МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1 (стр 1/1)

$ab \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ $\quad bc \vdots 2^{13} \cdot 3^{15} 5^{18}$ $\quad ac \vdots 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

Если a, b или c имеет простой делитель $p \neq 2, 3$ или 5, можно разделить это число на этот делитель, и ~~усл.~~ условия делимости ост. верными, при этом

abc уменьшится $\Rightarrow \exists\ a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$ $\quad b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$ $\quad c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$

Наим abc $\Leftrightarrow$ наим $x_1 + x_2 + x_3$; $y_1 + y_2 + y_3$; $z_1 + z_2 + z_3$

$ab = 2^{x_1+x_2} \cdot 3^{y_1+y_2} \cdot 5^{z_1+z_2} \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow x_1 + x_2 \overset{(1)}{\geq} 7$; $y_1 + y_2 \overset{(2)}{\geq} 11$; $z_1 + z_2 \overset{(3)}{\geq} 14$

Аналогично $x_2 + x_3 \overset{(4)}{\geq} 13$; $y_2 + y_3 \overset{(5)}{\geq} 15$; $z_2 + z_3 \overset{(6)}{\geq} 18$

$x_1 + x_3 \overset{(7)}{\geq} 14$ $\quad y_1 + y_3 \overset{(8)}{\geq} 17$ $\quad z_1 + z_3 \overset{(9)}{\geq} 43$

Сложим (1) (4) (7) $\quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 17$

сложим (2) (5) (8) $\quad y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{43}{2} \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq 22$

сложим (3) (6) (9) $\quad z_1 + z_2 + z_3 \geq \frac{75}{2} \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 \geq 38$ $\quad z_1 + z_2 + z_3 \geq 43$

т.к $z_1 + z_3 \geq 43$

(т.к $z_i \geq 0$)

пример $\begin{cases} x_1 = 4 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 10 \\ y_1 = 7 \quad y_2 = 4 \quad y_3 = 11 \\ z_1 = 20 \quad z_3 = 23 \quad z_2 = 0 \end{cases}$

$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{20}$

$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{23}$

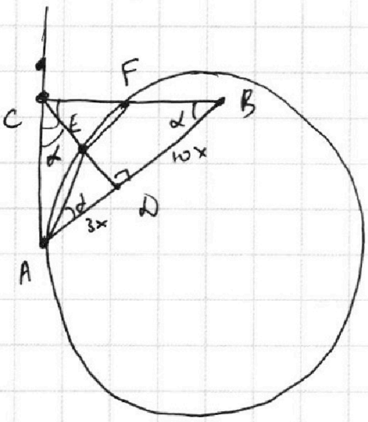
$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot$

Наим $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ наим $y_1 + y_2 + y_3 = 22$ наим $z_1 + z_2 + z_3 = 43$

$\Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ возм. пример приведен

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Задача 2 (стр. 1/1)



$\frac{AB}{BD} = 1{,}3 = \frac{13}{10}$ $\quad \exists AB = 13x \Rightarrow BD = 10x \Rightarrow AD = 3x$

ΔABC – прямоуг., CD – высота $\Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD$

$CD^2 = 30x^2 \quad CD = \sqrt{30}\,x$

$S_{ACD} = \frac{\sqrt{30}\,x \cdot 3x}{2} = \frac{3\sqrt{30}\,x^2}{2}$

$EF \parallel AB$ $\quad AEFB$ – трапеция, вписанная

$\Rightarrow$ равнобедренная

$\Rightarrow \angle EAB = \angle FBA \quad \exists \angle FBA = \alpha$

$\Rightarrow \angle CFE = \alpha \quad (EF \parallel AB)$

$\Rightarrow \angle ACD = \alpha$ (т.к $\angle BED = 90^\circ - \alpha$ из ΔEDB)

$\Delta ACD: \quad tg\,\alpha = \frac{3x}{\sqrt{30}\,x} = \frac{3}{\sqrt{30}}$

$\angle EAB = \angle FBA = \alpha \qquad \Delta EAD: \; tg\,\alpha = \frac{ED}{3x}$

$\frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{ED}{3x} \qquad ED = \frac{9x}{\sqrt{30}}$

$CE = CD - ED = \sqrt{30}\,x - \frac{9}{\sqrt{30}}x =$

$= \frac{21}{\sqrt{30}}x$

$\Delta CEF \sim \Delta CDB$

$\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{DB}$

$\frac{\frac{21}{\sqrt{30}}x}{\sqrt{30}\,x} = \frac{EF}{10x}$

$\frac{21}{\cancel{30}_{3}} = \frac{EF}{\cancel{10}x}$

$EF = 7x$

$S_{CEF} = \frac{EF \cdot CE}{2} = \frac{7x \cdot \frac{21}{\sqrt{30}}x}{2} = \frac{21 \cdot 7}{2\sqrt{30}}x^2$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{30}\,\cancel{x^2} \cdot \cancel{2}\sqrt{30}}{\cancel{2} \cdot \cancel{21}_{7} \cdot 7\,\cancel{x^2}} = \frac{30}{49}$

