МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 8

1. [4 балла] Решите уравнение
$$6\operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $13^{180} \cdot 17^{180}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$\ln^2(x-1) - (x-2)\ln(3x-3) + (\ln 3)\ln(x-1) \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом
$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}.$$
Найдите максимально возможное значение произведения xyz.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{15}$, $AD = DC = \sqrt{6}$, $AC = 2\sqrt{3}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$. Найдите:

   а) объём пирамиды;

   б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1.

$$ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos x\cdot\frac{\sqrt2}{2}+\sin x\cdot\frac{\sqrt2}{2}}{\sin x\cdot\frac{\sqrt2}{2}-\cos x\cdot\frac{\sqrt2}{2}}$$

$$ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}$$

$$6\,tg\,2x-1+ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$tg\,2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{2\sin x\cdot\cos x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$\frac{12\sin x\cdot\cos x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}+\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}=1\Rightarrow 12\sin x\cdot\cos x-(\cos x+\sin x)^2=$$

$$=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=\cos^2x-\sin^2x$$

$$12\sin x\cdot\cos x-\cos^2x-2\sin x\cdot\cos x-\sin^2x=\cos^2x-\sin^2x$$

$$-2\cos^2x+10\sin x\cdot\cos x=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=5\sin x\end{array}\right.$$

1) $\cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

2) $\cos x=5\sin x$

$tg\,x=\frac{1}{5}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\\ x=arctg\left(\frac{1}{5}\right)+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2.

$a, b, c \in \mathbb{Z}$.

a, b и c в указанном порядке образуют геом. прогрессию.

По свойству геом. прогрессии $b^2 = ac$.

$a \cdot b \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = b^3 = 13^{180} \cdot 17^{180} \Rightarrow b = 13^{60} \cdot 17^{60}$.

Пусть $a = 13^{\alpha} \cdot 17^{\beta}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in [0; 120]$.

Тогда $c = \frac{13^{180} \cdot 17^{180}}{a \cdot b} = 13^{120-\alpha} \cdot 17^{120-\beta}$

Шаг такой прогрессии равен $q = 13^{60-\alpha} \cdot 17^{60-\beta}$.

Каждому a соответствует лишь одно c. Количество способов выбрать a равно $121 \cdot 121 = 14641$.

Заметим, что a и c могут быть отрицательными.

Тогда $a = -13^{\alpha} \cdot 17^{\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in [0; 120]$ и $c = -13^{120-\alpha} \cdot 17^{120-\beta}$.

Тогда шаг последовательности равен $q = -13^{60-\alpha} \cdot 17^{60-\beta}$.

В таком случае мы получаем ещё $121 \cdot 121 = 14641$ троек.

$N = N_1 + N_2 = 2 \cdot 14641 = 29282$

Ответ: $N = 29282$.

Задача 3.

$\ln^2(x-1)-(x-2)\ln(3x-3)+(\ln 3)\ln(x-1)\ge 0$

$\ln(3x-3)=\ln(3\cdot(x-1))=\ln 3+\ln(x-1)$

$\ln^2(x-1)+(2-x)(\ln 3+\ln(x-1))+(\ln 3)\ln(x-1)\ge 0$

$\ln^2(x-1)+(1-x)(\ln 3+\ln(x-1))+\ln 3+\ln(x-1)+(\ln 3)\ln(x-1)\ge 0$

$(\ln(x-1)+1)(\ln(x-1)+\ln 3)+(1-x)(\ln(x-1)+\ln 3)\ge 0$

$(\ln(x-1)+\ln 3)(\ln(x-1)+1+1-x)\ge 0$

$\ln(3x-3)\cdot(\ln(x-1)+2-x)\ge 0$

Рассмотрим ~~уравнение~~ неравенство $\ln(x-1)+2-x\ge 0$.

Заметим, что $\ln(2-1)=\ln 1=0$ и $(2-2)=0$.

Найдём касательную к $f(x)=\ln(x-1)$ в точке $x_0=2$:

$y=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x)= x-2$.

То есть $y=x-2$ это касательная к $f(x)=\ln(x-1)$

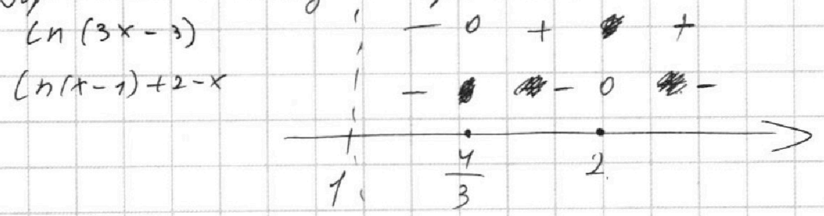
Значит при $x=2$ $\ln(x-1)+2-x=0$, при $x\ne 2$ $\ln(x-1)+2-x<0$.

