МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 15

1. [3 балла] Вася строит башни из кубиков. Когда он построил N башен по 22 кубика, у него осталось 3 кубика. После чего он из всех своих кубиков построил $N-1$ башню так, что во всех башнях кубиков оказалось поровну. Какое наибольшее количество кубиков могло быть у Васи, если известно, что их меньше 300?

2. [4 балла] Решите неравенство
$$\left|x^2+7x+12\right|+\left|x^2+2x-8\right| \leqslant |5x+20|.$$

3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению
$$x^2+3x+3=6^y.$$

4. [5 баллов] Вокруг равнобедренного треугольника ABC $(AB=BC)$ описана окружность Ω. Прямая, содержащая биссектрису AD треугольника ABC, пересекает повторно Ω в точке E. Найдите периметр четырёхугольника $ABEC$, если известно что площади треугольников BED и CED равны 5 и 6 соответственно.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует значение параметра b такое, что уравнение $5x^2+(2a+9)x+7a-10b=0$ имеет два корня x_1 и x_2 таких, что $5 \leqslant x_1 \leqslant 10$ и $14 \leqslant x_2 \leqslant 15$.

6. [5 баллов] Кузнечик прыгает по целочисленным узлам координатной сетки. За один шаг он может либо переместиться на одну клетку вверх или вправо, если при этом он попадает в точку, в которой не был раньше; либо вернуться на один шаг назад по уже пройденному пути – соответственно, вниз или влево. Сколько существует различных путей с началом в точке $O(0;0)$ и концом в точке $A(3;5)$ таких, что в точку A кузнечик попадает не более чем за 10 шагов? (Достигая точки A, кузнечик останавливается.)

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=7{,}5$, $XY=15$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Из условия следует, что у Васи $22N+3$ кубика.
К тому же это число делится на $N-1$
$(22N+3)\vdots(N-1) \Leftrightarrow (22N+3)-22(N-1)\vdots(N-1) \Leftrightarrow 25\vdots(N-1)$
Т.к. $25=5^2$, N может быть равно только 2, 6 и 26
При $N=26$ $22N+3=572>300$, что не соответствует условию.
При $N=6$ $22N+3=135<300$, что соответствует условию.

Ответ: 135 кубиков

Разложим квадратные трехчлены и вынесем множитель из-под модуля:

$|(x+3)(x+4)|+|(x+4)(x-2)| \leq 5|x+4|$ Заметим, что при $x=-4$ неравенство выполняется.
При $x \neq -4$ можно сократить на $|x+4|$ (учитывая, что все множители положительны)
Имеем:
$|x+3|+|x-2| \leq 5$ Решим данное неравенство методом интервалов:

1) $x \leq -3$ $\quad -1-2x \leq 5 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x=-3$
2) $-3<x<2$ $\quad 5 \leq 5 \Rightarrow -3<x<2$
3) $x \geq 2$ $\quad 2x+1 \leq 5 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x=2$

Итого $x \in \{-4\} \cup [-3;2]$
Ответ: $x \in \{-4\} \cup [-3;2]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

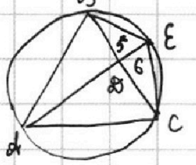
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Пусть R - радиус окружности, а угол при основании равен 2α, тогда $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$ $\angle BDA = 2\alpha$ $\angle ACD = 3\alpha$ $\angle ABD = 180 - 3\alpha$.~~
~~Зная, что $S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$, получаем, что~~

Заметим, что при любом x левая часть равенства — целое число. Следовательно $y \geq 0$. Пусть $y > 0$, тогда левая часть равенства кратна трем, тогда $x \vdots 3$. Пусть $x = 3x_1$, сократив на 3 имеем: $3x_1^2 + 3x_1 + 1 = 2 \cdot 6^{y-1}$. Левая часть не кратна 3, а значит $y - 1 = 0$. Получаем квадратное уравнение $3x_1^2 + 3x_1 - 1 = 0$, корни которого, $\frac{\pm\sqrt{21} - 3}{6}$, иррациональны и не подходят условию. Рассмотрим $y = 0$. Получим квадратное уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$, которое имеет 2 целых корня: $x = -2; -1$

