} t^4 - 3$$

$$\log_5 y = u; \quad \frac{1}{5} = 0,2$$

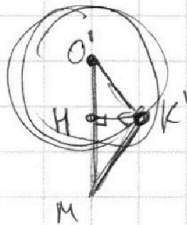
$$u^4 + \frac{4}{u} + \frac{3}{u} \neq 3 = 0;$$

$$u^5 + 12 + 3u = 0$$

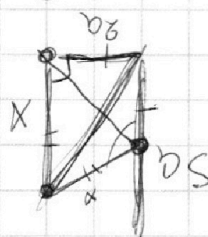
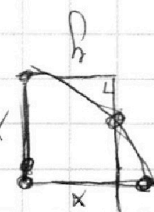
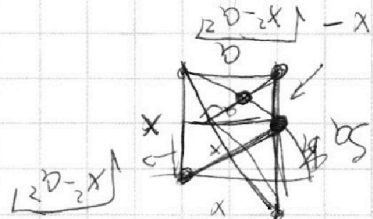
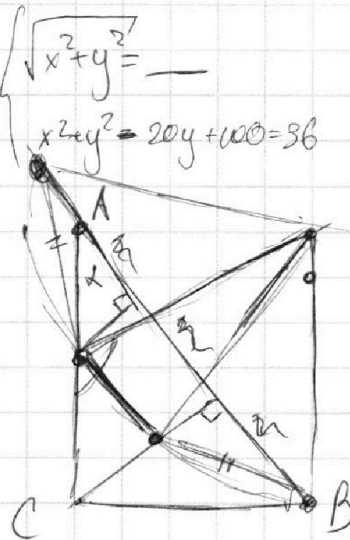
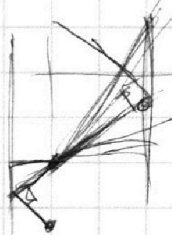
$$u \neq 0$$

$$\frac{4}{u} + \frac{3}{u} \geq 2 \sqrt{\frac{12}{u^2}} = \frac{2\sqrt{12}}{u}$$

u - неопределено?



$$K'H = O'M = O'K' = MK'$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$abc = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot c$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$\begin{cases} x_B + x_C = 12 \\ x_A + x_C = 14 \\ x_A + 2x_B = 8 \\ x_A + x_B + x_C \rightarrow \min \end{cases}$$

$$5+3 = 8$$

$$3+9 = 12$$

$$0+5 = 5$$

$$4+20+21 = 34+21 = 55$$

$$14 = \frac{1}{2} + 13\frac{1}{2}$$

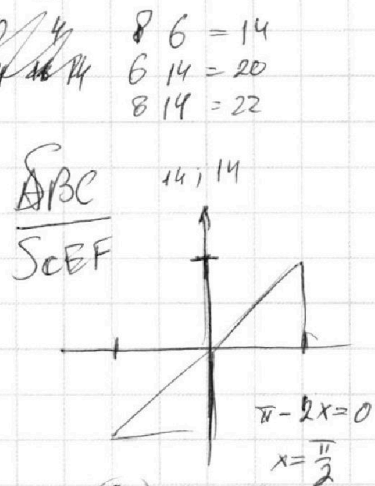
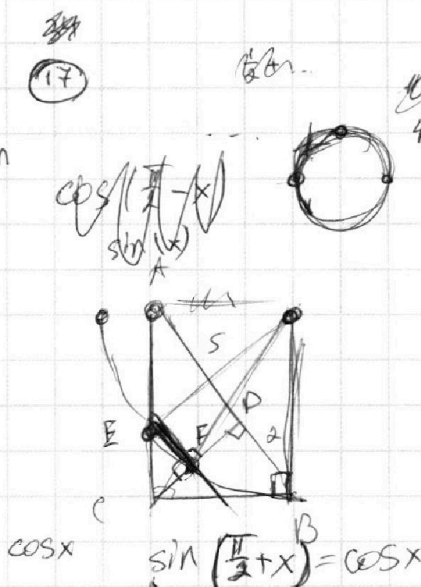
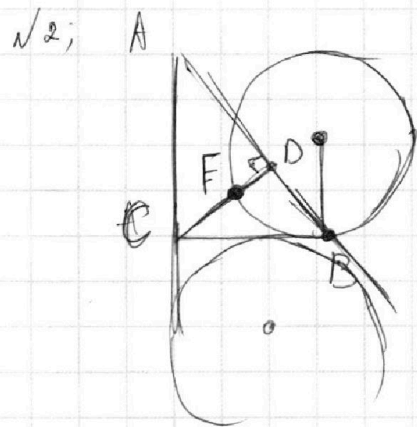
$$27,5 - ?$$

$$50$$

$$18$$

$$68$$

$$34$$



$$\frac{12}{8} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$10\sqrt{1-x^2} = \pi - 2x$$

$$\begin{cases} 100(1-x^2) = \pi^2 + 4x^2 - 4\pi x \\ \pi > 2x \end{cases}$$

$$100 - 100x^2 = \pi^2 + 4x^2 - 4\pi x$$

$$x > \frac{\pi}{2}$$

$$x < \frac{\pi}{2}$$

$$x \cdot \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2}$$

$$x \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} > x$$

$$x < \frac{\pi}{2}$$

$$x \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < x \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{9}{F} = \frac{9}{C-8} = \frac{2}{3} - \frac{8}{n}$$

