



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0.2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

3 степени входят $2 \quad b \quad a = \alpha, \quad b \quad b = \beta, \quad bc = \gamma$

тогда имеем

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 8 & (\text{т.к. } : 2^8) \\ \beta + \gamma \geq 12 & (\text{т.к. } : 2^{12}) \\ \alpha + \gamma \geq 14 & (\text{т.к. } : 2^{14}) \end{cases}$$

аналог.
системе

$$\alpha + \beta + \gamma \geq \frac{8 + 12 + 14}{2} = 17 \text{ - достигается при } \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 9 \end{cases}$$

~~Аналог.~~

переопределим α, β, γ как ст. вхожд 3
тогда имеем

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 14 & \text{аналог.} \\ \beta + \gamma \geq 20 & \Rightarrow \text{системе} \\ \alpha + \gamma \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \geq \frac{14 + 20 + 21}{2} = 7 + 10 + 10,5 = 27,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \geq 28 \text{ достигается при } \begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = 6 \\ \gamma = 14 \end{cases}$$

аналогично переопределим α, β, γ как ст. вхожд 5
имеем:

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 12 \\ \beta + \gamma \geq 17 \\ \alpha + \gamma \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \geq 39 \text{ достигается при } \begin{cases} \alpha = 17 \\ \gamma = 22 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

т.о. $abc: 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$,
рав-во достигается при:

$$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

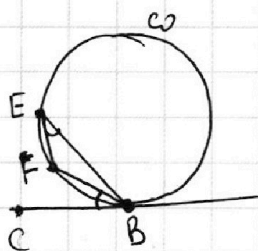
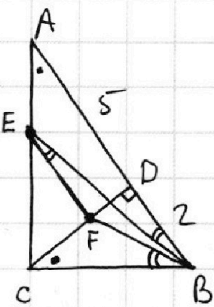
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



обозначим окр-ть ω условием $\omega \cap CB = B$

$$\omega \text{ кас}(CB) \Leftrightarrow \angle FBC \text{ опир на } \perp BF$$

$$\Leftrightarrow \hat{B}EF = \hat{F}BC = \frac{BF}{2}$$

$$\nexists \triangle ABC \quad \hat{F}BC = \hat{B}EF$$

$$\text{по усл } (EF) \parallel (AB) \Rightarrow \hat{F}EB = \hat{E}BA \Rightarrow$$

$$\hat{D}CB = 90^\circ - \hat{B} = \hat{A}$$

$$\Rightarrow \triangle BEA \sim \triangle BFC \quad (\text{по 2м углам}) \quad (*)$$

$$\exists \frac{|CE|}{|CA|} = k$$

$\exists |AD| = 5, |BC| = 2$ (с точностью до отношений можно провести ось координат, т.е. вместо $5x, 2x, x \in \mathbb{R}$ рассм 5 и 2)

$$|CD| = \sqrt{|BD| \cdot |AD|} = \sqrt{10} \quad (\text{св-во прямоуг. } \triangle)$$

$$|CB| = \sqrt{|DB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{4+10} = \sqrt{14}$$

$$|AC| = \sqrt{|BC|^2 + |AD|^2} = \sqrt{25+10} = \sqrt{35}$$

тогда $|CE| = k \cdot |AC| = k\sqrt{35}$

по теор Фалеса: $(EF) \parallel (AD) \Rightarrow \frac{|CF|}{|CD|} = k \left(= \frac{|CE|}{|CA|} \right)$

т.о. $|CF| = k \cdot |CD| = k\sqrt{10}$

$|EA| = |AC| - |CE| = (1-k)\sqrt{35}$

$$(*) \Rightarrow \frac{|EA|}{|CF|} = \frac{|AB|}{|BC|} \Leftrightarrow \frac{(1-k)\sqrt{35}}{k\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{k}-1\right) \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{k}-1\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{k} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

$(EF) \parallel (AD) \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD$ (по углам $\hat{C}EF = \hat{C}AD$ и $\hat{C}FE = \hat{C}DA$)

$$\Rightarrow S_{CEF} = \left(\frac{|CE|}{|CA|}\right)^2 \cdot S_{CAD} = k^2 S_{CAD} = \frac{1}{4} S_{CAD}$$

$$\triangle CAD \sim \triangle ABC \quad (\text{св-во прямоуг. } \triangle) \Rightarrow S_{CAD} = \left(\frac{|AC|}{|AB|}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{35}{49} S_{ABC}$$

т.о. $S_{CEF} = \frac{1}{4} \cdot S_{CAD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{35}{49} S_{ABC} = \frac{35}{196} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{196}{35} = \frac{28}{5}$

Ответ: $\frac{28}{5}$.