Неравенство $\ln(3x-3)\ge 0=\ln_e 1 \Rightarrow \frac{3x-3-1}{e-1}\ge 0$.

$3x-4\ge 0 \Rightarrow x\ge \frac{4}{3}$

При $x\ge\frac{4}{3}$ $\ln(3x-3)\ge 0$, при $x<\frac{4}{3}$ $\ln(3x-3)<0$.

Применим метод интервалов:



Учитывая ОДЗ $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Получим: $x\in(1;\frac{4}{3}]\cup\{2\}$

Ответ: $x\in(1;\frac{4}{3}]\cup\{2\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4.

$y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Заметим, что $y(0) = 0$.

Точки пересечения графиков $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$ и $y = 3x$ являются точками квадрата, которые заключают его диагонали (кроме точки $(0;0)$, т.к. это центр диагоналей).

$-\frac{2x^3}{3} + ax = 3x \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} -\frac{2x^2}{3} + a = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2}(a-3)$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}(a-3)}$. $a > 3$

$y_{1,2} = \pm 3\sqrt{\frac{3}{2}(a-3)}$

Диагонали квадрата перпендикулярны, следовательно остальные 2 точки квадрата лежат на прямой $y = -\frac{1}{3}x$ (т.к. прямые $y = 3x$ и $y = -\frac{1}{3}x$ перпендикулярны).

$-\frac{2x^3}{3} + ax = -\frac{1}{3}x \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} -\frac{2}{3}x^2 + a = -\frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = \left(a + \frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}$.

$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}\left(a+\frac{1}{3}\right)}$

$y_{3,4} = \mp\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}\left(a+\frac{1}{3}\right)}$.

Расстояния от каждой точки квадрата до его центра равны между собой, то есть: $(x_1-0)^2 + (y_1-0)^2 = (x_3-0)^2 + (y_3-0)^2$,

т.к. центр квадрата находится в точке $(0;0)$.

$x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2$.

$\frac{3}{2}(a-3) + 9\left(\frac{3}{2}(a-3)\right) = \frac{3}{2}\left(a+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\left(a+\frac{1}{3}\right)\right)$

$(a-3)\cdot 15 = \left(a+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{3}$

$9(a-3) = \left(a+\frac{1}{3}\right)$.

$9a - a = 27 + \frac{1}{3}$

$8a = \frac{81+1}{3} = \frac{82}{3}$

$a = \frac{82}{24} = \frac{41}{12}$

Найдём половину диагонали:

$\frac{d}{2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{41}{12}-3\right) + 9\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{41}{12}-3\right)} = \sqrt{15}\cdot\sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{5}{2}$.

$d = 5$ — диагональ квадрата.

$S = \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{25}{2}$ — площадь квадрата.

Ответ: $a = \frac{41}{12}$, $S = \frac{25}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

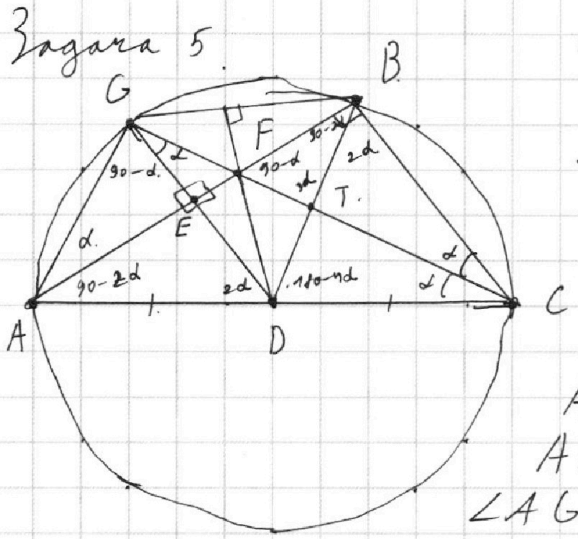
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5.



$\angle ACF = \angle FCB$. (CF - бисс.)

$DE \parallel BC$ (DE - ср. линия).

Пусть $\angle ACF = \alpha = \angle FCB$.

Тогда $\angle ADE = \angle ACB = 2\alpha$.

$\angle GDC = 180^\circ - \angle ADE = 180^\circ - 2\alpha$.

$\angle DGC = 180^\circ - \angle GDC - \angle ACG = \alpha$.

$\angle DGC = \angle DCG \Rightarrow GD = DC$.

$AD = CD$ (D - середина AC).

