МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 ~~Будто~~ Чтобы значение произведения abc было наименьшим, числа a, b, c не должны сод. никаких других простых множителей кроме 2, 3 и 5.

Пусть $a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}$, $b = 2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\beta_3}$, $c = 2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2}\cdot 5^{\gamma_3}$,

~~Произведение $(abc)^2$ сод $2^{7+13+14} = 2^{34}$~~ $(abc)^2 \geq 2^{34}\cdot 3^{43}\cdot 5^{75}$

по усл. $ab : 2^{7}\cdot 3^{11}\cdot 5^{14}$, $bc : 2^{13}\cdot 5^{13}\cdot 5^{18}$ $ac : 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43}$

$((abc)^2 = ab\cdot bc\cdot ac \geq 2^{34}\cdot 3^{43}\cdot 5^{75})$

пр-е abc сод. $2^{17}, 3^{22}, 5^{38}$ (иначе $(abc)^2 < 2^{34}\cdot 3^{43}\cdot 5^{75}$)

~~т.е. $(abc)^2 \geq 2^{34}\cdot 3^{43}\cdot 5^{75}$~~

$abc \geq 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{38}$

~~приведем пример, когда достиг. оценка:~~

1) $\begin{cases}\alpha_1+\beta_1=7\\ \beta_1+\gamma_1=13\\ \alpha_1+\gamma_1=14\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha_1=4\\ \beta_1=3\\ \gamma_1=10\end{cases}$ | $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=17$, Пример: ~~значит~~ abc может сод. в себе 2^{17}

2) $\begin{cases}\alpha_2+\beta_2=12\\ \beta_2+\gamma_2=15\\ \alpha_2+\gamma_2=17\end{cases}$ $\alpha_2-\beta_2=2$, $2\alpha_2=14$, $\alpha_2=7$ $\beta_2=5$ $\gamma_2=10$

$\alpha_2+\beta_2+\gamma_2=22$, пример. $\begin{cases}\alpha_2=7\\ \beta_2=5\\ \gamma_2=10\end{cases}$ | abc может сод. в себе 3^{22}

~~$\alpha_3+\beta_3+\gamma_3=38$~~

3) $\begin{cases}\alpha_3+\beta_3=15\\ \beta_3+\gamma_3=18\\ \alpha_3+\gamma_3=43\end{cases}$ ~~т.к. $\alpha_3,\beta_3,\gamma_3\in N$, вычитание $\alpha_3-\beta_3=26$, $2\alpha_3=40$, $\alpha_3=20$, то $\alpha_3\leq 14$, $\gamma_3\leq 18$, $\alpha_3+\gamma_3\leq 32$~~

$\alpha_3+\beta_3+\gamma_3=38$
$\alpha_3+\gamma_3=43>38$ | $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ сист. $\varnothing$ при $\alpha_3,\beta_3,\gamma_3\geq 0$ и послед. рав-во не может достигаться

тогда $\alpha_3+\gamma_3+\beta_3\geq 43$, пусть $\begin{cases}\alpha_3+\beta_3=22\\ \beta_3+\gamma_3=21\\ \alpha_3+\gamma_3=43\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha_3=22\\ \gamma_3=21\\ \beta_3=0\end{cases}$

оценка, что abc сод 5^{38} не достигается и abc сод. 5^{43} (при $a = 2^{4}\cdot 3^{7}\cdot 5^{22}$, $b = 2^{3}\cdot 3^{5}\cdot 5^{0}$, $c = 2^{10}\cdot 3^{10}\cdot 5^{22}$)

$abc = 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 $5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

т.к. $\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}$, то $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$

$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\frac{5\pi}{2} - 5\arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\pi - 5\arcsin(\sin x) = x$

посмотрим на изнач. уравнение $0 \le \arccos(\sin x) \le \pi$

$0 \le 5\arccos(\sin x) \le 5\pi$

$\Rightarrow$ лев. ч. $\in [0; 5\pi]$, значит и правая часть $\in [0; 5\pi]$:

$0 \le \frac{3\pi}{2} + x \le 5\pi$

$-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$

1) $-\frac{3\pi}{2} \le x < -\frac{\pi}{2}$: $\arcsin(\sin x) = -x - \pi$

$5\arcsin(\sin x) = \pi - x$

$5(-x - \pi) = \pi - x$

$-5x - 5\pi = \pi - x$

$4x = -6\pi$

$x = -\frac{3\pi}{2}$, уд. усл. $-\frac{3\pi}{2} \le x < -\frac{\pi}{2}$

2) $-\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}$ $\arcsin(\sin x) = x$

$5x = \pi - x$

$6x = \pi$

$x = \frac{\pi}{6}$, уд. усл. $-\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}$

3) $\frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2}$, $\arcsin(\sin x) = -x + \pi$

$5(-x + \pi) = \pi - x$

$-5x + 5\pi = \pi - x$

$4x = 4\pi$

$x = \pi$, уд. усл. $\frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2}$

4) $\frac{3\pi}{2} \le x < \frac{5\pi}{2}$ $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$