Ответ: $\frac{30}{49}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3 (стр 1/1)

$$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\cancel{\sin}\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}^{15} - x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2}^{15} - x = -\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \frac{6x}{5} = \frac{\pi}{5} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{4x}{5} = \frac{4\pi}{5} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + \frac{5\pi k}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

<u>Ответ:</u> $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + \frac{5\pi k}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

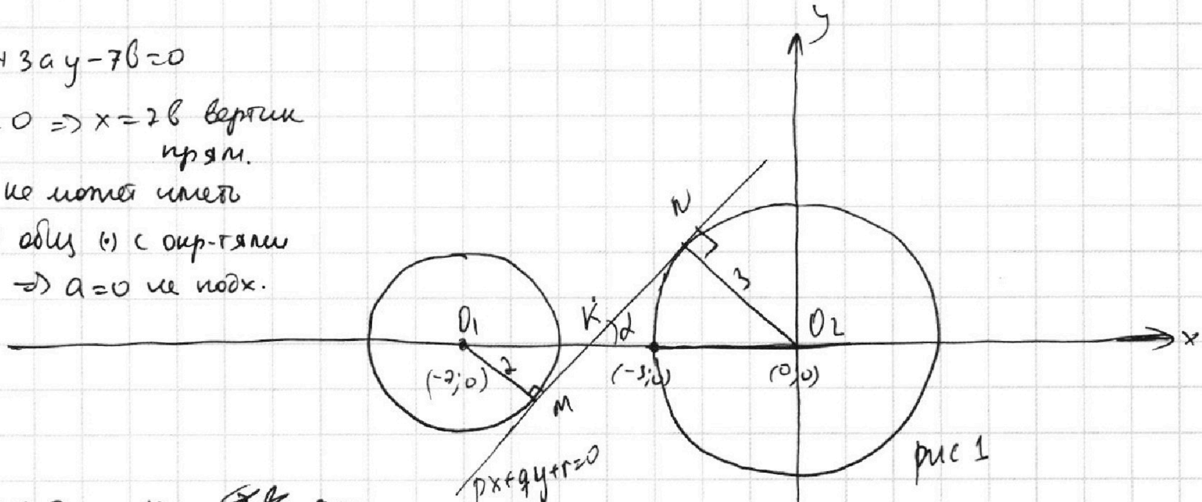
Задача 4 (стр. 1/3)

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$$

$((x+7)^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)=0$ — 2 окр-ти ((0,0) и рад. 3 и (-7;0) и рад. 2)

$x+3ay-7b=0$

I $a=0 \Rightarrow x=7b$ вертик прям.
не может иметь 4 общ (•) с окр-тями
$\Rightarrow a=0$ не подх.

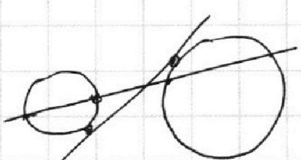


II $a \neq 0$ ~~x = 7b - 3ay~~

$y = \frac{7b-x}{3a} = \frac{-x}{3a} + \frac{7b}{3a}$

Для фикс. a это прямая с фикс. наклоном, которая может паралл. переноситься вверх-вниз (можно для ∀ положения подобрать b)

Если наклон по модулю ~~меньше~~ (/x)



меньше накл. общей внутр косой ⇒ можно подобр b, чтобы прямая имела с окр-тями = 4 общ точки (с каждой по 2)

[illegible]

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4. Продолжение №1 (стр 2/3)

См рис 1

$\Delta O_1MK \sim \Delta O_2NK$

$\frac{O_1M}{O_2N} = \frac{O_1K}{O_2K}$

$\frac{2}{3} = \frac{O_1K}{O_2K}$

$O_1K + O_2K = 7$

$O_1K = \frac{2}{5} \cdot 7 = \frac{14}{5}$

$O_2K = \frac{3}{5} \cdot 7 = \frac{21}{5}$

$tg\,\alpha = ?$

$\sin\alpha = \frac{\cancel{3}\cdot 5}{21 \cdot 7} = \frac{5}{7}$

7, 5, $\sqrt{24}$

$tg\,\alpha = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$

$x = \frac{5}{2\sqrt{6}} y + const$

Если $\alpha > arctg\left(\frac{5}{2\sqrt{6}}\right) \Rightarrow$ нет общ. точек

2 касат. по симм отн-но Ox имеет коэфф. $\frac{-5}{2\sqrt{6}}$

если $< \frac{-5}{2\sqrt{6}} \Rightarrow$ нет общ. точек

если $= \frac{\pm 5}{2\sqrt{6}} \Rightarrow$ 2 общ. точки макс.