$AD = CD = GD \Rightarrow \angle AGC = 90^\circ$ (GD - медиана)

$\angle AGC = 90^\circ \Rightarrow AC$ - диаметр ($\overset{\smile}{AC} = 180^\circ$).

D - середина диаметра $AC \Rightarrow$ D - центр окружности.

$\angle ABC = \angle AGC = 90^\circ = \angle AED$

$DB = CD \Rightarrow \angle BDC = 180^\circ - 4\alpha$

$\angle BAC = 90^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle ADE = 2\alpha$

$\angle GDB = 180^\circ - 2\alpha - (180 - 4\alpha) = 2\alpha$. $GD = BD \Rightarrow \angle DGB = \angle DBG = \frac{180 - 2\alpha}{2}$

$\angle DGB = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle CGB = 90 - 2\alpha$.

$\angle DBG = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle ABG = \alpha$.

$BD \parallel AG \Rightarrow \angle DTC = 90^\circ = \angle FTB \Rightarrow$ ~~DF = FB~~

~~[illegible] = BF~~ $\alpha = 30^\circ$.

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BCA = 60^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$

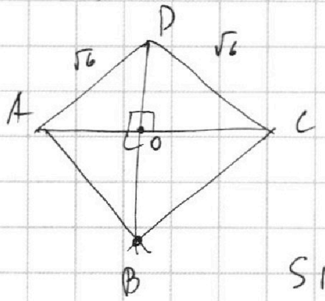
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

Рассмотрим $ABCD$:



$AD = CD,\ AB = BC \Rightarrow AC \perp BD,\ AO = OC = \frac{AC}{2}$

$AO = \sqrt{3} \Rightarrow OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{3}$

$OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$BD = \cancel{AO+}\ OD + OB = 3\sqrt{3}$

$SD \perp ABCD \Rightarrow SA^2 = SD^2 + AD^2,\ SB^2 = SD^2 + BD^2.$

Пусть $SD = h$. Тогда $SA = \sqrt{h^2+6}$, $SB = \sqrt{h^2+27}$.

По условию $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$

$\sqrt{h^2+6} + \sqrt{h^2+27} = 2\sqrt{3} + \sqrt{15} = \sqrt{3}(2+\sqrt{5})$

$\sqrt{\frac{h^2}{3}+2} + \sqrt{\frac{h^2}{3}+9} = (2+\sqrt{5})$ Пусть $\frac{h^2}{3} = t$.

$t+2+t+9+2\sqrt{(t+2)(t+9)} = (2+\sqrt{5})^2 = 9+4\sqrt{5}.$

$t + \sqrt{(t+2)(t+9)} = 2\sqrt{5} - 1.$

$(t+2)(t+9) = (2\sqrt{5} - 1 - t)^2$

$t^2+11t+18 = t^2 - 2t(2\sqrt{5}-1) + (2\sqrt{5}-1)^2 = t^2 - 4t\sqrt{5} + 2t + 20 - 4\sqrt{5} + 1$

$9t + 4t\sqrt{5} = 3 - 4\sqrt{5}$

$t = \frac{3-4\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}} \Rightarrow h^2 = \frac{9-12\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}} = (9-12\sqrt{5})(9-4\sqrt{5}) = 81+240-4\sqrt{5}(27+9)$

$h^2 = 321 - 36\cdot 4\sqrt{5}.$

$h = SD = \sqrt{321-144\sqrt{5}}$

$V = \frac{1}{3}\cdot h \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{321-144\sqrt{5}}}{3}\cdot\frac{AC\cdot BD}{2} = 3\sqrt{321-144\sqrt{5}}$ — объём пирамиды

Ответ: $V = 3\sqrt{321-144\sqrt{5}}$ — объём пирамиды

Пусть O' — проекция центра сферы на ~~BD~~ $ABCD$.

Сфера касается сторон SAB и SBC, поэтому.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$b^2 = ac$

