МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} a\cdot b \vdots 2^{9}\cdot 3^{10}\cdot 5^{10} \\ a\cdot c \vdots 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30} \\ bc \vdots 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13} \end{cases}$$ $\min(a\cdot b\cdot c)$ - ? $(* a,b,c\in\mathbb{N})$

Решение:

- Т.к. $ac \vdots 5^{30}$, $ab \vdots 5^{10}$, $bc \vdots 5^{13}$, $30 > 13+10 \Rightarrow abc \vdots 5^{30}$,

$\min(abc) \not\vdots 5^{31}$.

- $\exists\, a_2, b_2, c_2$ такие, что $a \vdots 2^{a_2}$, $b \vdots 2^{b_2}$, $c \vdots 2^{c_2}$,

$a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N}$; $\begin{cases} a_2+b_2 \geq 9 \\ a_2+c_2 \geq 19 \\ b_2+c_2 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \Big| 2(a_2+b_2+c_2) \geq 42 \Rightarrow a_2+b_2+c_2 \geq 21.$

$\min(a\cdot b\cdot c) \vdots 2^{\min(a_2+b_2+c_2)} \Rightarrow \min(abc) \vdots 2^{21}$.

- $\exists\, a_3, b_3, c_3$ такие, что $a \vdots 3^{a_3}$, $b \vdots 3^{b_3}$, $c \vdots 3^{c_3}$,

$a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_3+b_3 \geq 10 \\ a_3+c_3 \geq 18 \\ b_3+c_3 \geq 13 \end{cases} \Rightarrow a_3+b_3+c_3 \geq 20{,}5$;

$a_3+b_3+c_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow a_3+b_3+c_3 \geq 21$.

$\min(abc) \vdots 3^{\min(a_3+b_3+c_3)} \Rightarrow \min(abc) \vdots 3^{21}$,

Тогда $\min(abc) = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

Ответ: $\min(abc) = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

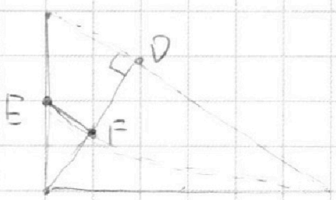
Дано: $\triangle ABC$ - прям. треуг.

$\angle C = 90^\circ$; $CD \perp AB$;

Окр. $\cap$ $BC = B$; BC - кас. окр.

Окр. $\cap$ $CD = F$, Окр. $\cap$ $AC = E$

$EF \parallel AB$, ~~Да~~ $AD : DB = 3 : 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5}{2}\pi - 5\arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$,

$x + 5\arccos(\cos x) = 2\pi$;

$* \ \exists\, \alpha \in [0;\pi],\ k \in \mathbb{Z},$

$x = \alpha + 2\pi k \Rightarrow \arccos(\cos x) = \alpha$

$x = -\alpha + 2\pi k \Rightarrow \arccos(\cos x) = \alpha$.

$\cancel{\alpha + 2\pi k}\ \exists\ x = \alpha + 2\pi k$:

$\begin{cases} \alpha + 2\pi k + 5\alpha = 2\pi \\ \alpha \in [0;\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\alpha + 2\pi k = 2\pi \\ \alpha \in [0;\pi] \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{3}(1-k) \\ \alpha \in [0;\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \frac{\pi}{3}(1-k) \\ \pi \ge \frac{\pi}{3}(1-k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \le 1 \\ k \ge -2, \end{cases}$

$x \in \left\{ \frac{\pi}{3}(1-1) + 2\pi;\ \frac{\pi}{3}(1-0) + 0;\ \frac{\pi}{3}(1+1) - 2\pi,\ \frac{\pi}{3}(1+2) - 4\pi \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left\{ 2\pi;\ \frac{\pi}{3};\ -\frac{4\pi}{3},\ -3\pi \right\}$

$\exists\ x = -\alpha + 2\pi k$:

$\begin{cases} -\alpha + 2\pi k + 5\alpha = 2\pi \\ \alpha \in [0;\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{4}(2\pi k - 2\pi) \\ \alpha \in [0;\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2}(-k+1) \\ \alpha \in [0;\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}(-k+1) \ge 0 \\ \frac{\pi}{2}(-k+1) \le \pi \end{cases}$