Ответ: $(-2; 0)$; $(-1; 0)$



Треугольники $\triangle BED$ и $\triangle EDC$ имеют одинаковую высоту. Значит их площади относятся как их основания: $\frac{BD}{DC}=\frac{5}{6}$. По свойству биссектриссы треугольника $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{6}$.
Так как $AB=BC$ вычисляем, что $AC=\frac{6}{5}AB$,
$BD=\frac{5}{11}AB$ и $DC=\frac{6}{11}AB$. Из вписанности следует, что $\angle DBE=\angle AEAC=\angle BAE$, то есть $\triangle BED \sim \triangle ABE$ по 2 углам. Делаем вывод, что $\frac{DE}{BE}=\frac{BE}{AE}=\frac{BD}{AB}=\frac{5}{11}$.
Наконец, по свойству пересекающихся хорд:
$AD\cdot DE=\frac{96}{55}\cdot\frac{5}{11}BE^2=BD\cdot CD=\frac{5}{11}\cdot\frac{6}{11}AB^2 \Rightarrow BE=AB\frac{\sqrt{5}}{4}$ (вычисления опущены) Найдем неизвестные стороны по формуле Герона для $\triangle BEDC$ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=11$

~~$BD=\frac{5}{11}AB$ $BE=\frac{1}{4}AB$ $DE=\frac{5}{44}AB$ Удобно выра Пусть $AB=44x$, тогда $BD=20x$ $BE=11x$ $DE=5x$~~
~~$S=\sqrt{18x}$ $BD=\frac{5}{11}AB$ $BE=\frac{\sqrt{5}}{4}AB$ $ED=\frac{5\sqrt{5}}{44}AB$ $S=$~~
~~Проведя вычисления, получим~~

$BE=BCE=\frac{\sqrt{5}}{4}BC$ $S=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2BC^4}=\frac{1}{4}BC^2=11 \Rightarrow BC=2\sqrt{11}$
Теперь можно вычислить P_{ABEC} (периметр данного четырехугольника) $=AB+BE+EC+AC=$
$=BC+2\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}BC+\frac{6}{5}BC=\frac{22\sqrt{11}+5\sqrt{55}}{5}$

Ответ: $\frac{22\sqrt{11}+5\sqrt{5}-5}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Корни квадратного уравнения определяются двумя параметрами → средним $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ и разностью $\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\right)$, где a, b, c - коэффициенты квадратного ~~трехчле~~ уравнения.

В нашем случае можно заметить, что ~~ох~~ ~~разнос~~ среднее корней не зависит от b, зато выражение под корнем в их разности будет зависеть от b линейно ($D = 4a^2+8a+81+40b$), то есть, при заданном a ~~[illegible]~~ разность корней может принимать любые значения от 0 до $+\infty$, в то время, как ~~ср~~ среднее остается неизменным.

Пусть $m = -\frac{2b}{a} = -\frac{2a+9}{10}$ - среднее корней.

Очевидно, что ~~при~~ если $m-5 < 14-m$ или $m-10 > 15-m$ невозможно подобрать разность корней так, чтобы они удовлетворяли условию, а при остальных m это возможно.

Решаем систему ~~уравнений~~ неравенст

$$\begin{cases} -\frac{2a+9}{5} \geq 19 \\ -\frac{2a+9}{5} \leq 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq -43 \\ a \geq -58 \end{cases}$$

Получаем $a \in [-58; -43]$

Ответ: $a \in [-58; -43]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для начала заметим, что минимальный путь кузнечика составляет 8 ходов. Также видно, что „лишние" ходы не изменяют четности этого количества, так как они выглядят, как вверх-вниз или влево-вправо, возвращая его в исходную точку. Следовательно, в любом маршруте кузнечика таких пар „лишних" ходов либо 0, либо 1. Более того, ~~к~~ каждому маршруту с лишними ходами соответствует единственный маршрут без них (получается удалением пары „лишних" ходов) а каждому маршруту без них - 8 маршрутов с ними (перед любым из 8 ходов можно добавить „лишнюю" пару в перпендикулярном ему направлении)

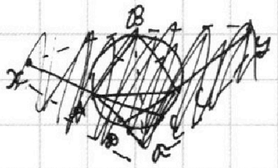
Очевидно, что число маршрутов из 8 ходов равно количеству способов выбрать 3 вертикальных хода из 8, то есть $C_8^3 = 56$. Количество маршрутов из 10 ходов $= 56 \cdot 8 = 448$, а общее их число, следовательно $56 + 448 = 504$

Ответ: 504 пути

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

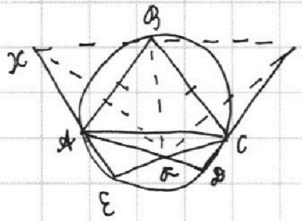


Заметим, что ~~угол~~ $\angle BCY = \angle BAF$ (из вписанности), из чего (в купе с равенством соответствующих сторон $AB = BC$, $AF = CY$) следует, что $\triangle ABF = \triangle BCY$.