$abc = b^3 = 13^{180} \cdot 17^{180}$ $\quad b = 13^{60} \cdot 17^{60}$

$ac = 13^{120} \cdot 17^{120}$

$a = 13^{\alpha} \cdot 17^{\beta}$ $\quad \alpha, \beta \in [0; 120]$

$c = 13^{(120-\alpha)} \cdot 17^{(120-\beta)}$

α, β

$120 \cdot 120 = 14400$

$a = -13^{\alpha} \cdot 17^{\beta}$

$c = -13^{(120-\alpha)} \cdot 17^{(120-\beta)}$

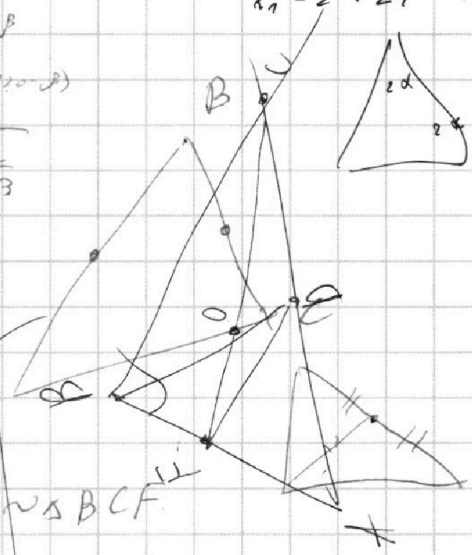
Ответ: $14400 \cdot 2 = 28800$

13^{120} $\quad 13^{60} \cdot 17^{60}$ $\quad 17^{120}$

$13^{\alpha} \cdot 17^{\beta}, \; 13^{60} \cdot 17^{60}, \; 13^{120-\alpha} \cdot 17^{120-\beta}$

$d = 13^{60-\alpha} \cdot 17^{60-\beta}$

$x_1^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{41}{21} - \frac{3 \cdot 21}{21}\right)$

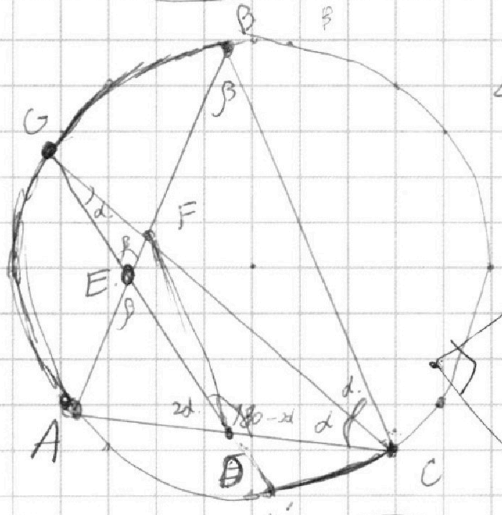


$\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$

$\angle DGC = \alpha$

$CF = x\sqrt{2}$

$DF = x\sqrt{23}$



$\triangle CEF \sim \triangle BCF$

$360 = 180 - \alpha + 180 - \beta + \varphi$

$\varphi = \alpha + \beta$

$\angle EFC = \alpha + \beta$

$\angle AGC = 90^\circ$

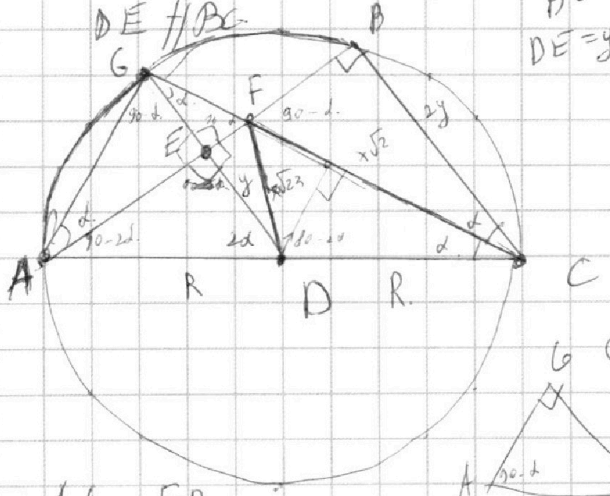
$\overset{\smile}{AC} = 180^\circ$

$\overset{\smile}{DC} = \overset{\smile}{AG} = \overset{\smile}{GB}$ $\quad GD = DC$

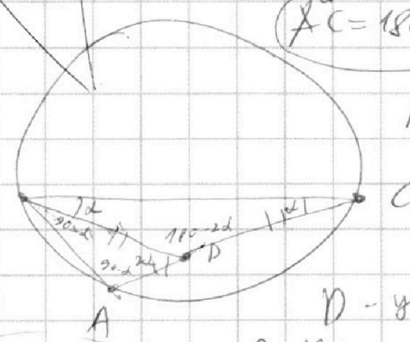
$DE \parallel BC$

$BC = 2y$

$DE = y$

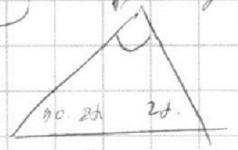


AC – диаметр.