Обозн:
 S_{xyz} - площадь
 треуго xyz
 для векторов x, y, z

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \text{Р.у. } 10 \arcsin(\cos x) &= \pi - 2x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) &= \pi - 2x \Leftrightarrow 5\pi - 2 \arccos(\cos x) = \pi - 2x \\ \Leftrightarrow 5\pi - 10 \arccos(\cos x) &= \pi - 2x \end{aligned}$$

$$\arccos(\cos x) = f(x)$$

$$\exists x = 2\pi k + y, \text{ где } y \in [0; \pi]$$

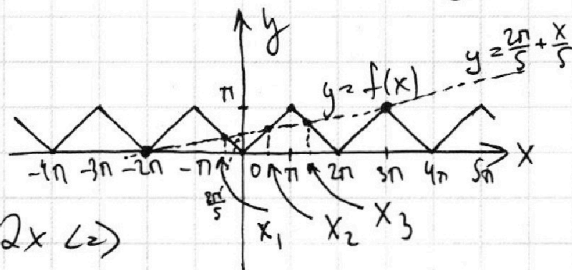
$$\text{тогда } f(x) = \arccos(\cos y) = y$$

$$\exists x = 2\pi k + \pi + y, y \in (0; \pi)$$

$$\text{тогда } f(x) = \arccos(\cos(\pi + y)) = \arccos(-\cos y) \stackrel{\text{св-во } \arccos}{=} \pi - \arccos(\cos y)$$

$$= \pi - \arccos(\cos y) = \pi - y$$

т.о. $f(x)$ ~~выглядит~~ ~~с~~ ~~образом~~:



$$\text{исходное } \Leftrightarrow 5\pi - 10f(x) = \pi - 2x \Leftrightarrow$$

$$\text{ур-ие } \Leftrightarrow f(x) = \frac{4\pi + 2x}{10} = \frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5}$$

По графику: корни: $-2\pi, 3\pi, x_1, x_2, x_3$

$$-x_1 = \frac{2\pi}{5} + \frac{x_1}{5} \Leftrightarrow \frac{6x_1}{5} = -\frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{\pi}{3}$$

$$x_2 = \frac{2\pi}{5} + \frac{x_2}{5} \Leftrightarrow \frac{4x_2}{5} = \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\cancel{\frac{4\pi}{5} - x_3 = \frac{2\pi}{5} + \frac{x_3}{5}}$$

$$2\pi - x_3 = \frac{2\pi}{5} + \frac{x_3}{5} \Leftrightarrow \frac{8\pi}{5} = \frac{6x_3}{5} \Leftrightarrow x_3 = \frac{4\pi}{3}$$

исходе у
того
какие, у
мне f пере
секает
прямая
 $y = \frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5}$

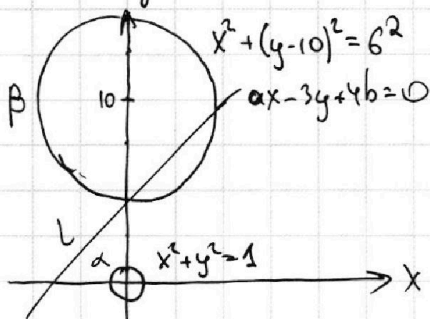
$$\text{Ответ: } \left\{ -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi \right\}$$

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 \end{cases} \end{cases}$$



чтобы ~~прямая~~ система имела 4 реш, необходимо чтобы прямая $l: ax - 3y + 4b = 0$ имела по 2 пересек с каждой из окр-тей $\alpha: x^2 + y^2 = 1$ и $\beta: x^2 + (y - 10)^2 = 6^2$

т.к. окр-ти не пересекаются, это еще и достаточное условие

l имеет 2 общие точки с $\beta \Leftrightarrow \rho(\overset{\text{центр } \beta}{(0;10)}; l) < 6$ (*)

l имеет 2 общ. т. с $\alpha \Leftrightarrow \rho(\overset{\text{центр } \alpha}{(0;0)}; l) < 1$ (**)

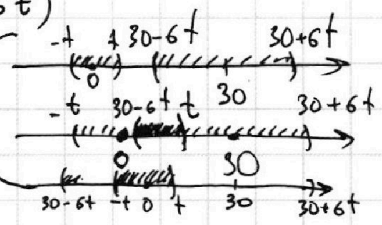
т.о. осталось найти такие a и b , что выполнено (*) и (**)

$\rho((x;y); l) = \frac{|ax - 3y + 4b|}{\sqrt{a^2 + 9}}$, где любых x и y , по формуле расст. до прямой

т.о. имеем $\begin{cases} \frac{|-3 \cdot 10 + 4b|}{\sqrt{a^2 + 9}} < 6 \\ \frac{|4b|}{\sqrt{a^2 + 9}} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4b - 30| < 6\sqrt{a^2 + 9} \\ |4b| < \sqrt{a^2 + 9} \end{cases}$