$5(x - 2\pi) = \pi - x$

$5x - 10\pi = \pi - x$

$6x = 11\pi$

$x = \frac{11\pi}{6}$, уд. усл. $\frac{3\pi}{2} \le x < \frac{5\pi}{2}$

5) $\frac{5\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$: $\arcsin(\sin x) = -x + 3\pi$

$5(-x + 3\pi) = \pi - x$

$-5x + 15\pi = \pi - x$

$4x = 14\pi$

$x = \frac{7\pi}{2}$, уд. усл. $\frac{5\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 $\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$

Введем систему коорд-т xOy и постр. графики ур. системы

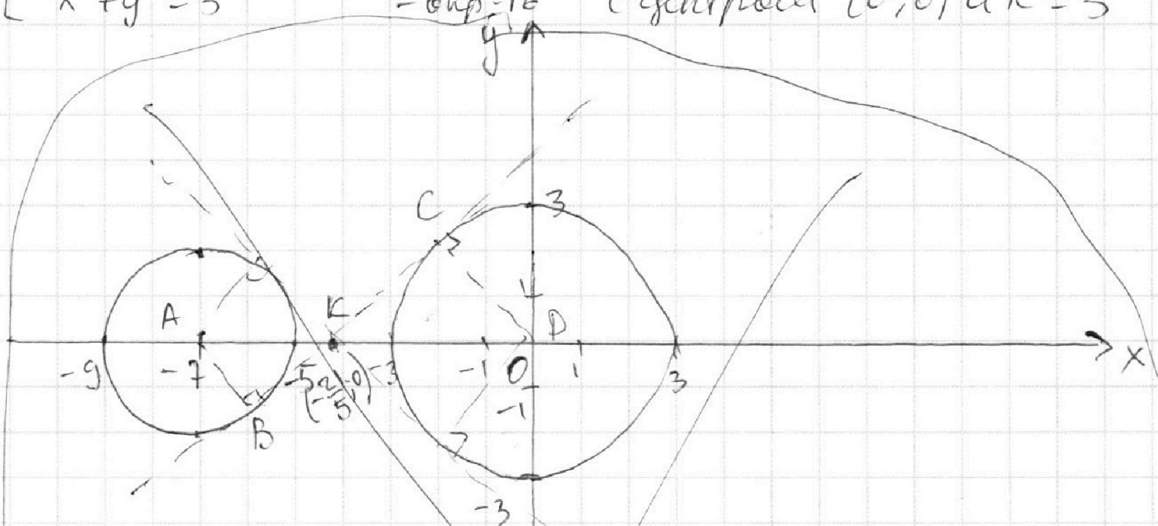
(1) при $a=0$ $x=7b$

при $a\neq 0$: $3ay=-x+7b$ (*)

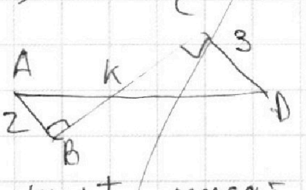
$y=-\frac{x}{3a}+\frac{7b}{3a}$ — прямая с коэф. угла наклона $-\frac{1}{3a}$ и своб. коэф. $\frac{7b}{3a}$

(2): $\left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2=3^2 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} (x+7)^2-49+y^2+45=0 \\ x^2+y^2=3^2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{array}\right.$ — окр-ть с центром $(-7;0)$ и $R=2$
— окр-ть с центром $(0;0)$ и $R=3$



т.к. нам нужно значения a, при которых ~~система~~ найдется такое b, что система будет иметь ровно 4 реш., то нужно посмотреть на значения угл. коэф. прямой (*) (своб. коэф-т мы можем регулировать с помощью b). Угл. коэф-ты, при которых две окр-ти имеют общ. касат. и угл. коэф-ты, по модулю превосходящие их, нам не подходят (т.к. при люб. знач. b не будет ровно 4 реш.). Касат. перп. радиусам. рассм. 2 подобных прям. Δ:



из подобия $\frac{AK}{KD}=\frac{2}{3}$ $AK=2d$, $KD=3d$

$AK+KD=5d=7$

$d=\frac{7}{5} \Rightarrow K\left(-\frac{21}{5};0\right)$

Пусть $y=kx+t$ — касат., проход. через $\left(-\frac{21}{5};0\right)$, тогда:

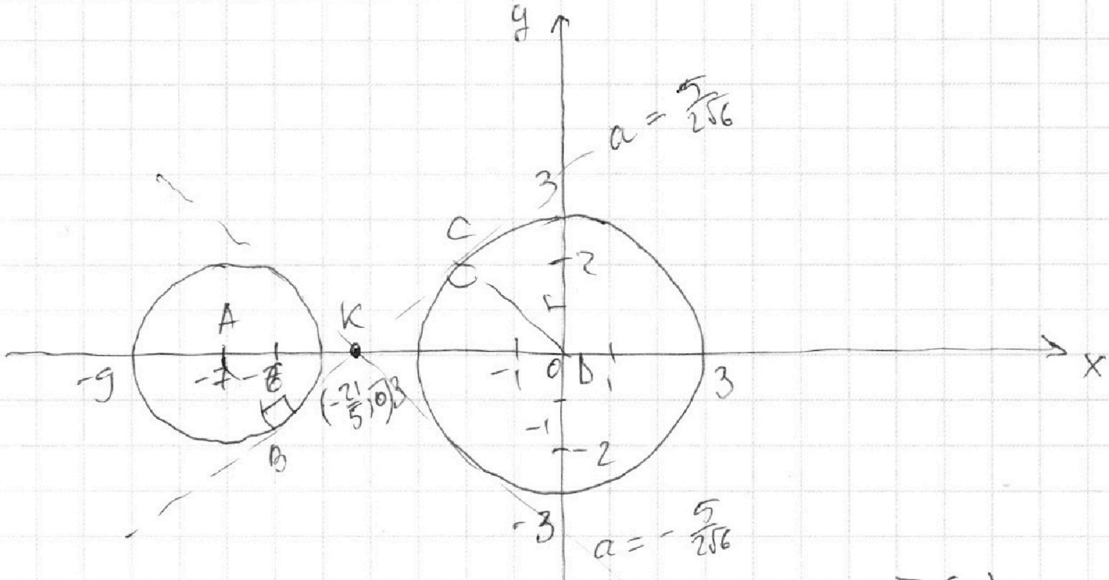
~~x^2+~~ $0=-\frac{21}{5}k+t \Rightarrow t=\frac{21}{5}k$, $y=\left(kx+\frac{21k}{5}\right)$

$x^2+\left(kx+\frac{21k}{5}\right)^2=3$

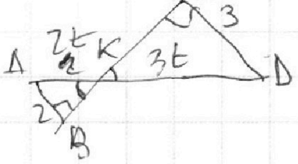
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



посмотрим на знач. угл. коэф. пр-й (x), при кот. найдется такое b, что сист. будет иметь ровно 4 реш. (своб. коэф. регулируется засчет b)



найдем пр-ю, ~~при кот.~~ явл. общ. кас. к окр-пям ~~A~~ $\triangle AKB \sim \triangle DKC$

$AK:KD=2:3$, $AK=2t$, $KD=3t$

$5t=7$ $t=\frac{7}{5}$ $KD=\frac{21}{5}$ $K(-\frac{21}{5};0)$

кас-е прох. через $(-\frac{21}{5};0)$. $y=kx+t$

$0=-\frac{21}{5}k+t \Rightarrow t=\frac{21}{5}k$

$y=kx+\frac{21}{5}k$

$x^2+(kx+\frac{21k}{5})^2=9$

$x^2+k^2x^2+\frac{42k^2}{5}x+\frac{21^2k^2}{5^2}-9=0$

$(k^2+1)x^2+\frac{42k^2}{5}x+\frac{21^2k^2}{5^2}-9=0$ кв. ур-е должно иметь един. реш.

$D=\frac{42^2k^4}{5^2}-4(k^2+1)(\frac{21^2k^2}{5^2}-9)=\frac{42^2k^4}{5^2}-4(\frac{21^2k^4}{5^2}-9k^2-9+\frac{21^2k^2}{5^2})=$

$=\cancel{\frac{42^2k^4}{5^2}}-\cancel{\frac{42^2k^4}{5^2}}+36k^2+36-\frac{42^2k^2}{25}=0$

$36k^2+36-\frac{42^2k^2}{25}=0$

$9+9k^2-\frac{21^2k^2}{25}=0$

$1+k^2-\frac{49k^2}{25}=0$

$25+25k^2-49k^2=0$

$25=24k^2$

$k=\pm\frac{5}{\sqrt{24}}=\pm\frac{5}{2\sqrt6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

при $|a| > \frac{5}{2\sqrt{6}}$ система ~~будет~~ предоставит ~~не~~ 4 иметь ровно 4 реш.
(при люб. b)

при $a = 0$ $x = 7b$ (вертик. прямая) $\Rightarrow$ < 4 реш.

при $-\frac{5}{2\sqrt{6}} < a < 0$ и $0 < a < \frac{5}{2\sqrt{6}}$ найдется такое b, что система будет иметь ровно 4 реш.
(по 2 точки пересеч. с каждой из окр-тей)

Ответ: $\left(-\frac{5}{2\sqrt{6}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5}{2\sqrt{6}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4$ $\quad x>0,\ x\neq\frac{1}{6}$

$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2\log_7 6x} - 4$

пусть $\log_7(6x)=a$, $6x=7^a$, $x=\frac{7^a}{6}$

тогда $a^4-\frac{2}{a}=\frac{3}{2a}-4 \mid \cdot 2a$

$2a^5-4=3-8a$

$2a^5+8a-7=0$

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$ $\quad y>0,\ y\neq 1$

$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2\log_7 y} - 4$

$\log_7 y = b$ $\quad y=7^b$, тогда $xy=\frac{7^{a+b}}{6}$,

$b^4+\frac{6}{b}=\frac{5}{2b}-4 \mid \cdot 2b$ $\quad$ т.е нужно найти все возм. значения $a+b$ из системы:

$2b^5+12=5-8b$

$2b^5+8b+7=0$

$\begin{cases} 2a^5+8a-7=0\\ 2b^5+8b+7=0\end{cases}$ $\quad 2(a^5+b^5)+8(a+b)=0$

$\cancel{2(a+b)(a^4b-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)}$

т.к. $(a^5+b^5)\,\vdots\,(a+b)$, то возможен случай, когда $a+b=0$, тогда $xy=\frac{1}{6}$

$((a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)+4(a+b))=0$

$\left[\begin{array}{l} a+b=0\\ a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4=-4\end{array}\right.$

Рассм. $f(b)=2b^5+8b+7$

$f'(b)=10b^4+8>0$ при люб. $b \Rightarrow$

$f(b)$ монотонно возр., ур-е $f(b)=0$ имеет ровно 1 решение

Рассм. $f(a)=2a^5+8a-7$ $\quad f'(a)=10a^4+8>0$ при люб. $a \Rightarrow f(a)$ — монотонно возрастает $\Rightarrow$ ур-е $f(a)=0$ имеет един. решение, тогда для $a+b$ есть един. возможное значение и $a+b=0$, $xy=\frac{7^0}{6}=\frac{1}{6}$

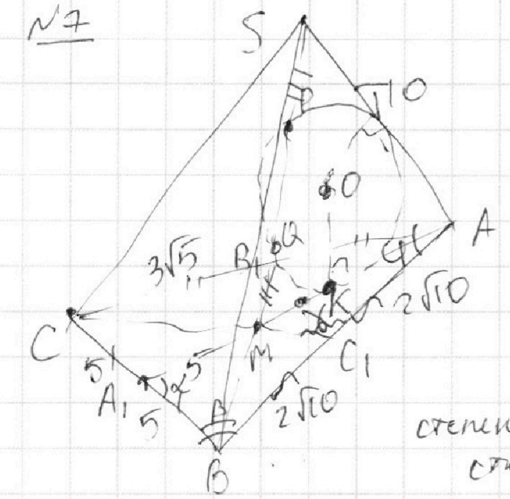
Ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7



$SP = MQ$; $SA = BC = 10$

$S_{ABC} = 60$

1) Рассм. пл-ть (SAM): сечением сферы этой пл-ю явл. окр-ть, AM и SA — касат. $AT = AK$ (кас-е, провед. из 1 точки)

степень (·) M отн. окр-ти: $MK^2 = MQ \cdot MP$

степень (·) S) отн окр-ти $ST^2 = SP \cdot SQ$

т.к. $SP = MQ$, то

$ST = MK$, $SA = AM = 10$

$AM = \frac{2}{3} AA_1 \Rightarrow AA_1 = 15$ (по св-ву точки перес. медиан △)

2) $S_{CA_1A} = S_{AA_1B} = \frac{60}{2} = 30$ т.к. AA_1 — медиана $\triangle ABC$

$\angle AA_1B = \alpha$ $\quad 30 = \frac{1}{2} \cdot AA_1 \cdot A_1B \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 5 \cdot \sin\alpha$

$2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

по т. cos. в $\triangle AA_1B$ $AB^2 = 15^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cos\alpha = 225 + 25 - \cancel{150}^{30} \cdot \frac{3}{\cancel{5}} = 250 - 90 = 160$

$AB = 4\sqrt{10}$ $\quad BC_1 = 2\sqrt{10} = AC_1$

~~по~~ $S_{CC_1B} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 30$, $\angle CBC_1 = \beta$

~~по ф~~ $S_{CBC_1} = 30 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sin\beta$

$\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ $\quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

по т. cos в $\triangle CBC_1$: $CC_1^2 = 10^2 + 40 - 2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 140 - 40 = 100$

$CC_1 = 10$

по т. cos в $\triangle ABC$ $AC^2 = 10^2 + 160 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 100 + 160 - 80 = 180$

$AC = 3\sqrt{20} = 3 \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

$AB_1 = B_1C = 3\sqrt{5}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin\varphi = 60 = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{10} \cdot \sin\varphi$

$5 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \sin\varphi$

$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

в $\triangle AB_1B$ по т. cos $BB_1^2 = 9 \cdot 5 + 160 - 2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

прод-е N7

$BB_1^2 = 45+160 - 24\cdot 5 = 45+160-120 = 40+45 = 85$

$BB_1 = \sqrt{85}$ ~~th~~

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \sqrt{85} \cdot 15 \cdot 10 = 150\sqrt{85}$

Ответ: $150\sqrt{85}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2+\left(kx+\frac{21k}{5}\right)^2=9$$

$$x^2+k^2x^2+\frac{42k^2}{5}x+\frac{21^2k^2}{25}=9$$

$$(k^2+1)x^2+\frac{42k^2}{5}x+\frac{21^2k^2}{25}-9=0$$

$$D=\frac{42^2k^4}{25}-4(k^2+1)\left(\frac{21^2k^2}{25}-9\right)=$$

$$=\frac{42^2k^4}{25}-4\left(\frac{21^2k^4}{25}-9-9k^2+\frac{21^2k^2}{25}\right)=$$

$$=36+36k^2-\frac{42^2k^2}{25}=0$$

$3^2\cdot 7^2$

$$9+9k^2-\frac{21^2k^2}{25}=0$$

$$1+k^2-\frac{7^2k^2}{25}=0$$

$$25+25k^2-49k^2=0$$

$$25=24k^2$$

$$k=\pm\frac{5}{\sqrt{24}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_7(6x) = a \qquad \log_7 y = b$