D – центр окружности

$\angle ABC = 90^\circ$



$\frac{AG}{2R} = \frac{FB}{x\sqrt{2}}$

$23x^2 = 2x^2 + R^2 - 2 \cdot x\sqrt{2} \cdot R \cdot \cos\alpha$

$(R^2 - 21x^2)\,y = x\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2} \cdot R = 2x^2 R$

$\cos\alpha = \frac{R^2 - 21x^2}{2x\sqrt{2} \cdot R} = \frac{x\sqrt{2}}{2y}$

$\cancel{180} - 90 + \alpha - 90 + 2\alpha + \varphi = \cancel{180}$

$\varphi = \cancel{180} - 3\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x^3+\frac{11}{y^3}=y^3+\frac{11}{z^3}=z^3+\frac{11}{x^3}$

$\begin{cases} x^3y^3z^3+\cancel{11}z^3=ty^3z^3 \\ x^3y^3z^3+11x^3=tx^3z^3 \\ x^3y^3z^3+11y^3=ty^3z^3 \end{cases}$

$\begin{cases} x^3+\frac{11}{y^3}=t \\ y^3+\frac{11}{z^3}=t \\ z^3+\frac{11}{x^3}=t \end{cases}$ $\quad x^3+y^3+z^3:$

$x^6y^3z^3+11x^3z^3=x^3y^6z^3+11x^3y^3=x^3y^3z^6+11y^3z^3$

$x^6y^3z^3+11x^3z^3=x^3y^6z^3+11x^3y^3$

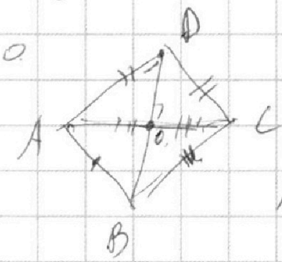
$x^3(x^3y^3z^3)+x^3\cdot 11z^3-x^3\cdot y^6z^3-11x^3\cdot y^3=0$

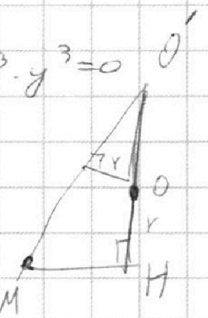
$11x^3(z^3-y^3)+z^3\cdot x^6y^3-z^3\cdot x^3y^6=0$

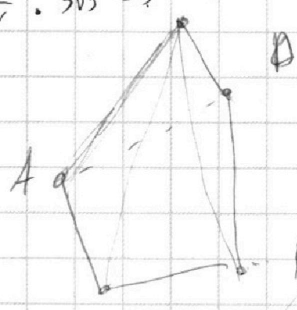
$11(z^3-y^3)+z^3\cdot x^3y^3-z^3\cdot y^6=0$

$11(z^3-y^3)=z^3y^3(y^3-x^3)$

$\frac{2\sqrt3}{\cancel{2}}\cdot 3\sqrt3=9$





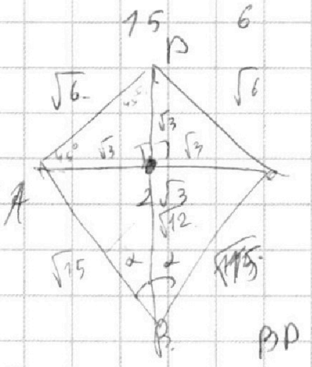


$AB=BC=\sqrt{15}$

$AD=DC=\sqrt6$

$AC=2\sqrt3$

$SD\perp ABCD$



$\frac{\sqrt3}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt3}{2\sqrt3}=\frac12$

$\sin\alpha=\frac{\sqrt3}{\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt5}$

$tg\,\alpha=\frac12$

$SD=h$

$SA=\sqrt{h^2+6}$

$SB=\sqrt{h^2+27}$

$BD=\sqrt3+\sqrt{12}=\sqrt3+2\sqrt3=3\sqrt3$

$\sqrt{\frac{h^2}{3}+2}+\sqrt{\frac{h^2}{3}+9}=2+\sqrt5$

$\sqrt{t+2}+\sqrt{t+9}$

$\sqrt{h^2+6}+\sqrt{h^2+27}=2\sqrt3+\sqrt{15}=\sqrt3(2+\sqrt5)$

$h^2+6+h^2+\cancel{27}+2\sqrt{(h^2+6)(h^2+27)}=3\cdot(4+5+4\sqrt5)=3(9+4\sqrt5)=\cancel{27}+12\sqrt5$

$2t+2\sqrt{(t+6)(t+27)}=12\sqrt5-6$

$(t+6)(t+27)=(6\sqrt5-3-t)^2$

$\cancel{t^2}+33t+27\cdot6=(6\sqrt5-3)^2+\cancel{t^2}-2t(6\sqrt5-3)$

$t(33+6\sqrt5-3)=(6\sqrt5-3)^2-27\cdot6=9(2\sqrt5-1)^2-9\cdot 3\cdot 6$

$t(30+6\sqrt5)=9((2\sqrt5-1)^2-18)=9(20+1-4\sqrt5-18)=9(3-4\sqrt5)$ $\quad 120$

$t=\frac{9(3-4\sqrt5)}{3(10+2\sqrt5)}=\frac{9-12\sqrt5}{10+2\sqrt5}=\frac{(9-12\sqrt5)(10-2\sqrt5)}{100-20}=\frac{90-120\sqrt5-18\sqrt5+24\cdot5}{80}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{t+2} + \sqrt{t+9} = 2+\sqrt{5}$