~~$\begin{cases} |4b - 30| < 6\sqrt{a^2 + 9} \\ |4b| < \sqrt{a^2 + 9} \end{cases}$~~ $t \leq \sqrt{a^2 + 9}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} |4b - 30| < 6t \\ |4b| < t \end{cases} \Leftrightarrow$
 $t > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4b - 30 \in (-6t; 6t) \\ 4b \in (-t; t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b \in (30 - 6t; 30 + 6t) \\ 4b \in (-t; t) \end{cases}$

где b есть реш, когда $30 - 6t < t$
 (тогда интервалы $(30 - 6t; 30 + 6t)$ и $(-t; t)$



пересекаются)
 $30 - 6t < t \Leftrightarrow 7t > 30 \Rightarrow t > \frac{30}{7} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 9} > \frac{30}{7} \Leftrightarrow a^2 > \frac{900 - 441}{49} = \frac{459}{49}$

$\Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{459}}{7}) \cup (\frac{\sqrt{459}}{7}; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -\frac{\sqrt{459}}{7}) \cup (\frac{\sqrt{459}}{7}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4 2x - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{\ln 625}{\ln 8x^3} - 3 \Leftrightarrow \log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4 \ln 5}{3 \ln 2x} - 3$$

$$a = \log_5 2x \quad a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \Leftrightarrow a^5 + 3a - 3 - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow 3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3 \Leftrightarrow b = \log_5^4 y \quad b^4 + \frac{4}{b} = \frac{\ln 1/5}{\ln y^3} - 3$$

$$\Leftrightarrow b^4 + \frac{4}{b} = \frac{-\ln 5}{3 \ln y} - 3 \Leftrightarrow b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3b^5 + 9b + 13 = 0$$

*.0. имеем

$$(*) \begin{cases} 3b^5 + 9b + 13 = 0 \\ 3a^5 + 9a - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+b)(3(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ \frac{(a^5 - b^5)}{(a-b)} + \frac{9}{a-b} = \frac{9}{3} \Leftrightarrow \frac{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{b^4} = 1 \end{cases}$$

$$3x^5 + 9x - 13 = 0$$

$$y = 3x^5 \uparrow \mathbb{R}$$

$$y = 9x \uparrow \mathbb{R}$$

$$y = -13 = \text{const}$$

$$\Rightarrow f \uparrow \mathbb{R} \text{ как сумма возрастает} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow E(f) = \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f(x) = 0$ имеет 1 корень (обозн его x_0)

$$(*) \Leftrightarrow f(a) = 0$$

$$\begin{cases} 3 \cdot (-b)^5 + 9 \cdot (-b) - 13 = 0 \\ f(-b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = 0 \\ f(-b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x_0 \\ -b = x_0 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5 2x + \log_5 y = 0 \Leftrightarrow \log_5 2xy = 0 \Leftrightarrow 2xy = 1 \Leftrightarrow xy = 1/2$$

Ответ: $1/2$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

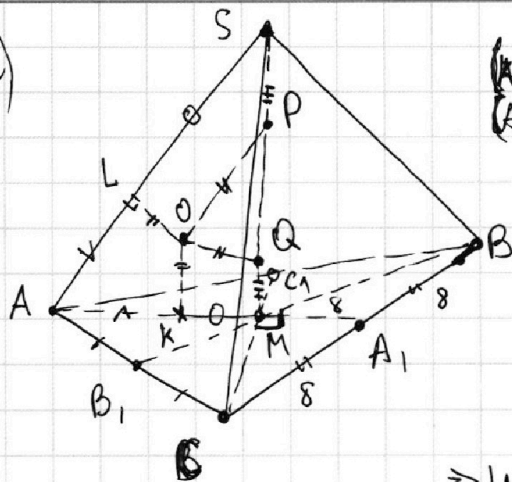
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



a)



O - центр Ω
 (AL) кас Ω $\Rightarrow |AL| = |AK|$
 (AK) кас Ω $\Rightarrow |AK| = |AL|$
 $|MK|^2 = |PQ| \cdot |MP|$
 $|MQ| = |SP|$
 $= |SP| \cdot |SQ| = |SL|^2$

(теор об отрезках кас: A, L, S, P, Q, M, K лежат в (ASB) , сечение сфер Ω -тью - окруж-ть)
 т.о. $|AS| = |AL| + |LS| =$

$$= |KA| + |KM| = |AM| = \frac{2}{3} |AA_1|$$

(св-во медианы) \Rightarrow

$$\Rightarrow |MA_1| = \frac{1}{2} |AM| = \frac{1}{2} |AS| = 8 \Rightarrow$$

$$|CA_1| = |A_1B| = \frac{1}{2} |CB| = 8$$

$\Rightarrow \angle CMB = 90^\circ$ (медиана = половина стороны)

$$S_{CMB} = \frac{2}{6} S_{ABC} \text{ (св-во медиан, разделяют исходный } \Delta \text{ на 6 равновеликих)} = \frac{200}{6} = \frac{100}{3}$$