$\begin{cases} k \ge -1 \\ k \le 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}(1-1) + 2\pi;\ -\frac{\pi}{2}(0+1) + 0;\ -\frac{\pi}{2}(1+1) - 2\pi \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{x \in \left\{ 2\pi,\ \frac{9}{2}\pi,\ 7\pi \right\}}\ x \in \left\{ 2\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ -3\pi \right\}$

Ответ: $x \in \left\{ -3\pi;\ -\frac{4}{3}\pi;\ -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{3};\ 2\pi \right\}$

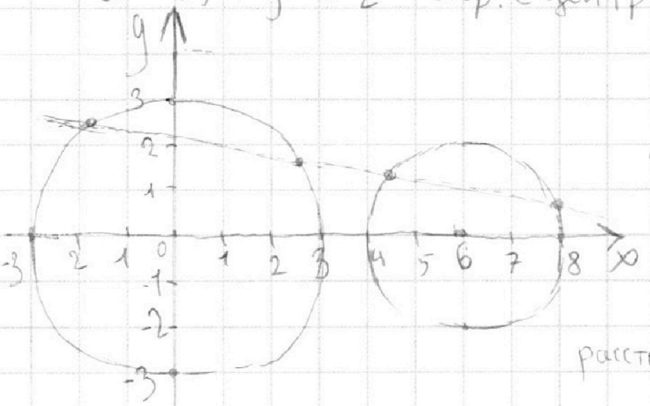
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$ $\quad a, \cancel{b} - ?: \exists b: \exists! 4$ реш.

$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & \text{— прямая} \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \text{ — Окр с центром } (0;0) \text{ и } R=3 \\ (x-6)^2+y^2=2^2 \text{ — Окр. с центром } (6;0) \text{ и } R=2. \end{array}\right. \end{cases}$



4 разл. реш. будут только, если прямая пересечёт обе окр. в двух точках. Значит, расстояние от их центров до прямой должно быть меньше длин их радиусов $\left(\text{*расстояние } d = \left|\frac{ax_0+2y_0-3b}{\sqrt{a^2+4}}\right|\right)$

$\begin{cases} ① \left|\frac{-3b}{\sqrt{a^2+4}}\right| < 3 \\ ② \left|\frac{6a-3b}{\sqrt{a^2+4}}\right| < 2 \end{cases}$, ① : $\left|\frac{-3b}{\sqrt{a^2+4}}\right| < 3 \Rightarrow \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+4}}\right| < 1 \Rightarrow b \in (-\sqrt{a^2+4}; +\sqrt{a^2+4})$.

② $\left|\frac{6a-3b}{\sqrt{a^2+4}}\right| < 2 \Rightarrow \begin{cases} 6a-3b < 2\sqrt{a^2+4} \\ 6a-3b > -2\sqrt{a^2+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \\ b < 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \end{cases}$

$\begin{cases} b \in (-\sqrt{a^2+4}; +\sqrt{a^2+4}) \\ b \in (2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}; 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}) \end{cases} \Rightarrow (-\sqrt{a^2+4}; +\sqrt{a^2+4}) \cap (2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}; 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}) \neq \varnothing$

$\begin{cases} \sqrt{a^2+4} > 2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \\ -\sqrt{a^2+4} < 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+4} > \frac{3\cdot 2}{5}a \\ \sqrt{a^2+4} > -\frac{3\cdot 2}{5}a \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<0 \\ a^2+4 > \frac{36}{25}a^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a>0 \\ a^2+4 > \frac{36}{25}a^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<0 \\ a^2 < \frac{100}{11} \end{cases} \\ \begin{cases} a>0 \\ a^2 < \frac{100}{11} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases}(\log_3 x)^4 + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ 4(\log_3 5y)^4 + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8\end{cases}$$

$x \cdot y = ?$

ОДЗ:
$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq 1 \\ 5y \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases}(\log_3 x)^4 + 6\frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2}\cdot 5\,\frac{1}{\log_3 x} - 8 \\ (\log_3 5y)^4 + 2\frac{1}{\log_3 5y} = \frac{1}{2}\cdot 11\,\frac{1}{\log_3 5y} - 8\end{cases}$$