$t+2 + 2\sqrt{(t+2)(t+9)} + t+9 = 4+4\sqrt{5}+5 = 9+4\sqrt{5}$

$2t + 2\sqrt{(t+2)(t+9)} = 4\sqrt{5} - 2$

$\sqrt{(t+2)(t+9)} = 2\sqrt{5} - 1 - t$

$t^2 + 11t + 18 = (t-(2\sqrt{5}-1))^2 = t^2 - 2\cdot t\cdot(2\sqrt{5}-1) + (2\sqrt{5}-1)^2$

$16\cdot 3 = 48$

$11t + 4t\sqrt{5} - 2t = (20 - 4\sqrt{5} + 1) - 18 = 3 - 4\sqrt{5}$

$9\cdot 8\cdot\sqrt{5}$

$t(9+4\sqrt{5}) = 3 - 4\sqrt{5}$ $\quad \frac{h^2}{3} = \frac{3-4\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}$

$\frac{9-12\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}} = \frac{9+4\sqrt{5}-16\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}} = 1 - \frac{16\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}$

$h^2 = \frac{9-12\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}} = \frac{(9-12\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})} = \frac{(9-12\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}{81-80} = (9-12\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})$

$h^2 = 81 - 9(12\sqrt{5}+4\sqrt{5}) + 48\cdot 5 = 321 - 9\cdot 16\cdot\sqrt{5}$ $\quad 81 - 12\cdot 9\sqrt{5} - 4\sqrt{5}\cdot 9 + 48\cdot 5$

$9^2 - 2\cdot 9\cdot 8\sqrt{5} + 48\cdot 5$

$\sin 2x = 0$

$\operatorname{tg} 2x = 0$

$-1+1=0$

$\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sin x}{\sin x} = 1$

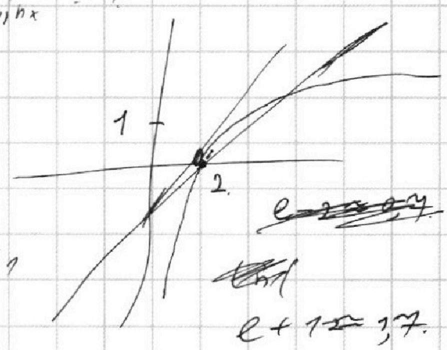
$121 \cdot 121 = 14641$ $\quad \frac{x-2}{x-1}$ $\quad 14641 \cdot 2 = 29282$

$\ln(2-1) = 0$

$\ln(x-1) + 2 - x \geq 0$

$\ln(x-1) \geq x-2$

$(\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1}$



$e + 1 = 3{,}7$

$\ln e = 1$

$y(2)$ $\quad y = f(x_0) + (x - x_0)\cdot f'(x) =$

$y = 0 + (x-2)\cdot\frac{1}{1}$

$(\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1}$ $\quad \frac{x-2}{x-1}$

$x - 2 \geq \ln(x-1)$

$\ln(x-1) + 2 - x \leq 0$

$10x_1^2 = \frac{10}{9}x_3^2$

$9x_1^2 = x_3^2$

$9\cdot\frac{3}{2}(a-3) = \frac{3}{2}(a+\frac{1}{3})$

$9a - 27 = a + \frac{1}{3}$

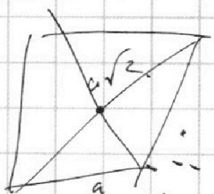
$8a = 27 + \frac{1}{3} = \frac{27\cdot 3+1}{3} = \frac{82}{3}$

$a = \frac{82}{3\cdot 8} = \frac{41}{3\cdot 4} =$

$x_1^2 = \frac{3}{2}(\frac{41}{12} - \frac{36}{12}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{12}$

$x_3^2 = \frac{3}{2}(\frac{41}{12} + \frac{4}{12}) = \frac{3\cdot 45}{2\cdot 12}$