$\angle CMB = 90^\circ \Rightarrow$
 $S_{CMB} = \frac{1}{2} |CM| \cdot |MB| \Rightarrow$

$$\Rightarrow |CM| \cdot |MB| = 2 S_{CMB} = \frac{200}{3}$$

$$|BB_1| = \frac{3}{2} \cdot |MB|; |CC_1| = \frac{3}{2} |CM| \Rightarrow |BB_1| \cdot |CC_1| = \frac{9}{4} |CM| \cdot |MB|$$

$$= \frac{9}{4} \cdot \frac{200}{3} = 150$$

$$|AA_1| = \frac{3}{2} |AM| = 24 \Rightarrow |AA_1| \cdot |BB_1| \cdot |CC_1| = 150 \cdot 24 = 2400 + 1200 = 3600$$

~~4~~ Ответ: 3600

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

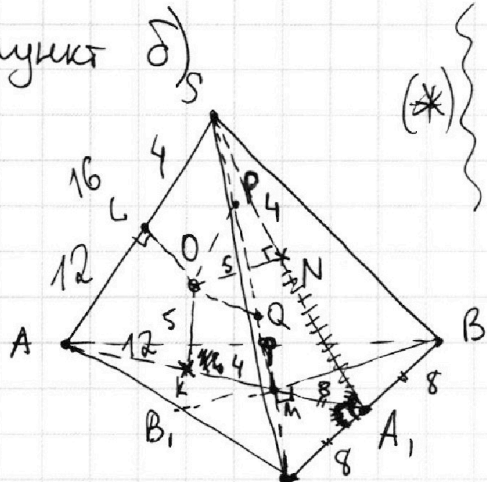
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

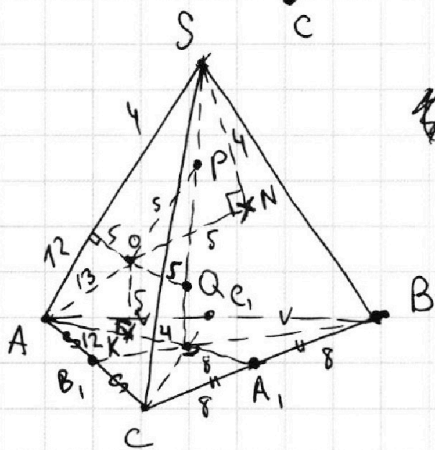
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

пункт д)



(*)

$$\begin{aligned}
 & (OK) \perp (ABC) \quad \left| \begin{array}{l} \text{опр} \\ \Rightarrow \end{array} \right. (OK) \perp (CB) \quad \left| \begin{array}{l} \text{теор} \\ \Rightarrow \end{array} \right. \\
 & (CB) \subset (ABC) \\
 & (ON) \perp (SCB) \Rightarrow (ON) \perp (CB) \\
 & \Rightarrow (CB) \perp (OKN) \\
 & |SN| = |SL| \text{ (отрезки кас)} = 4 \\
 & |AL| = |AS| - |SL| = 12 \\
 & |AK| = |AL| \text{ (отр. кас.)} = 12 \\
 & |KM| = |AB| - |AK| = 4 \\
 & \quad \quad \quad = |AM|
 \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^8 3^{14} 5^{12}$ $bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$ $ac: 2^{14} 3^{21} 5^{39}$ $x = abc$

$x^2 = (abc)^2 = ab \cdot ac \cdot bc = 2^{8+12+14} \cdot 3^{14+20+21} \cdot 5^{12+17+39} = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}^{(*)}$

$\Rightarrow x: 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} \Rightarrow x \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$ - оценка

(*) если $x^2: 3^{55}$ значит $x^2: 3^{56}$, т.к. при возведении в квадрат степень простого делителя увеличивается.

$(x^2: 3^{55} \Leftrightarrow (\frac{x}{3^{27}})^2: 3 \Leftrightarrow (\frac{x}{3^{27}})^2: 9)$

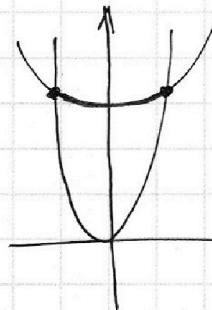
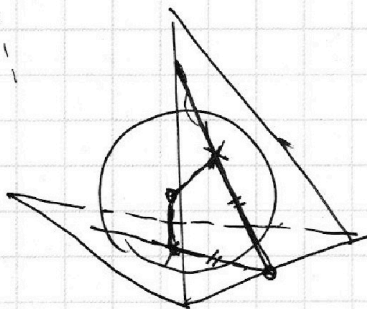
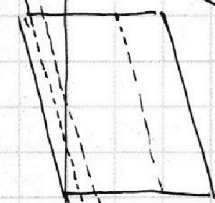
пример: $a = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$