$]\ b = \log_3 x,\quad a = \log_3 5y$

$$\begin{cases} b^4 + 6\frac{1}{b} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{b} - 8 \\ a^4 + 2\frac{1}{a} = \frac{11}{2}\cdot\frac{1}{a} - 8\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b^5 + 16b + 7 = 0 \\ 2a^5 + 16b - 7 = 0 \\ a, b \neq 0\end{cases}$$ многочлены 5-ой степени $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists$ реш.

$]\ b_0$ – реш. $2b^5 + 16b + 7 = 0$. Тогда при $a = -b_0$:

$2a^5 + 16a - 7 = -(2b_0^5 + 16b_0 + 7) = -0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -b_0$ – реш. $2a^5 + 16a^5 - 7$. ($]\ a_0 = -b_0$, это реш.)

$a_0 = -b_0 \Rightarrow \log_3 5y = -\log_3 x \Rightarrow \log_3 5y = \log_3 \frac{1}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{\log_3 5y} = 3^{\log_3 \frac{1}{x}} \Rightarrow 5y = \frac{1}{x} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$.

$^*\ (2b^5 + 16b + 7)' = 10b^4 + 16 > 0\ \forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists!$ реш. $2b^5 + 16b + 7 = 0$

$^*\ (2a^5 + 16a - 7)' = 10a^4 + 16 > 0\ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists!$ реш. $2a^5 + 16a + 7 = 0$.

Т.к. a_0, b_0 – ед. реш., то $xy = \frac{1}{5}$ – ед. возможное значение.

Ответ: $xy = \frac{1}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Дано:
Вершины парал.: $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$, $R(20,0)$

$OPQR \in A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $3(x_2-x_1)+y_2-y_1=33$,

Найти: n - кол-во пар $(A;B)$; $(*x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z})$.

Решение:
$OPQR$ - парал., $OP=20$, высота $OPQR$ (в дальнейшем h) $=42$.

$x_2-x_1 \in [-34;34]$, $y_2-y_1 \in [-42,42]$

$y_2-y_1 = 3(11-(x_2-x_1)) \in [-42;42] \Rightarrow (x_2-x_1 \Rightarrow)$

$\Rightarrow -14 \leq 11-(x_2-x_1) \leq +14 \Rightarrow -14 \leq x_2-x_1-11 \leq 14 \Rightarrow x_2-x_1 \in [-3,25]$

При $x_2-x_1 \in [-3,20]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$;

$\frac{5}{2}\pi - \arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$x + \arccos(\cos x) = 2\pi$

$\exists\ \alpha \in [0;\pi]$; $k \in \mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2\pi k \Rightarrow \arccos(\cos x) = \alpha \\ \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -\alpha + 2\pi k \Rightarrow \arccos(\cos x) = \alpha \end{array}\right.$

* $x = -\alpha + 2\pi k$:

$-\alpha + 2\pi k + \alpha = 2\pi \Rightarrow 2\pi k = 2\pi \Rightarrow k = 1.$;

$x \in [2\pi \cdot 1 - \pi;\ 2\pi - 0] \Rightarrow x \in [\pi; 2\pi]$;

* $x = \alpha + 2\pi k$:

$\alpha + 2\pi k + \alpha = 2\pi \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \pi k = \pi \\ \alpha \in [0, \pi] \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha = \pi \\ k = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha = 0 \\ k = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 0 \\ x = 0 + 2\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi \\ x = 2\pi \end{array}\right.$;