Аналогично получаем $\triangle ABX = \triangle BCF$

То есть $BX = BY = BF$, а $\angle XBF = \angle BFY = \angle ABC$.
Так как $XY = 2BF = BX + BY$ видим, что $B \in XY$.
Более того $\angle XBF = 180°/2 = 90°$, а значит ~~XBY~~ $BXFY$ – треугольник с основанием XY и высотой BF. $S_{BXFY} = XY \cdot BF/2 = 56{,}25$

Ответ: 56,25



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$N \equiv 3 \pmod{22}$

$22N+3 \vdots (N-1)$ $\quad 25 \vdots N-1$ $\quad N=6$

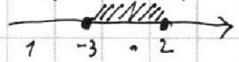
132 $\boxed{135}$

$\frac{300}{N-1}$ $\quad \frac{300}{22}=13\ldots > N$

$|x^2+7x+12|+|x^2+2x-8| \le |5x+20|$

$|(x+3)(x+4)|+|(x+2)(x-2)| \le 5|x+4|$

$\boxed{x=-4}$ $\quad |x+3|+|x-2| \le 5$



1) $-1-2x \le 5$ $\quad x \ge -3$

$\boxed{-3}$ $\quad$ 2) $5 \le 5$

$x \le 2$

$x \in [-3;2]$

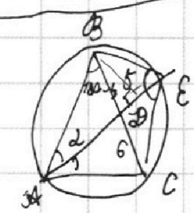
$x^2+3x+3=6^y$ $\quad x \vdots 3$ $\quad x=3x'$

$3x'^2+3x'+1=2 y 6^{y-1}$ $\quad y-1=0$ $\quad y=0$

3 $\quad \frac{\pm\sqrt{21}-3}{6}$

$x^2+3x+2=0$

$\frac{-3\pm1}{2}=-2;-1$



$2R\sin\alpha \cdot 2R\cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha/2 = 5$ $\quad 48$
$\sin 3\alpha$ $\quad 7$

$2R\cos\alpha$
$\sin 3\alpha$ $\cdot 2R\sin\alpha \cdot \sin 4\alpha/2 = 6$ $\quad 336$

$\frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{6}{5}$ $\quad \cos 2\alpha=\frac{3}{5}$ $\quad \sin 2\alpha=\frac{4}{5}$

$2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$2R^2(\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha)=5$ $\quad \sin^2 2\alpha=\frac{24}{25}$

$\frac{3\sqrt3}{4}$

$2\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt3}{4}$ $\quad 2R\sin\alpha\sin 3\alpha\sin 2\alpha = \frac{24}{125}\cdot\frac{3}{5}-\frac{7}{25}\cdot\frac{4}{5}=\frac{44}{125}$ $\quad \cos 2\alpha=-\frac{7}{25}$

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos^2\alpha}{2}}$ $\quad \sin 4\alpha=-\frac{336}{625}$

$=\frac{\sqrt{17}}{5}$ $\quad \sin\alpha=\frac{2\sqrt2}{5}$

$R=\sqrt{\frac{4\cdot 24\cdot 44\cdot 2}{2^8\cdot 3\cdot 11}}=\frac{125}{816}\sqrt{\frac{5}{33}}$

$\frac{2\sqrt2}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{17}}{5}\cdot\frac{4}{5}R=$

~~$\frac{6\sqrt2+4\sqrt{17}}{25}$~~

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{4}{5}}$

$2R(\sin 2\alpha+2\sin\alpha+\sin 4\alpha)$

$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{5}}$

$\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\frac{3}{5}+\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot\frac{4}{5}=\frac{11}{5\sqrt5}$ $\quad R=\frac{25\sqrt5\cdot5\cdot5\sqrt5}{2\cdot2\cdot3\cdot11}=\frac{625}{132}$

$2R(2\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha)$

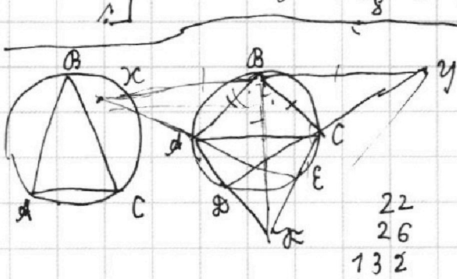
$\frac{625}{132}\left(\sqrt{\frac{4}{5}}+\frac{24}{25}\frac{4}{5}+\frac{11}{5\sqrt5}\right)$