$b = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$c = 2^9 \cdot 3 \cdot 5$

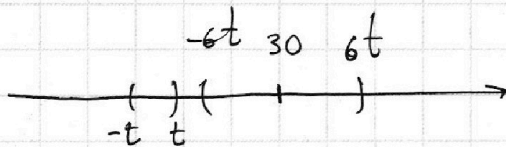
$\sqrt{a^2 + 9} = t$

$|4b - 30| < 6t$
 $< t$

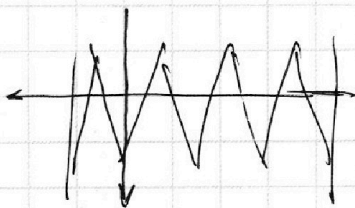


$4b \in (30 - 6t; 30 + 6t)$

$4b \in (-t; t)$



Handwritten calculations and notes on the right side of the page, including $360 + 8 = 368$, $100 + 3 = 103$, and other numerical manipulations.



$10 \arcsin(\cos x) = 5\pi - \arccos(\cos x)$
 $\sqrt{x - \pi} = (\cos x) \Leftrightarrow \arccos(\cos x) = \sqrt{x - \pi}$

1 $d + r = 39$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

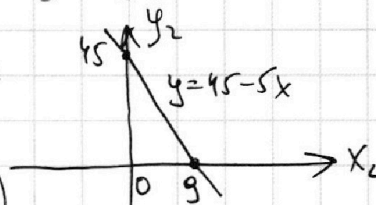
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$O(0;0)$ $P(-16;80)$ $Q(2;80)$ $R(18;0)$

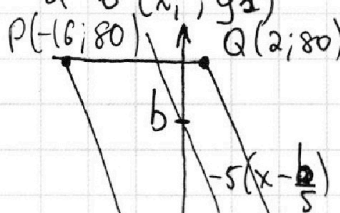
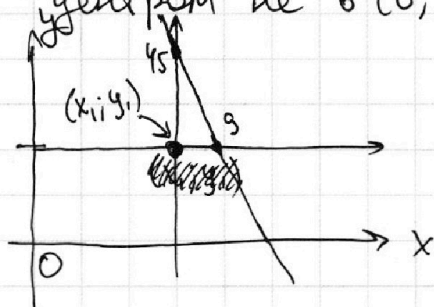
$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45 \Leftrightarrow 5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$

$\exists x_1 = y_1 = 0$

тогда $5x_2 + y_2 = 45 \Leftrightarrow y_2 = 45 - 5x_2$



т.о. условие $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$
указывает, что для точки (x_1, y_1)
подходит прямая $y_2 = 45 - 5x_2$, только
с центром не в $(0;0)$ а в (x_1, y_1)



Заметим что стороны $[PQ]$, $[QR]$
пар-гр имеют при коэф -5

~~перепробуем все прямые вида $y = -5(x - a)$
тогда все возможные точки пар-гр
окажутся на одной из этих~~

~~прямых тогда центр PQR будет на прямой, но не
на~~

$y = b - 5x$ пересек пар.гр. $\Leftrightarrow y = -5(x - \frac{b}{5})$ пересек пар.гр. \Leftrightarrow

$= \frac{b}{5} \in [0; 18] \Leftrightarrow b \in [0; 90]$

т.о. пусть $A(x_1, y_1)$ где все прямые подх точек
выглядят так: $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45 \Leftrightarrow y_2 = (y_1 + 45) - 5(x_2 - x_1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

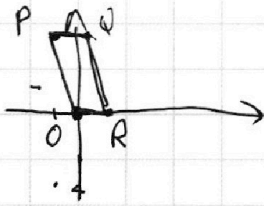
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) $O(0;0)$ $P(-16;80)$ $Q(2;80)$ $R(18;0)$



$$5x + y = 45$$

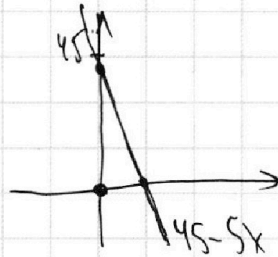
$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$

$$\sin - 10f(x)$$

$$x_1 = y_1 = 0$$

$$5x_1 + y_2 = 45$$

$$y_2 = 45 - 5x_1$$



$$5\pi - 10(x \% \pi)$$

не совсем

$$t \in [-\pi; \pi]$$

$$\sin - 10t$$

$$5\pi - 10\pi = -5\pi$$

$$5\pi + 10\pi = 15\pi$$

$$\pi - 2x \in [-5\pi; 15\pi]$$

$$2x \in [$$

$$-7\pi$$

$$\arccos(\cos x)$$

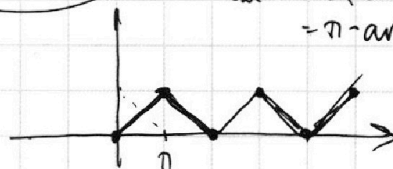
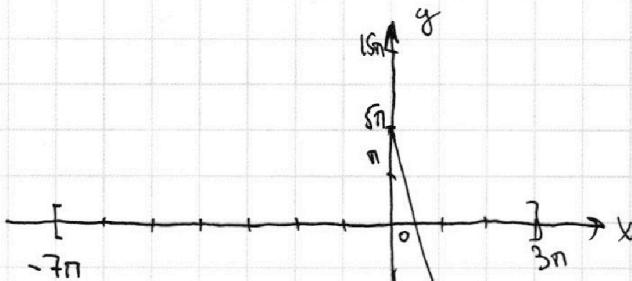
$$\cos x$$