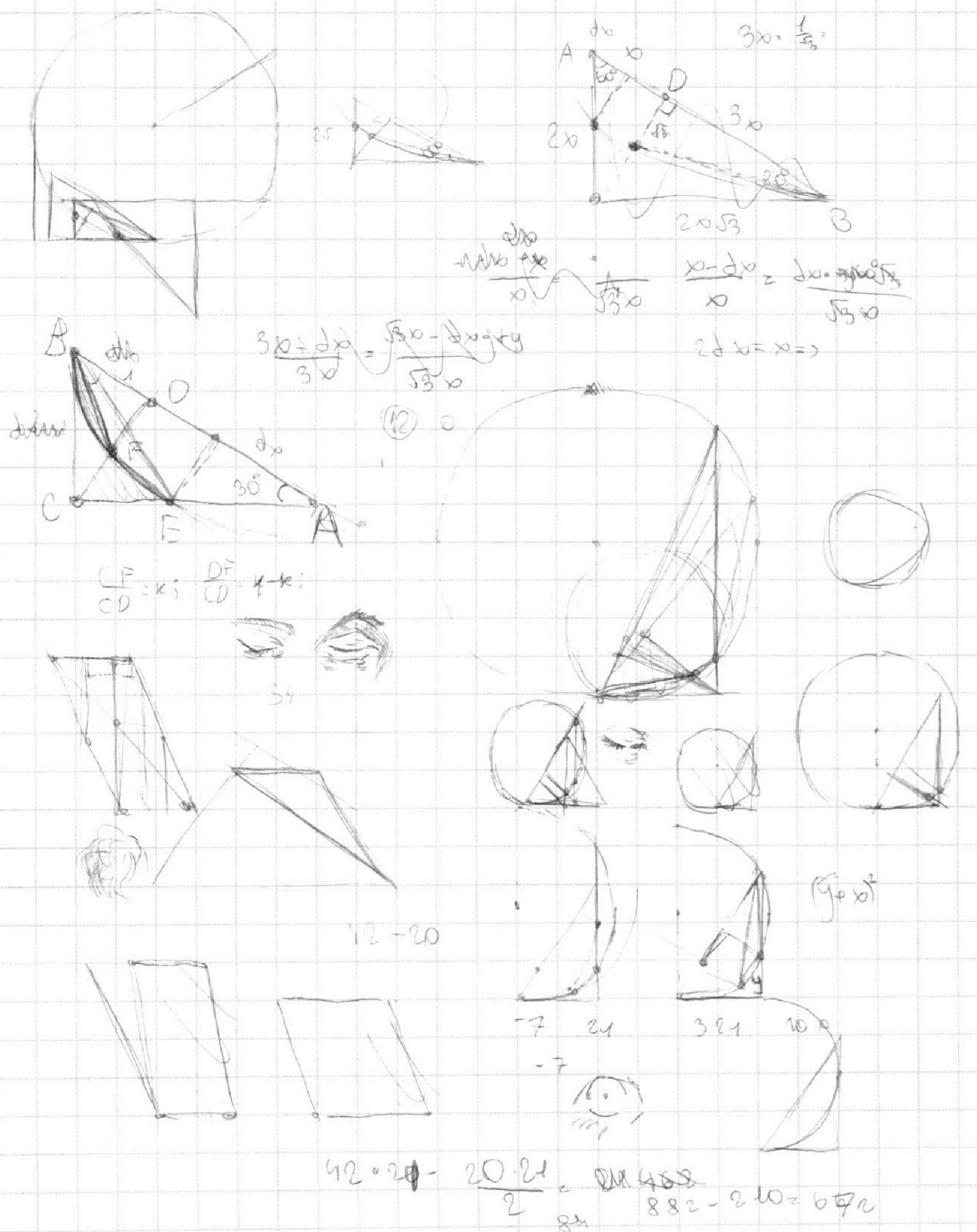
Ответ: $x \in [\pi; 2\pi]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $\begin{cases} a+b=10 \\ a+c=30 \\ b+c=13 \end{cases}$ $c-b=20$, $c+b=13$ $\Rightarrow$ $b=7$, $c=$, $a=$

$\arcsin\cos x = x$

$\frac{5}{2}\pi - \arccos\cos x = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5}{2}\pi - x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = 2\pi \Rightarrow x = \pi$

№5

$\log_5^4 x \quad t^4 + \frac{6}{t} = \frac{1}{2}\cdot 5 \cdot \frac{1}{t} - 8$ $\quad a^4 + 2\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\cdot 11\frac{1}{a} - 8$