$$\underbrace{\frac{-5}{2\sqrt{6}} \overset{(1)}{<} \frac{-1}{3a} \overset{(2)}{<} \frac{5}{2\sqrt{6}}}$$

(1) $\frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$

$\frac{2\sqrt{6} - 15a}{3a \cdot 2\sqrt{6}} < 0$

$\frac{2\sqrt{6} - 15a}{a} < 0$ $\quad \frac{15a - 2\sqrt{6}}{a} > 0$

$+ \; 0 \; - \; \frac{2\sqrt{6}}{15} \; +$

$a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$

(2) $\frac{-1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$

$\frac{15a + 2\sqrt{6}}{3a \cdot 2\sqrt{6}} > 0$

$\frac{15a + 2\sqrt{6}}{a} > 0$

$+ \; \frac{-15}{2\sqrt{6}} \; - \; 0 \; +$

$a \in \left(-\infty; \frac{-15}{2\sqrt{6}}\right) \cup (0; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4 Продолжение №2 (стр 3/3)

$$\left.\begin{array}{l} a\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{2\sqrt6}{15};+\infty\right) \\ a\in\left(-\infty;\frac{-2\sqrt6}{15}\right)\cup(0;+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow a\in\left(-\infty;\frac{-2\sqrt6}{15}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt6}{15};+\infty\right)$$

Для всех таких a b подбирается

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{2\sqrt6}{15}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt6}{15};+\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5 (стр 1/2)

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2} 7^5 - 4$

$\log_7^4 6x - 2\frac{\log_7 7}{\log_7 6x} = \frac{\log_7 343}{\log_7 36x^2} - 4$

$\log_7^4 6x - 2\frac{1}{\log_7 6x} = \frac{3}{2\log_7 6x} - 4$ (можно, т.к. $6x>0$)

$\exists \log_7 6x = a$

$a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2a} - 4 \quad /\cdot 2a \quad (a\neq 0)$

$2a^5 - 4 = 3 - 8a$

$2a^5 + 8a - 7 = 0$

$\log_7^4 y + 6\frac{\log_7 7}{\log_7 y} = \frac{\log_7 7^5}{\log_7 y^2} - 4$

$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2\log_7 y} - 4$ (можно, т.к. $y>0$)

$\exists \log_7 y = b$

$b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4 \quad /\cdot 2b$

$2b^5 + 12 = 5 - 8b$

$\begin{cases} 2b^5 + 8b + 7 = 0 \ (1) \\ 2a^5 + 8a - 7 = 0 \ (2) \end{cases}$ $\Rightarrow a^5 + b^5 + 4(a+b) = 0$

$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 4(a+b) = 0$

$\log_7 6x + \log_7 y = a+b$

$\log_7(6xy) = a+b$

найдем все возм знач $a+b$

$\left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4 = 0 \end{array}\right.$

(1);(2): $b \le 0$ (иначе (1) ?!) $a \ge 0$ иначе 2 ?!)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5. Продолжение (стр 2/2)

$a^4 > 0$

$-\underset{<0}{a^3} \cdot \underset{>0}{b} > 0$

$a^2b^2 > 0$

$-\underset{<0}{a}\,\underset{>0}{b^3} > 0$

$b^4 > 0$

$4 > 0$

$\Rightarrow a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4 = 0$ не имеет решений.

$\Rightarrow a + b = 0$

$\log_7(6xy) = 0$

$\Rightarrow 6xy = 1$

$xy = \frac{1}{6}$

[illegible] $a = -b$

[illegible]

$2b^5 + 8b + 7 = 0$

[illegible]

При $b = -100$

$2b^5 + 8b + 7 < 0$

при $b = 0$

$2b^5 + 8b + 7 > 0$

[illegible]

$\Rightarrow$ между -100 и 0 есть значение b, что $2b^5 + 8b + 7 = 0$

т.к. $2b^5 + 8b + 7$ - непрер. ф-ция

$\Rightarrow$ можно подобр такое y (оно сущ.)

при таком b $a = -b$ ~~$a = xy\frac{}{6}$~~

$\Rightarrow 2a^5 + 8a - 7 = 0$ автомат. вып.

$\Rightarrow$ такое x тоже сущ.