$6x = 7^a \qquad y = 7^b \qquad 6xy = 7^{a+b}$

$a+b-?$ $\qquad xy = \frac{7^{a+b}}{6}$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2a} - 4 \quad \Big| \cdot 2a \\ b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4 \end{cases}$$

$2a^5 - 4 = 3 - 8a$

$2a^5 + 8a - 7 = 0$

$2b^5 + 12 = 5 - 8b$

$$\begin{cases} 2b^5 + 8b + 7 = 0 \\ 2a^5 + 8a - 7 = 0 \end{cases}$$

$2(a^5+b^5) + 8 \cdot (a+b) = 0$

$a+b=0 \qquad xy = \frac{1}{6}$

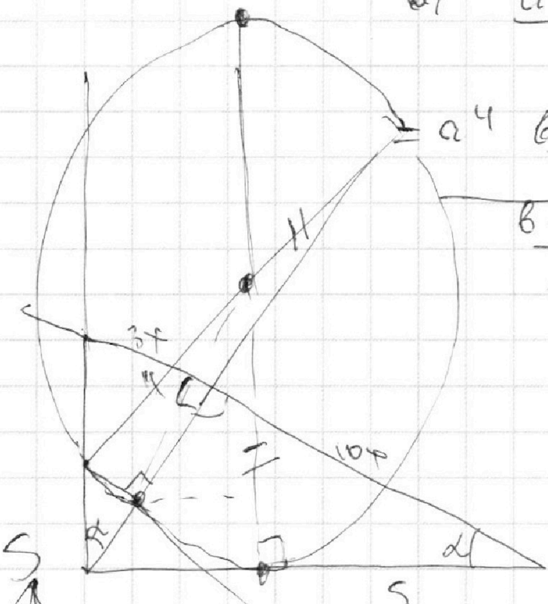
$a^5+b^5 \,\big|\, \frac{a+b}{a^4}$

$b_1 = a^4 \qquad q = \frac{b}{a}$

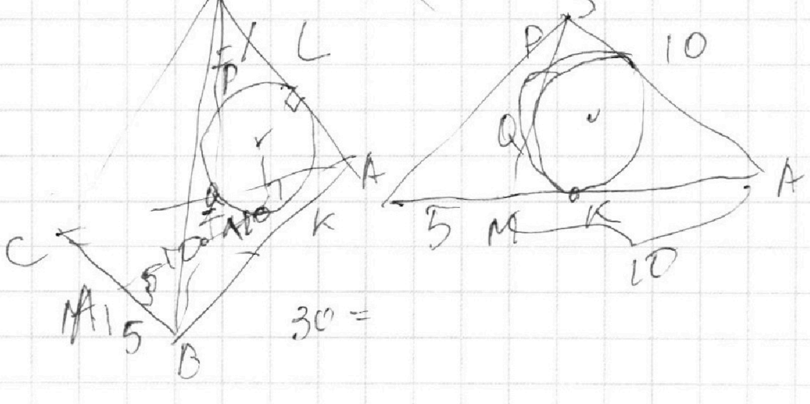
$b_1 \quad \dfrac{a^4\left(\left(\frac{b}{a}\right)^5 - 1\right)}{\frac{b}{a} - 1}$

$a^4 \dfrac{\frac{b^5 - a^5}{a^5}}{\frac{b-a}{a}}$

$10b^4 + 8 > 0$



$15^\circ \quad \frac{19}{\sqrt{2}}$



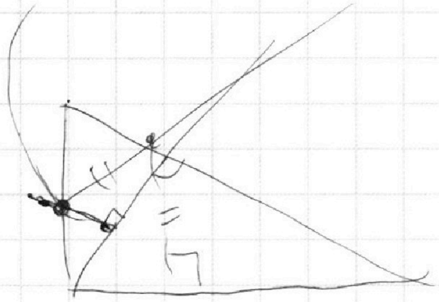
$30 =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик $\quad -x+b$