$\sqrt{\frac{15\cdot 5}{12}} = \sqrt{\frac{5\cdot 5}{4}} = \frac{5}{2}$

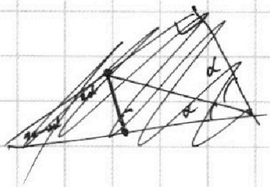


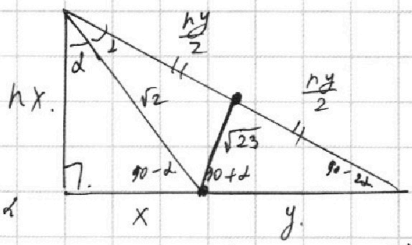
$S = a^2 = (\frac{d}{\sqrt{2}})^2 = \frac{d^2}{2}$ $\quad d = a\sqrt{2}$ $\quad a = \frac{d}{\sqrt{2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





$x^2 = n^2x^2 + 2 - 2\sqrt{2}\cdot nx \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{n^2x^2+2-x^2}{2\sqrt{2}\,nx}$

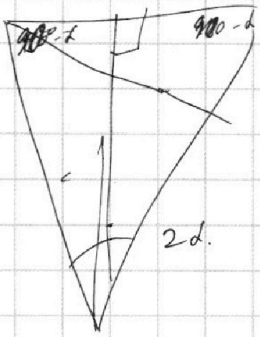
$23 = \frac{n^2y^2}{4} + 2 - \cancel{2}\cdot\frac{ny}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{\frac{n^2y^2}{4} - 21}{ny\sqrt{2}}$

$90-2\alpha \qquad \alpha.$

$(n^2x^2+2-x^2)y = \frac{n^2y^2}{2} - 42.$

$-4 \quad -4 - 5.$



$4+4+5+4+2+2=$

$21/34.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

$6tg\,2x - 1 + ctg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$4+4+5+4+6+5+6 =$
$17 + 17 = 34.$

$ctg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}$

$tg\,2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$

$\frac{12\sin x \cdot \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 1.$

a b c
+ + +
− + −

$5\log_2 2 = 5$

$\log_2 32 = \log_2 4 \cdot 8 =$
$\log_2 4 + \log_2 8 =$
$\log_c(a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$
$\log_c\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \log_c a + \log_c \frac{1}{b} =$
$\log_c a - \log_c b$

$12\sin x \cdot \cos x - (\cos x + \sin x)^2 = \cos 2x$

$12\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - 2\cos x \cdot \sin x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$-2\cos^2 x + 10\cos x \cdot \sin x = 0$

1) $\cos x = 0$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = -1$

$\cos x(\cos x - 5\sin x) = 0$

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 0.$

$tg\,2x = 0$

2) $\cos x = 5\sin x.$

$ctg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = ctg\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{5} \Rightarrow tg\,x = \frac{1}{5} \Rightarrow tg\,2x = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$

$\sqrt{26}$, 1, 5

$\sin x = \frac{1}{\sqrt{26}}$
$\cos x = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$ctg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5+1}{1-5} = -\frac{3}{2}$

$\frac{5}{2} - 1 - \frac{3}{2} = 0$

x_2, y_2
x_1, y_1
$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

180 · 180
$a \cdot b \cdot c = 13$ · 17

№2 $(a; b; c) \in \mathbb{Z}$.

$a = b_0$
$b = b_0 \cdot q \Rightarrow b^2 = a \cdot c$
$c = b_0 \cdot q^2$

$b^2 = ac.$

$b^4 = 13^{180}$
$b = 13^{45} \cdot 17^{45}$

$\ln^2(x-1) - (x-2)\ln(3x-3) + (\ln 3) \cdot \ln(x-1) \geq 0$

$\ln(3x-3) = \ln(3(x-1)) = (\ln 3 + \ln(x-1))$

$\ln(x-1) = t.$
$e^{\ln(x-1)} = x - 1 = e^t$

$\ln^2(x-1) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) + (\ln 3)(\ln(x-1)) \geq 0$

$t^2 - (e^t - 1)(\ln 3 + t) + (\ln 3) \cdot t \geq 0$

$\ln^2(x-1) - (x-1) \cdot (\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3 + \ln(x-1) + \ln 3 \cdot \ln(x-1) \geq 0$

~~$(\ln(x-1) + 1)(\ln 3 + 1)$~~

$\ln(x-1)(\ln(x-1) + 1) - (x-1)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3(\ln(x-1) + 1) \geq 0.$

$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) - (x-1)(\ln 3 + \ln(x-1)) \geq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\ln^2(x-1)+(1-x)(\ln 3+\ln(x-1))+\ln 3+\ln(x-1)+(\ln 3)\cdot\ln(x-1)\geq 0$