$\Rightarrow xy = \frac{1}{6}$ ситуация возможна

Ответ: $1/6$

Задача 6 (стр 1/1)

$4x_2 + 4x_1 + y_2 + y_1 = 40$

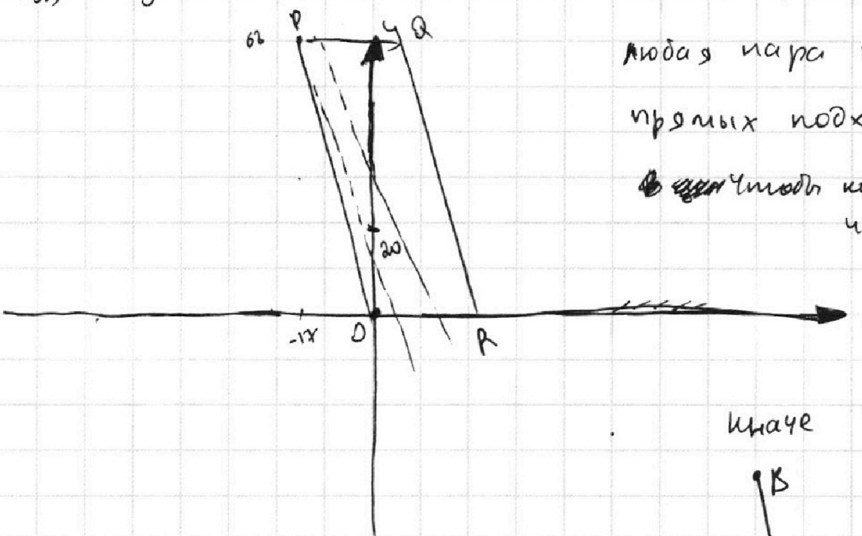
$4x_2 + y_2 - 20 = -(4x_1 + y_1 - 20)$

$4x_2 + y_2 - 20 = a \quad 4x_1 + y_1 - 20 = -a$

$(x_2, y_2) \in \; y = -4x + 20 + a$

— паралл прямые, симм отн-но (·) (0; 20)

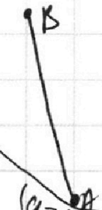
$(x_1; y_1) \in \; y = -4x + 20 + a$



Любая пара точек на 2-х таких прямых подх.

Чтобы коорд были целые, нужно, чтобы при $x=0$ был целый y

иначе через 4 ед. отрезка не будет целого y, а целых точек по x между A и B нет



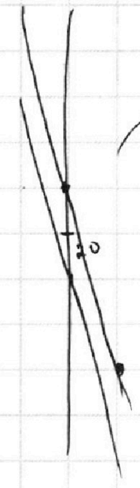
0) отступ 0 $(a=0)$

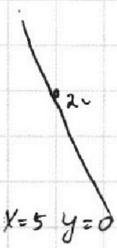
1) отступ 1 $(a=1)$

на таких прямых всегда 18 целых точек

$18 \cdot 18 = 324$

на 1-й прямой; на 2-й прямой





$x=5 \; y=0$

$x=-12 \; y=68$

$x \in [-12; 5]$

18 точек

$C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 9 \cdot 17 = 153$

всего м.б. макс. отступ 20

(иначе нижн. прямая ниже пар-мма)

$324 \cdot 20 + 153 = 6480 + 153 = 6633$

Ответ: 6633

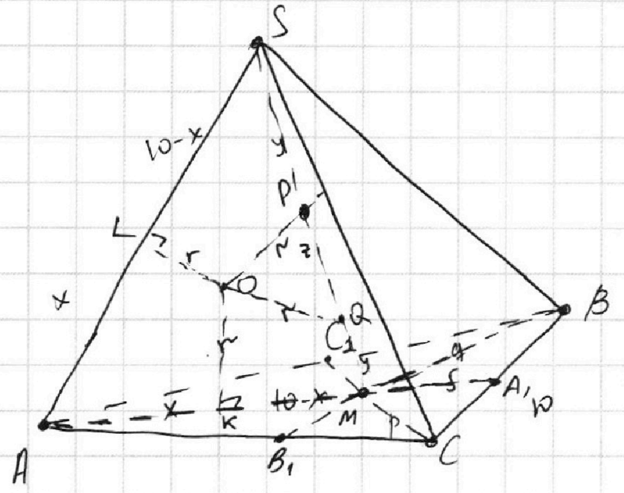
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7 (стр 1/2)



∃ O-центр сферы r-радиус

OK ⊥ AM OK = r

OL = r OL ⊥ r

OP = OQ = r

∃ AL = x ⇒ LS = 10 - x

△ALO = △AKO (катет r и общ. гипотен.)

⇒ AK = x

SP = y = MQ PQ = z

∢ сеч. сферы пл-тью (AMS)
сфера → окр-ть LKPQ

степ.(·) S : $LS^2 = SP \cdot SQ$

$(10-x)^2 = y\cdot(y+z)$

степ(·) M : $MK^2 = MQ \cdot MP$

$MK^2 = y(y+z) = (10-x)^2$

$\Rightarrow MK = 10 - x$

$\Rightarrow AM = 10$ $AM = \frac{2}{3} AA_1 \Rightarrow MA_1 = 5$

$CA_1 = BA_1 = 5 = MA_1 \Rightarrow \triangle CMB$ - прямоуг.