$(x+7)^2+(b-x)^2=4$

$x^2+14x+49+x^2+b^2-2bx-4=0$

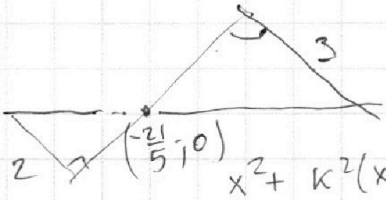
$2x^2+x(14-2b)+45+b^2=0$

$D=(2b-14)^2-4\cdot2(45+b^2)=4b^2-56b+196-360-8b^2=$

$=-4b^2-56b+196=0 \ |:(-4)$

$y=kx+t$

$b^2+14b-49=0$



$y=kx+t=kx+\frac{21}{5}k=k(x+\frac{21}{5})$

$0=-\frac{21}{5}k+t$

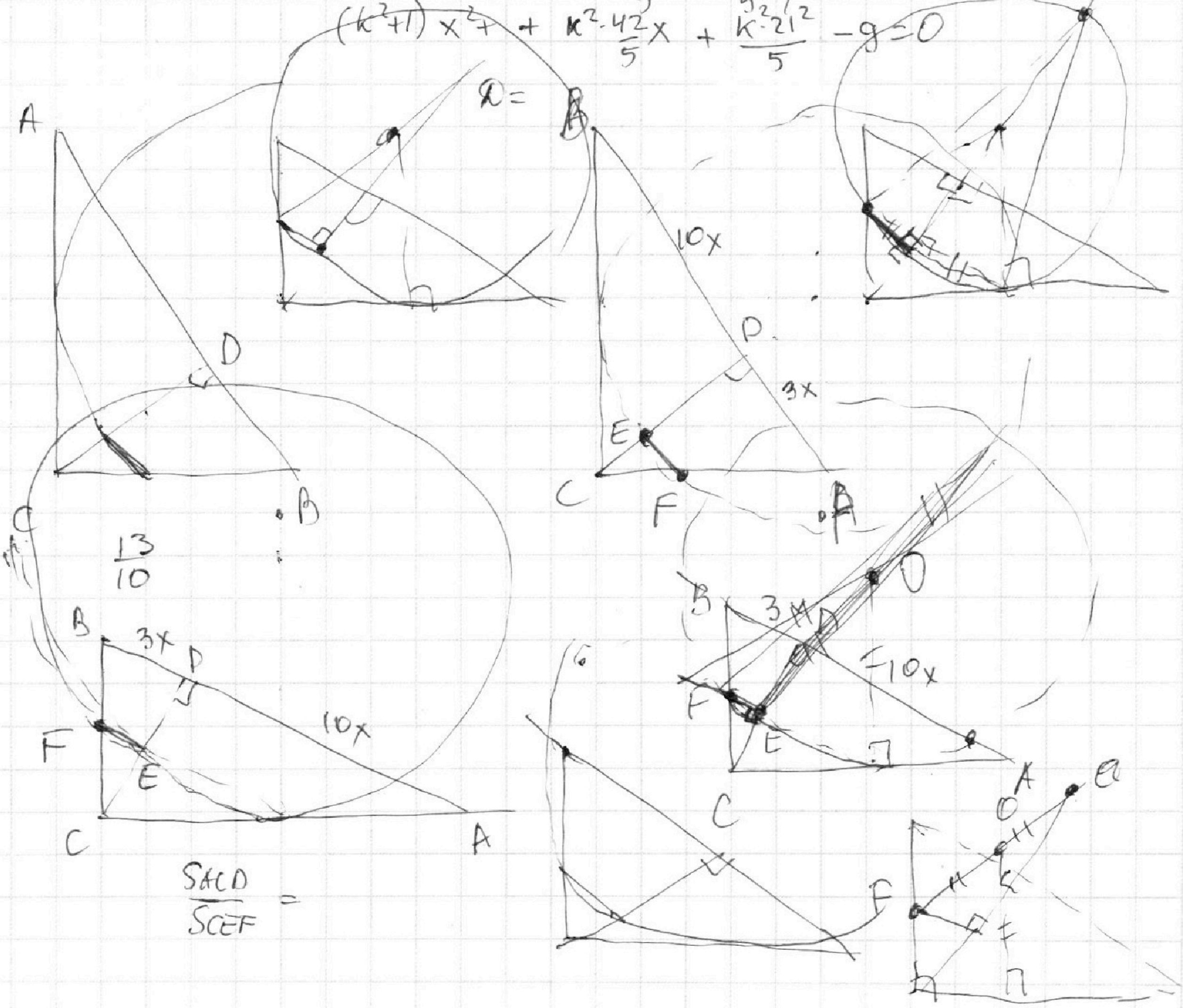
$t=\frac{21k}{5}$

$x^2+k^2(x+\frac{21}{5})^2=9$

$x^2+k^2(x^2+\frac{42}{5}x+\frac{21^2}{5^2})=9$

$(k^2+1)x^2+k^2\cdot\frac{42}{5}x+\frac{k^2\cdot21^2}{5}-9=0$

$D=$



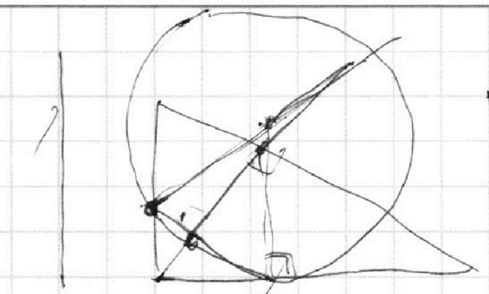
$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}=$