$$x \in \left[\frac{-14\pi}{2}; \frac{6\pi}{2} \right]$$

$$x \in [-7\pi; 3\pi]$$

$$\arccos(\cos(\pi+x))$$

или $\arccos(-\cos x) = \pi - \arccos(\cos x)$



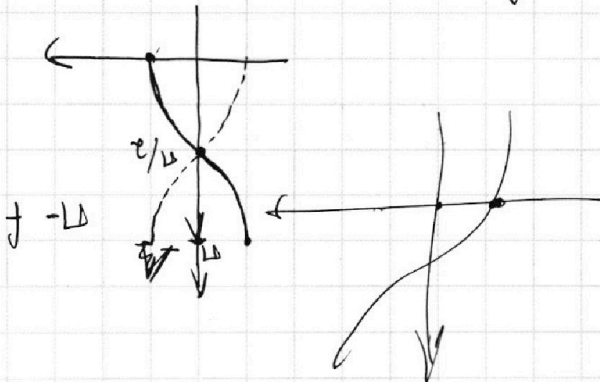
конус-цилиндра образ.

$$df \Rightarrow$$

$$f(a) = 3a^5 + 9a - 13$$

$$0 = 15a^4 + 9 = 0$$

$$0 = 5a^4 + 3 = 0$$



$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3a^5 + 9a - 13}{5a^4 + 3} = \frac{3a}{5}$$

$$a \rightarrow \infty \quad \frac{3a}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

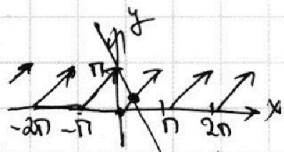
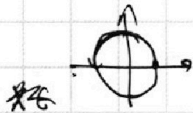
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &\geq 34 \\ \alpha + \beta &\geq 19 \\ \beta + \gamma &\geq 17 \\ \alpha + \gamma &\geq 39 \end{aligned}$$



$$5^{39} \cdot 3^{21} \cdot 2^{14}$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

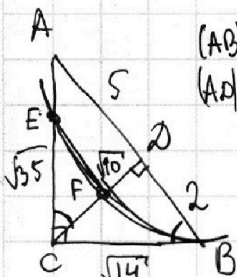
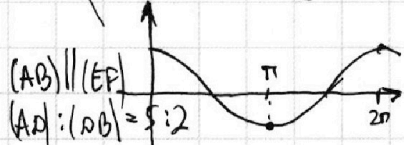
$$x \equiv \pi$$

$$\pi - 2x = 0$$

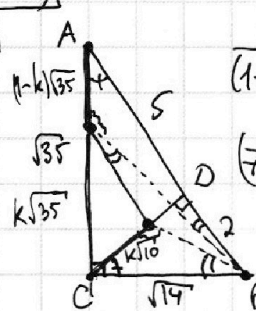
$$\pi - 2x = 0$$

$$\pi - 2(x \equiv \pi) = 0$$

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) \in [0; \pi]$$



$$\sqrt{4+10} \quad \sqrt{25+10} \quad 49 \neq 35+14$$



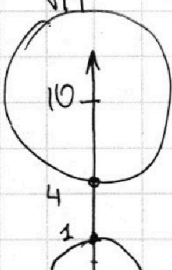
$$\left(\frac{\sqrt{35}}{7}\right)^2 = \frac{35}{49} \cdot S_{ABC}$$

$$\frac{k\sqrt{10}}{(1-k)\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$(7\sqrt{10}) \cdot k = 7\sqrt{10} - k \cdot 7\sqrt{10}$$