∃ MC = p BM = q

$S_{\triangle MBC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = 20$
$\qquad \| \; \frac{pq}{2}$

$\begin{cases} pq = 40 \\ p^2+q^2 = 100 \end{cases} \xrightarrow{\text{подх}} p = \sqrt{20} \;\; q = \sqrt{80}$ ~~[illegible]~~ или $p = \sqrt{80}$, $q = \sqrt{20}$
(по т. Виета больше нет реш.)

НУО $p = \sqrt{20}$ $q = \sqrt{80}$
$\quad \| \; 2\sqrt5 \qquad \| \; 4\sqrt5$

$\Rightarrow BB_1 = \frac{3}{2} \cdot 4\sqrt5 = 6\sqrt5$ $CC_1 = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt5 = 3\sqrt5$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 6\sqrt5 \cdot 3\sqrt5 =$ ~~[illegible]~~ $30\cdot 3 \cdot 5 = 240 \cdot 5 = 1200$ - ответ 1)

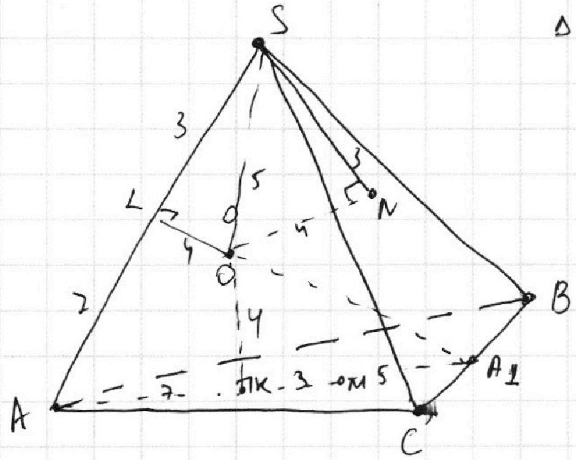
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7. Продолжение (стр 2/2)



$\triangle OSN$ – прямоуг $ON=4$ $SN=3 \Rightarrow OS=5$

$\triangle LOS$ – прямоуг $OS=5$ $LO=4 \Rightarrow SL=3$

$\Rightarrow AL=7=AK$

Сфера кас. SBC и $ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ лежит на биссектральной пл-ти двугр $\angle$ с ребром BC.

$\Rightarrow \angle(SBCA) = 2\angle(OBCA)$

$\angle(OBCA) = \angle OA_1K$

($KA_1 \perp BC \Rightarrow OA_1 \perp BC$ по теореме о 3-х перп. (т.к. $OK \perp ABC$))

$OK=4$ $KA_1=8$ $\angle OA_1K = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\angle(SBCA) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$

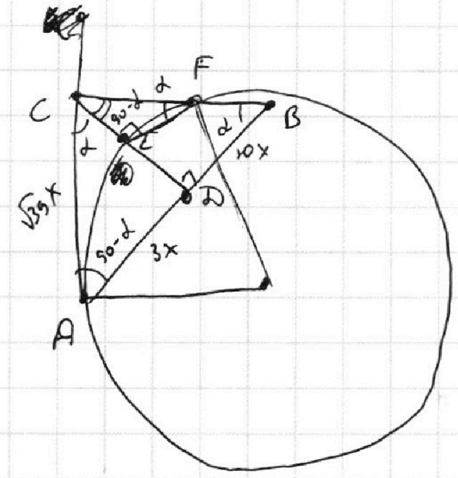
~~Ответ~~ $2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$. – ответ на 2)

Ответ: 1) 1200.
2) $2\operatorname{arctg}(1/2)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$

$AB \parallel \cancel{BD}EF$

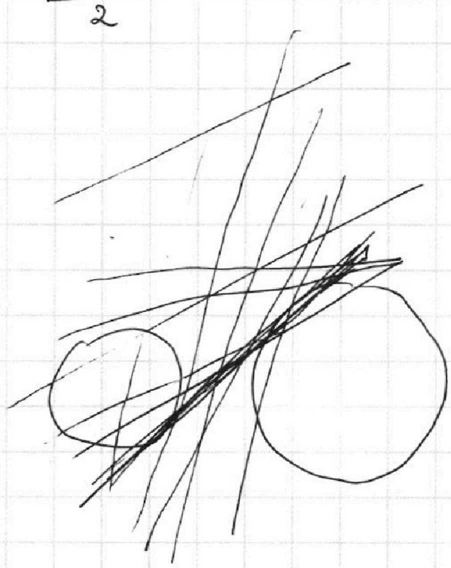
$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$