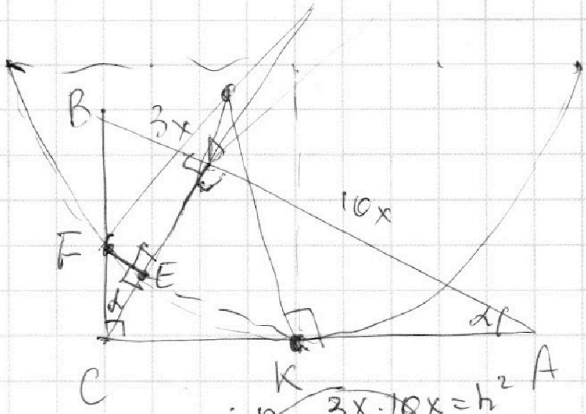
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

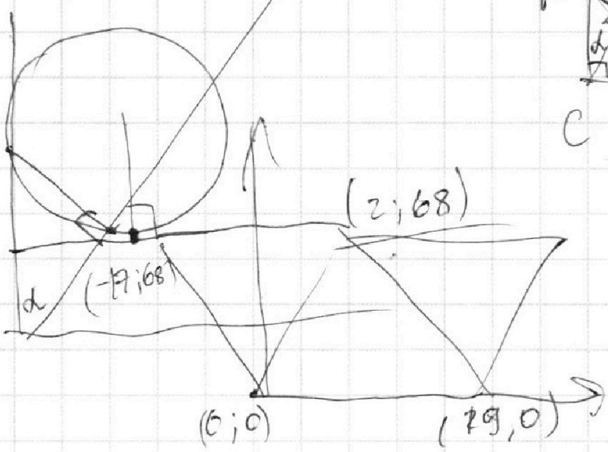
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

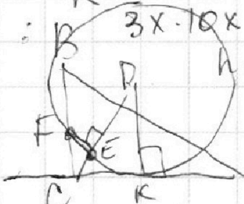






$3x\cdot 10x = h^2$

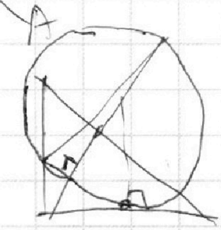
$h = x\sqrt{30} = CD$



$\log_7(6x) = t$

$6x = 7^t$

$x = \frac{7^t}{6}$



$xy \quad \log_7^4 y + 6\log_4 7 = \frac{5}{2}\log_y 7 - 4$

$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2\log_7 y} - 4$

$2\log_7^5 y + 12 = 5 - 8\log_7 y \qquad t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 4$

$10\log_7^5 y$

$2t^5 + 12 = 5 - 8t$

$2t^5 + 8t + 7 = 0$

$\frac{1}{\log_4^4 7} + 6\log_y 7 = \frac{5}{2}\log_4 7 - 4$

$\frac{1}{t^4} + 6t = \frac{5t}{2} - 4 \,|\, 2t^4$

$2 + 8t^5 = 5t^4 - 8t^4$

$2 + 8t^5 = -3t^4$

$2 \pm 32\cdot 8 = -3\cdot 2^4$

$\frac{1}{t^4} + 6t = \frac{5t}{2t} - 4 \,|\, 2t^4$

$2 + 8t^5 = 5t^5 - 8t^4$

$y_2 - y_1 = -4x_2 + 4x_1 - 40 \qquad 4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$

$\Delta y = 40 - 4\Delta x$

$0 \le |\Delta x| \le 19 \quad |\Delta y| \le 68$

$24 \cdot 5 = 120$

$85 \,|\, 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1 черновик

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$ $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$ $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$

$ab = 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3} \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$bc = 2^{\beta_1+\gamma_1} \cdot 3^{\beta_2+\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3+\beta_3} \vdots 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

$ac = 2^{\alpha_1+\gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2+\gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3+\gamma_3} \vdots 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$\alpha_1+\beta_1 = 7$

$(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$

a b c

$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 = 7 \\ \beta_1+\gamma_1 = 13 \\ \alpha_1+\gamma_1 = 14 \end{cases}$ $2\alpha_1 = 8$ $\alpha_1 - \beta_1 = 1$ $\alpha_1 = 4$, $\beta_1 = 3$, $\gamma_1 = 10$

$\begin{cases} \alpha_2+\beta_2 = 11 \\ \beta_2+\gamma_2 = 15 \\ \alpha_2+\gamma_2 = 17 \end{cases}$ $\alpha_2 - \beta_2 = 2$ $2\alpha_2 = 13$

$26+17=43$; $18+14=32$, $32+43=75$; $17+15=32$, $32+11=43$; $32+43=75$; $76:2=38$

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

~~$\arccos(\sin x) = \frac{\frac{3\pi}{2}+x}{5}$~~

$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

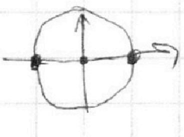
$\frac{5\pi}{2} - 5\arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