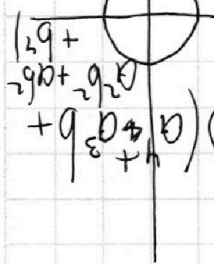
$$2k \cdot 7\sqrt{10} = 7\sqrt{10} \quad k = \frac{1}{2}$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{35}{49} = \frac{35}{196} \cdot S_{ABC}$$



$$l: y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$$

$$\begin{aligned} p(10; l) &< 6 \quad ok \\ p(0; l) &< 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \log_5 2xy = \log_5 a + \log_5 b \\ \log_5 2xy = \log_5 a + \log_5 b \\ \log_5 2xy = \log_5 a + \log_5 b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3b^5 + 9b + 13 = 0 \\ 0 = \frac{3}{9} + 4 + \frac{1}{1} = 0 \\ b^4 + \frac{b}{4} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0 \\ = x^2 + (y-10)^2 - 36 = 0 \end{aligned}$$

$$\log_5 2xy = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2y}$$

$$0 = (a+b) + (a+b) = 2(a+b)$$

$$3(a^5 + b^5) + 9(a+b) = 0$$

$$a^5 + 3a - 3 - \frac{3}{4} = 0$$

$$a^4 - \frac{a}{3} = \frac{3a}{4} - 3$$

$$\log_5^4(a^2 - 3) = \frac{\log_5 a x}{\ln 625}$$

$$3 - \frac{\log_5^4(a^2 - 3)}{\ln 625} = \frac{\log_5 a x}{\ln 625}$$

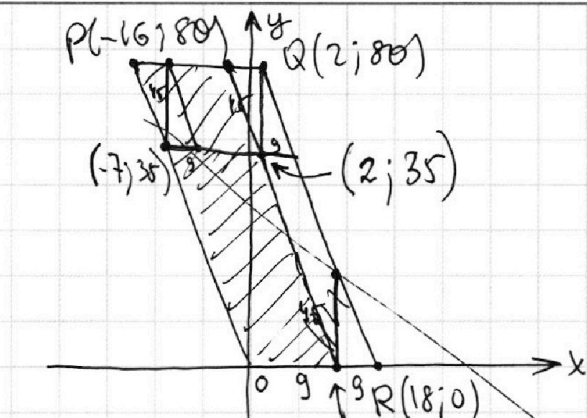
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

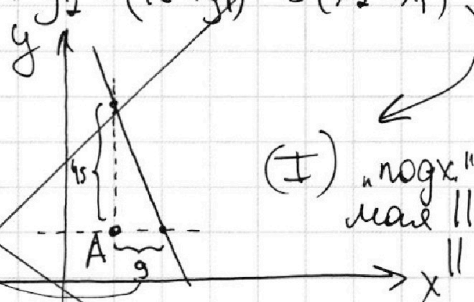
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



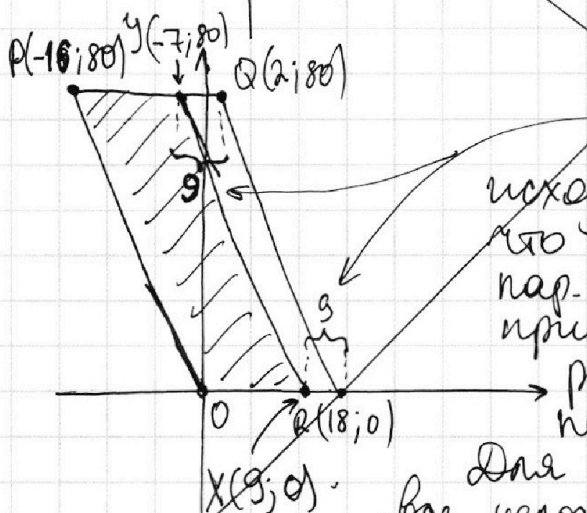
Прямая $T.A(x_1; y_1)$ для всех "погр." прямая точек:

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_2 = (45 + y_1) - 5(x_2 - x_1)$$

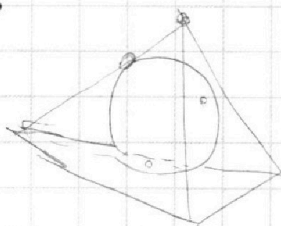
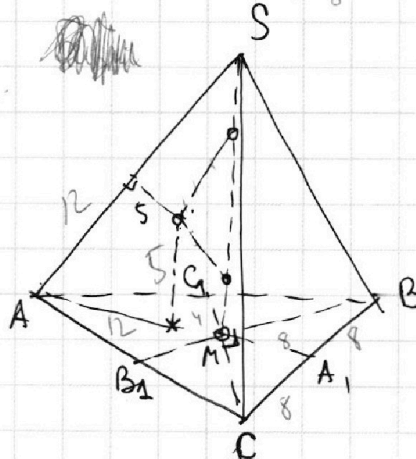
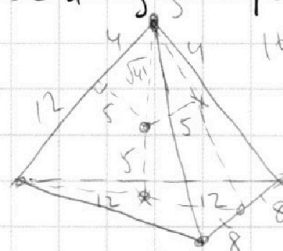
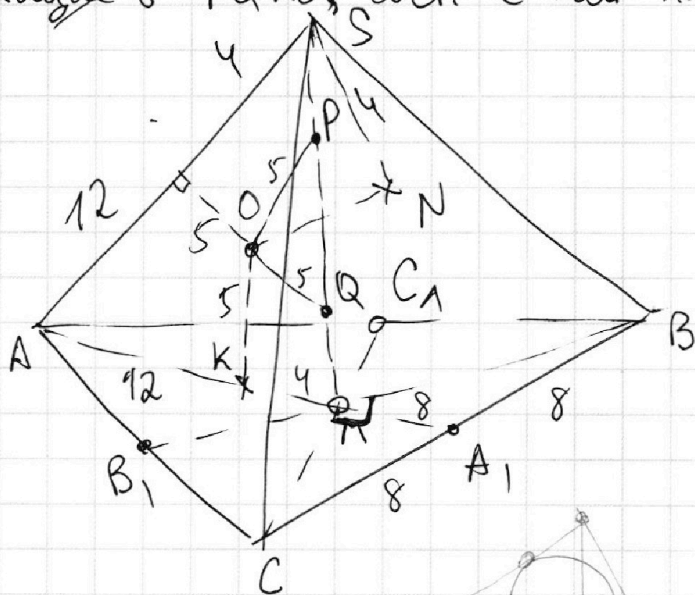