$CD = \sqrt{30}\,x$

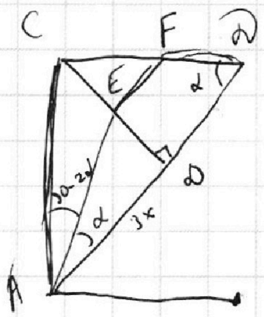
$S_{ACD} = \frac{\sqrt{30}\,x \cdot 3x}{2}$

$30+9$

$\frac{3}{\sqrt{30}}$



1
2
3
4
5
6
7



$tg\,\alpha = \frac{\sqrt{30}}{10}$

$\frac{ED}{3x} = \frac{\sqrt{30}}{10}$

$ED = \frac{3x\sqrt{30}}{\sqrt{10}}$

$CE = \sqrt{30}\,x - \sqrt{30}\,x\,\frac{3}{\sqrt{10}} =$

$= \sqrt{30}\,x\left(1-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$\sqrt{30}\,x$

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4$

$\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{DB}$

$1-\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{EF}{10x}$

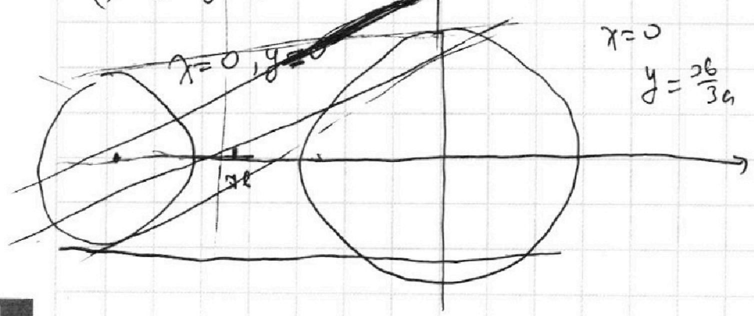
$\cancel{\log_7^4(6)+\log_7^4 x} - 2\frac{\log_7 7}{\log_7 6x} = \frac{\log_7 343}{\log_7 36x^2}$

$\log_7^4 6x$

$EF = \left(1-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)10x =$

$= 10x - 3\sqrt{10}\,x$

$(x+7)^2+y^2=4$



$x=0$

$y=\frac{26}{3a}$

$a=0$

x

$y=0$

$x=7b$

$y = \frac{-x+7b}{3a}$

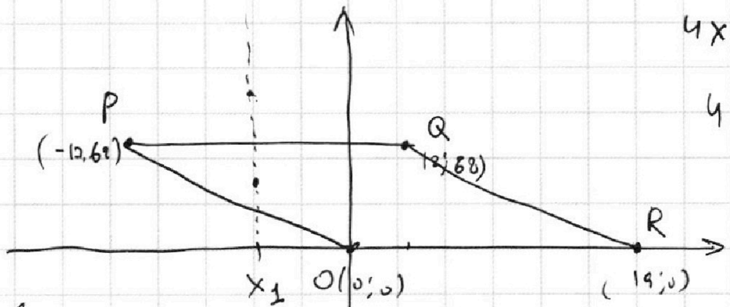
$y = \frac{-x}{3a} + \frac{26}{3a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$4x_2-4x_1+y_2-y_1=40$