$x=-\frac{2a+9}{10}\in(9{,}5;12{,}5)$ $\quad 4a^2+3\cdot6a+81-28a+40b$ $\quad \frac{625}{66}$ $\quad \frac{21+4\sqrt5}{5\sqrt5}=\boxed{\frac{25(21\sqrt5+20)}{66}}$

$\frac{19}{2}\le-\frac{2a+9}{10}\le\frac{25}{2}$ $\quad 8$ $\quad C_8^3\cdot5=5\cdot8\cdot7=280$

$86\le-2a\le116$

$\boxed{-58\le a\le-43}$



$BE\cdot XY/2=\frac{7{,}5}{7{,}5}$ $\quad \frac{121}{16}=$

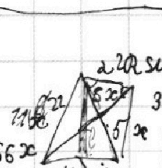
$37{,}5$ $\quad 726$ $\boxed{1936}$

$52{,}5$ $\quad 121$

$56{,}25$ $\quad \frac{121}{16}$

1207

$2R\sin\alpha$



$36x$ $\quad \frac{5}{6}$ $2R$

$66x$ $\quad 30x$

$55x$

22
26
132
44
572

$\cos 2\alpha=\frac{5}{22}$ $\quad 17$

7119

1207

$2R\sin\alpha\cdot 2R\sin 2\alpha\cdot\frac{6}{11}\cdot\sin\alpha/2=6$ $\quad \cos\alpha=\sqrt{\frac{3}{11}}\sqrt{\frac{27}{44}}$

$R=R^2=\frac{11}{2\sin^2\alpha}=\sqrt{\frac{11\cdot44^2}{2\cdot17\cdot71}}$

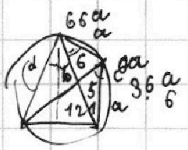
$\sqrt{30}\,x\sqrt{11^2-6^2}=\sqrt{30}\sqrt{5\cdot17}\,x=5x$ $\quad \sin\alpha=\sqrt{\frac{17\cdot71}{44^2}}=\sqrt{\frac{1207}{1936}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



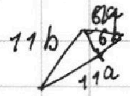
$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2} = \frac{5}{6}$ $\sin 2 = \frac{5}{12}$ $\cos 2 = \frac{\sqrt{119}}{12}$

51
51
51
255
2601
918
6 83

918
225
693

$30b^2 = 36a \cdot 85a$

$b^2 = 6 \cdot 17a$ $b = \sqrt{102}\, a$



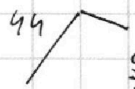
$6\sqrt{102} + 66 + 36 = 6\sqrt{102} + 102$

$\frac{11}{5} - \frac{5}{11}$

$(3\sqrt{102} + 51)(51 - 3\sqrt{102})(3\sqrt{102} - \cancel{17}15)(3\sqrt{102} + 15) =$

$(51^2 - 9 \cdot 102)(9 \cdot 102 - 15^2)$

$\frac{11}{5} - \frac{5}{11} = \frac{96}{55}$ $16 \cdot 83 \cdot 693 =$



$\frac{96}{55}$

$\left(\frac{20 + 16\sqrt{5}}{44}\right)\left(\frac{16\sqrt{5}}{44}\right)\left(\frac{20 + 5\sqrt{5}}{44}\right)\left(\frac{20 + 11\sqrt{5}}{44}\right)$

$\frac{2\sqrt{5}}{11} + 1$ $\frac{11 + 2\sqrt{5}}{22}$ $\frac{\sqrt{5}}{2} + 1$

$\frac{8}{44^2}\sqrt{(\cancel{20}\sqrt{5} + 420)(20 + 5\sqrt{5})(20 + 11\sqrt{5})}$ 5

$\sqrt{\left(\frac{11 + 2\sqrt{5}}{22}\right)\frac{2\sqrt{5}}{11}\left(\frac{2\sqrt{5} - 11}{22}\right)\frac{11}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$\frac{10\sqrt{5} + 40}{22^2}\sqrt{20 + 11\sqrt{5}}$

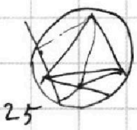
$80 + \cancel{44}\sqrt{5}$

$\cancel{320} + 176\sqrt{5}$

20

$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} + 2}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5} - 2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\, BC^2$

$\cancel{16} \frac{22 + \sqrt{5}}{10} \cdot 2\sqrt{11}$



$49 + 7 + 0{,}25$