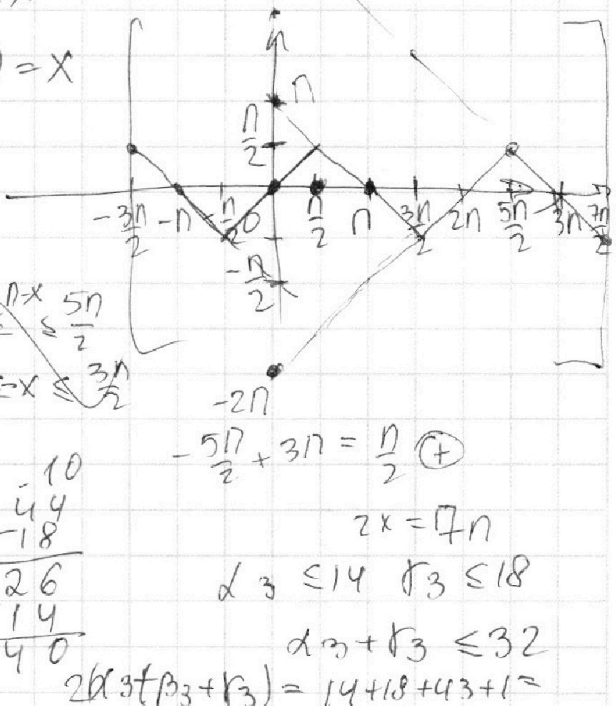
$\pi - 5\arcsin(\sin x) = x$

о.д.з. $\in [0; 5\pi]$

$0 \le \frac{3\pi}{2} + x \le 5\pi$

$-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$

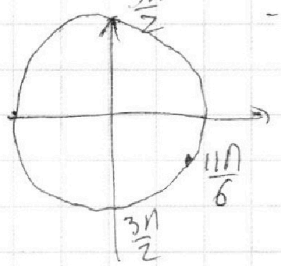




$\pi - x = 5\underbrace{\arcsin(\sin x)}$ $\le \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{5\pi}{2}$

$-\frac{7\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$



$-\frac{5\pi}{2} + 3\pi = \frac{\pi}{2}$ (+)

$44-18=26$, $26+14=40$

$2x = 7\pi$

$\alpha_3 \le 14$ $\gamma_3 \le 18$

$\alpha_3 + \gamma_3 \le 32$

$2(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3) = 14+18+43+1 = 76$

$\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 = 38$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

черновик

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2=(6x)^2}343 - 4$ $\begin{cases} x>0 \\ x\neq\frac{1}{6}\end{cases}$

$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2}\log_{6x}7 - 4 = \frac{3}{2\log_7(6x)}$

$343 : 7 = 49$; -28; 63

$\log_4(6x) = t$ $t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \mid 2t$

$2x^2 + x(14-2b) + b^2 + 45 = 0$ $2t^5 - 4 = 3 - 8t$

$D = (14-2b)^2 - 4\cdot 2(b^2+45)$ $2t^5 + 8t - 7 = 0$

$= 196 - 56b + 4b^2 - 8b^2 - 360 = 0$

$(x+7)$
$x^2 + 14x + (b-x)^2 + 45 = 0$
$x^2 + 14x + b^2 + x^2 - 2bx + 45 = 0$
$2x^2 + 14x - 2bx + b^2 + 45 = 0$
$D = 14^2 - 4\cdot 2$

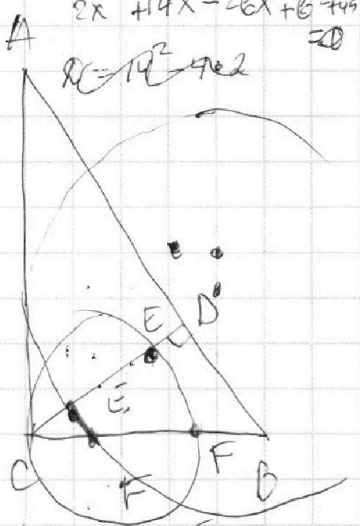
$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2\log_7(6x)} - 4$

$14 \times 14 = 56 + 14 = 196$; $45 \times 8 = 360$

$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$

$2t^5 - 4 = 3 - 8t$

$2t^5 + 8t - 7 = 0$



$\log_7^4 y + \frac{6\log}{\log_7 y} = \frac{5}{2\log_7 y} - 4$

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 4 \mid 2t$

$2t^5 + 12 = 5 - 8t$

$2t^5 + 8t + 7 = 0$

$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ \left[\begin{array}{l}(x+7)^2 - 49 + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 = 3^2\end{array}\right.\end{cases}$ $\begin{cases} a=0: x = 7b \text{ – не ок} \\ a\neq 0: y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a} \text{ – люб.} \\ \left[\begin{array}{l}(x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2\end{array}\right.\end{cases}$

$a = 1$ $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7b}{3}$

$a = 2$ $-\frac{1}{6}x + \frac{7b}{6}$

$x^2 + (b-x)^2 = 9$

$x^2 + b^2 + x^2 - 2bx = 9$

$2x^2 - 2bx + b^2 - 9 = 0$

$D = 4b^2 - 4\cdot 2(b^2 - 9) =$

$= -4b^2 + 36 = 0$

$b^2 = 18$

$b = \pm 3\sqrt{2}$

$4b^2 - 8b^2$