$4(x_2-x_1)+y_2-y_1=40$

$f(x,y)=4x-y-20$

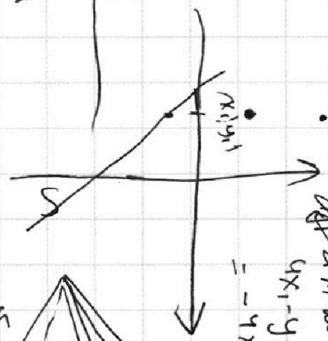
$f(x_1,y_1)=-f(x_2,y_2)$

$4x-y-20=a$

$y=4x-20-a$

$4x-y-20=-a$

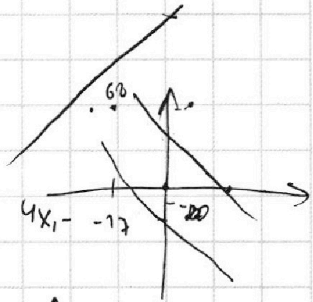
$y=4x-20+a$

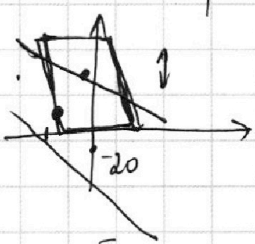


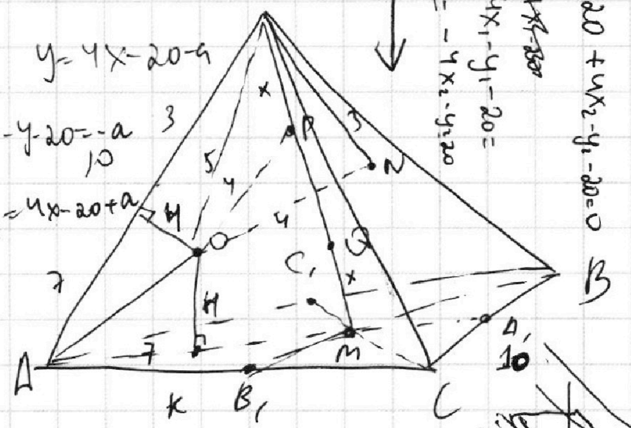
$4x_1-y_1-20=-4x_2-y_2+20$

$4x_1-y_1-20+4x_2-y_2-20=0$

$x_1-y_1+4x_2+y_2=40$



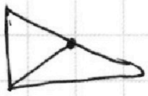


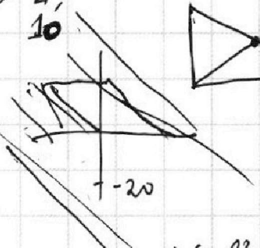


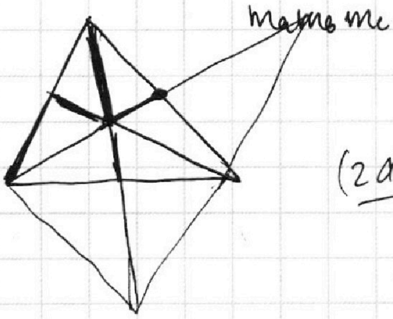
$\frac{\sqrt3}{4}a^2$

$\left(\frac{\sqrt3}{2}a\right)^3$

$\frac{3\sqrt3}{9}a^3$







Медиана

$(2b^2+2c^2-a^2)$

$\underline{(2a^2+2b^2-c^2)}(2a^2+2c^2-b^2)(2b^2+2c^2-a^2)$

$4a^4+4c^2a^2-2a^2b^2+4a^2b^2+4b^2c^2-2b^4$

$-2a^2c^2-2c^4+b^2c^2$

$+5b^2c^2$

$4a^4-2b^4-2c^4+2a^2b^2$

$+2a^2c^2$

$(4a^4-2b^4-2c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+5b^2c^2)(2b^2+2c^2-a^2)$

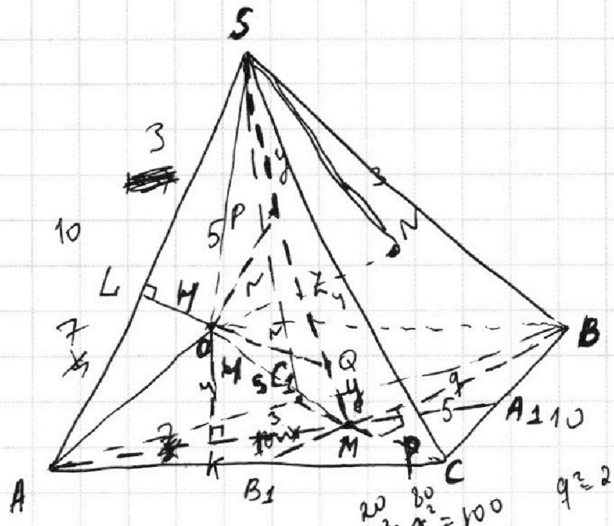
$8a^4b^2+8a^4c^2-4a^6-4b^6-4b^4c^2+2a^2b^4-4b^2c^4-48$

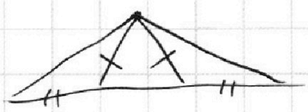
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





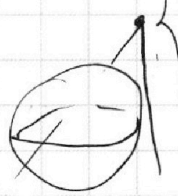
$S_{ABC} = 60$

$SA = BC = 10$

ст. мед. площ

$$\begin{cases} \frac{1}{2} ab \sin\varphi = 60 \\ \frac{2a^2+2b^2-100}{4} = 225 \\ a^2+b^2-2ab\cos\varphi = 100 \end{cases}$$