$(\ln(x-1)+\cancel{1})(\ln(x-1)+\ln 3)+(\ln 3+\ln(x-1))\cdot(1-x)\geq 0$

$(\ln 3+\ln(x-1))(\ln(x-1)+1+1-x)\geq 0$

$\ln(x-1)+2-x\geq 0$

$\ln(x-1)\geq x-2$

$2=\log_e e^2$

$x=\log_e e^x$

$(90-2\alpha)+(90-\alpha)+\varphi=180$

$\varphi=3\alpha$

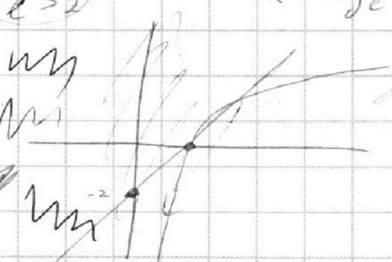
$(\ln(3x-3)\cdot(\ln(x-1)+2-x)\geq 0)$

$e>2$

$\ln(x-1)+\ln e^2-\ln e^x\geq 0$

$\ln(e^2\cdot(x-1))\geq\ln e^x$

1 4 3 ±



$\frac{1}{x}=x$

$x=1$

$e^2\cdot(x-1)\geq e^x$

$(x-1)\geq\frac{e^x}{e^2}=e^{x-2}$

$x>1$

$36\cdot 4=144$

$\ln(x-1)=x-2=(x-1)-1$

$\ln a=a-1$

$\ln a\cdot e=a$

$e\approx 3$

$f(x)=\ln(x-1)$

$g(x)=x-2$ $\approx 3{,}7$

x	2	3	$e+1$
$f(x)$	1	0,7	1
$g(x)$	0	1	1,7

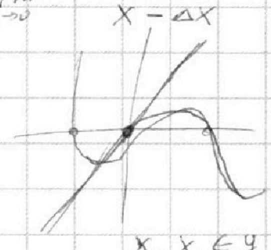
$\ln' x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{x-\Delta x}=\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{x-\Delta x}$

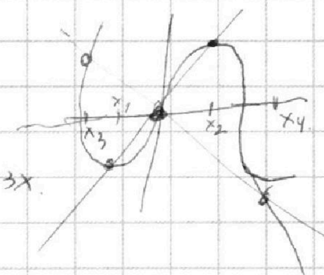
$\frac{1}{x}$?

$y=-\frac{2x^3}{3}+ax=x\left(-\frac{2x^2}{3}+a\right)$

$y(0)=0$

$x\left(a-\frac{2x^2}{3}\right)$



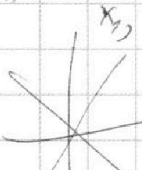


$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}a}$

$x_1, x_2\in y=3x$

есть 2 корня $(x\neq 0$

$-\frac{2x^3}{3}+ax=3x$



$a>3$

2-ая диагональ на прямой

$-\frac{2x^2}{3}+a=3$

$x_4^2+y_4^2=$

$y=\cancel{3x}-\frac{1}{3}x$

$a-3=\frac{2x^2}{3}$

$x_4^2+\frac{1}{9}x_4^2=$

$-\frac{2x^3}{3}+ax=-\frac{1}{3}x$

~~$d(x_1,0)=d(x_2,0)$~~

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{2(a-3)}{3}}$

$\frac{10}{9}x_4^2$

$x_1=-\sqrt{\frac{2(a-3)}{3}}$

$-\frac{2}{3}x^2+a=-\frac{1}{3}$

$x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}}$

$y_1=3x_1=-\sqrt{6(a-3)}$

$x_3, x_4\in y=-\frac{1}{3}x$

$a+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}x^2$

$x_2=-\sqrt{\frac{2(a-3)}{3}}$

$\sin x=\frac{1}{\sqrt{26}}$

$x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}}$

$x_4^2+y_4^2=x_1^2+y_1^2$

$y_2=\sqrt{6(a-3)}$

$\cos x=\frac{5}{\sqrt{26}}$

$y_3=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}}$

$\frac{10}{9}\cdot\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}\right)=\frac{10}{9}\cdot\left(\frac{2(a-3)}{3}\right)$

$x_4=\sqrt{\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}}$

$\cos 2x=2\cdot\frac{25}{26}-\frac{26}{26}$

$y_4=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}}$

$\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}=2\cdot 3(a-3)=6a-18$

$\sin 2x=\frac{10}{26}=\frac{5}{13}$

$\frac{24}{26}=\frac{12}{13}$

$3a+1=12a-36$

$37=9a$

$\operatorname{tg} x=\frac{\frac{5}{12}-1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{5}{3}-\frac{5}{7}$

$\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5+1}{1-5}=-\frac{3}{2}$

$\operatorname{tg} 2x=\frac{5}{12}$

$a=\frac{37}{9}$