(I) "погр." прямая \parallel (QO) \parallel (PO)



исходя из (I) картинкой понятно, что $PQRO$, где $Y(-7; 80)$, $X(9; 0)$ - пар. гр. сост. из точек, которые принадлежат $PQRO$ и для которых соответствующие "параллельные" прямые пересекают $PQRO$.

Для каждой целочисленной точки $PQRO$ все целочисленные точки ее "погр." прямой, лежащие в $PQRO$, сост. с ней пар.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~ap: 2⁸ · 3⁴ · 5¹²~~
 ~~bc: 2¹² · 3²⁰ · 5¹⁷~~
 ~~ac: 2¹⁴ · 3²¹ · 5³⁹~~
 abc: ac: 5³⁹ · 3²¹ · 2¹⁴
 abc:

$$\alpha + \beta \geq 8$$

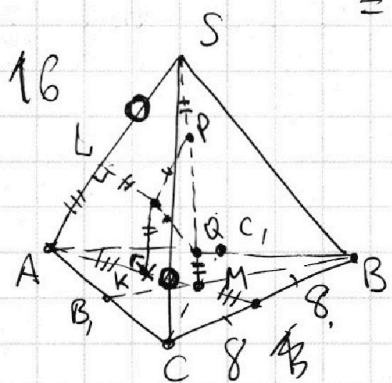
$$\beta + \gamma \geq 12$$

$$\alpha + \gamma \geq 14$$

$$\alpha + \beta + \gamma$$

$$\begin{matrix} \alpha + \beta = 8 \\ \alpha + \gamma = 14 \\ \beta + \gamma = 12 \end{matrix} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 4 + 7 + 6 = 17$$

$$\begin{matrix} 3 = \beta \\ = \alpha \\ = \gamma \end{matrix}$$

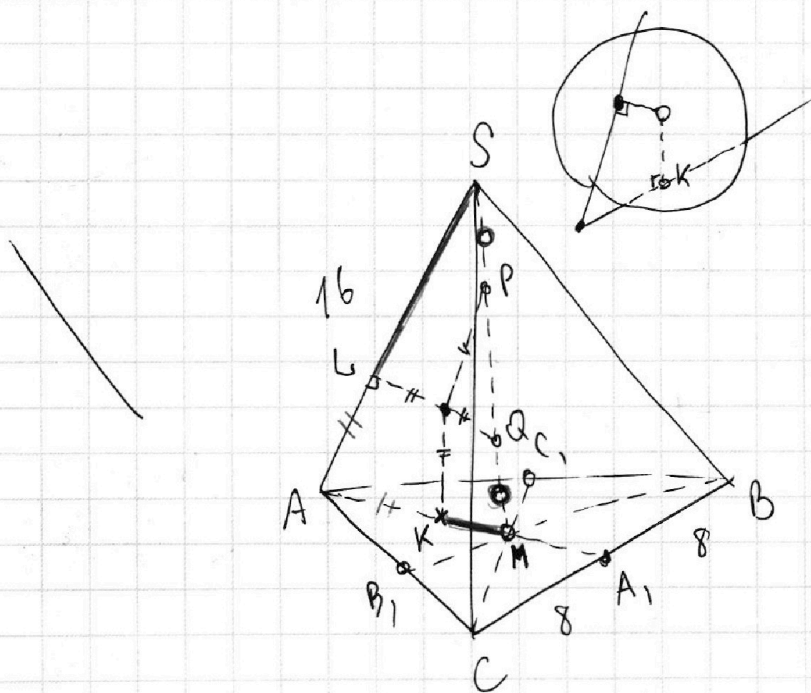


$$100 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot h = 8h$$

$$12,5$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

$$h = \frac{200}{16} = 12,5$$



$$S_{ABC} = 100$$

$$SA = BC = 16$$