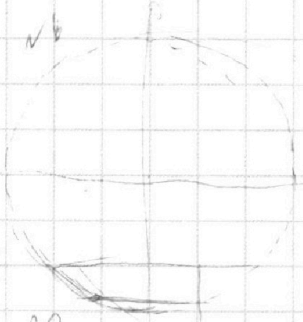
$t^5 + 3{,}5 + 8t = 0$ $\quad 2a^5 + 16a - 7 = 0$

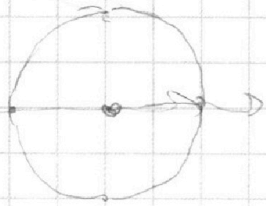
$2t^5 + 16t + 7 = 0$ 42 21

$\log_{y_3} x = -\log_{y_3} 5y$

$x = \frac{1}{5y} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$

№6





$y_1 - y_2 = 3(11 - (x_1 - x_2))$ $\quad y = -\frac{a}{2}x + 3b$ $\quad (x-6)^2 + y^2 - 4$

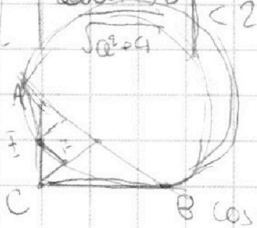
$ax + 2y - 3b = 0$

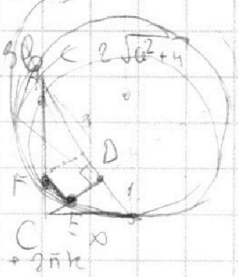
$\left\{ \frac{3b}{\sqrt{a^2+4}} \right| < 3$ $\quad \left| \frac{6a+3b}{\sqrt{a^2+4}} \right| < 2$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{3b}{\sqrt{a^2+4}} < 3 \\ \frac{3b}{\sqrt{a^2+4}} > -3 \end{cases}$

$\sqrt{a^2+4}$ $\frac{-3b}{a}$ < 3 $\quad c+b$

$a+c-10 \geq$

$|6a+3b| < 2\sqrt{a^2+4}$





11

$\begin{cases} a+b \geq 10 \\ a+c \geq 30 \\ b+c \geq 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 16{,}5 \\ b = -3{,}5 \\ a = 13{,}5 \end{cases}$ $\quad \cos x = t$

$x = \pm\arccos t + 2\pi k$

$-a-b \leq -10$

$a+c \geq 30$ $\quad \frac{11}{2\sqrt{5}} a^2 \leq 4 \Rightarrow$

$a+c+10 \geq -a-b$

$2(a+b+c) \geq 53$ $\Rightarrow$ $a^2 \leq$

$(a+b+c) \geq 26{,}5 \Rightarrow 2\geq$

$a+b \geq 10$

$a+c \geq 30$ $\quad x = \alpha + 2\pi k$

$b+c \geq 13$

$x = \alpha + \pi k$

$3x \quad \frac{5}{4}\pi \; 2\pi - \arccos t = \pm\arccos t + 2\pi k$

$-x$

$2\pi = 2\pi k \Rightarrow x = -\arccos t + 2\pi k$

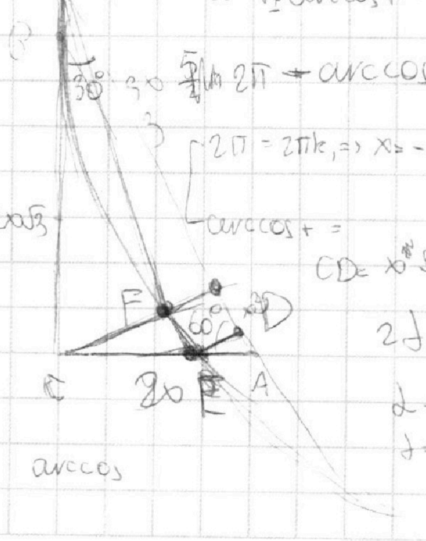
$-\arccos t =$

$CD = x\sqrt{3}$

$2\alpha + 2\pi k = 2\pi$

$\alpha + \pi k = \pi$

$\alpha = \pi$



arccos

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