$a^2+b^2=500$



$ab \sin\varphi = 120$

$400 = 2ab\cos\varphi$

$200 = ab\cos\varphi$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}$

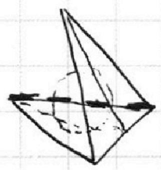
$p^2+q^2=100$

$\frac{pq}{2} = 20$

$q^2=2$

$pq = 40$

$p = \frac{40}{q}$



$\frac{2a^2+2b^2-100}{4} = 225$

$2a^2+2b^2-100 = 900$

$a^2+b^2=500$

$a^2+b^2-2ab\cdot\cos\varphi = 100$

$p=\sqrt{20}$

$y(y+z) = (10-x)$

$\frac{15\cdot 10}{2}$

$q^2 + \frac{1600}{q^2} = 100$

$q^4+1600-100q^2=0$

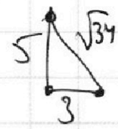
$2ab\cos\varphi = 400$

$\frac{ab\sin\varphi}{2} = 60$

$2ab$

$\frac{ab}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = 60$

$ab = 40\sqrt{34}$



$\frac{2\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{40}{6}$

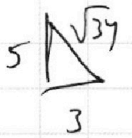
80

$\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\frac{100 \pm \sqrt{100^2-4\cdot1600}}{2}$

$\frac{100 \pm 10\sqrt{100-64}}{2}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{5}$



$(a+b)^2 = 500+80\sqrt{34}$

$\frac{100 \pm 360}{2}$

46

$\frac{100 \pm \sqrt{100^2-4\cdot1600}}{2}$

$100 \pm 10\sqrt{36}$

100 ± 60

$q^2 + \frac{1600}{34q^2} = 500$

$\frac{ab\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}}{2} = 60$

$ab = 40\sqrt{34}$

$b = \frac{40}{\sqrt{34}\,a}$

$34a^4+1600 = 500\cdot 34a^2$

$34t^2 - 500\cdot34t + 1600 = 0$

$500\cdot34 \pm \sqrt{(500\cdot34)^2 - 4\cdot1600\cdot34}$

$10\sqrt{5\cdot34^2 - 4\cdot16\cdot34}$

$34(170-64)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$4x-y-20=a \qquad y=4x-20-a$

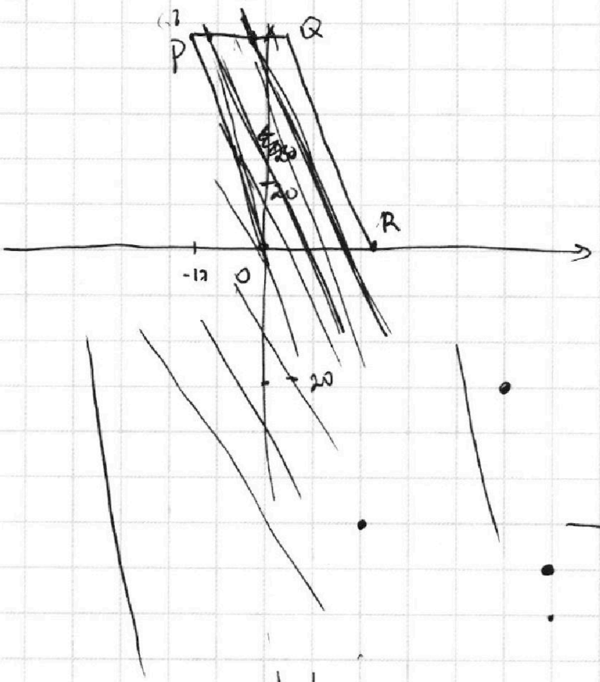
$4x-y-20=-a \qquad y=4x-20+a.$

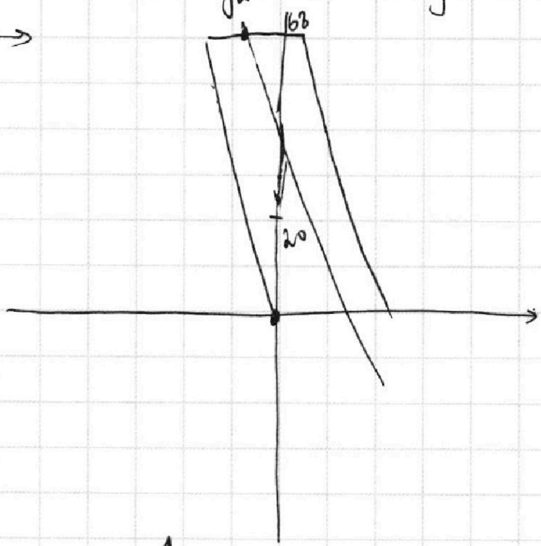
$4x_2+4x_1+y_2-y_1=40$

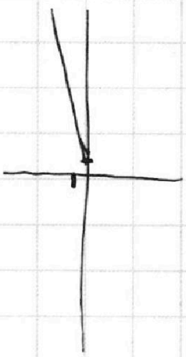
$4x_2+y_2-20+4x_1-y_1-20=0$

$4x_1+y_1-20=a \quad y_1=-4x+20+a$

$4x_2+y_2-20=-a \quad y=-4x+20-a$







$xy=\frac{1}{6}$

$2a^5+8a-7=0$