



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

Пусть $x^3 - 9 = a$; $x^2 - 1 = b \Rightarrow x^3 - x^2 - 8 = (x^3 - 9) - (x^2 - 1) = a - b$.

Итого: $|a| + |b| \leq |a - b|$. Обозначим это выражение (Ж).

Рассмотрим возможные случаи расположения чисел
а и b на числовой оси:

1) $a \geq b \geq 0 \Rightarrow (X) \Rightarrow a+b \leq a-b \Rightarrow 2b \leq 0 \Rightarrow b \leq 0 \Rightarrow b=0$

2) $b \geq a \geq 0 \Rightarrow$ (X): $a+b \leq b-a \Rightarrow a \leq 0 \Rightarrow a=0, b \geq 0$

3) $a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow (X)'$ $a - b \leq a + b \Rightarrow$ ~~$1 - 2 \leq 1 + 2 \Rightarrow 1 \leq 2$~~ , верно при $a \geq 0, b \leq 0$

4) $a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow$ (X): $-a + b \leq -a + b \Rightarrow$ ~~$a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow a \leq 0, b \geq 0$~~

5) $a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a - b \leq b - a \Rightarrow 2b \geq 0 \Rightarrow b = 0, a' \leq 0$

b) $b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a - b \leq a - b \Rightarrow 2a \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \Rightarrow a = 0, b \leq 0$

Итого, рассмотрены все возможные случаи расположения чисел a, b и 0 на числовой оси.

~~Wasser~~ $a=0 \Rightarrow x^3 - 9 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$

$$b=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x \in \{-1; 1\}.$$

$$a > 0 \Rightarrow x^3 - 9 > 0 \Rightarrow x^3 > 9 \Rightarrow x \in (\sqrt[3]{9}; +\infty)$$

$$a < 0 \Rightarrow x^3 - 9 < 0 \Rightarrow x^3 < 9 \Rightarrow x \in (-\infty, \sqrt[3]{9})$$

$$b > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$b < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

1) $b=0$ und $a>0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$

$$2) \begin{cases} a=0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{9} \\ x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$$

3) $\begin{cases} a > 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [\sqrt[3]{9}; +\infty) \\ x \in [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \emptyset.$

4) $a \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, \sqrt[3]{9}] \\ x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow \text{graph} \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$

$$5) \begin{cases} b=0 \\ a \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x \in (-\infty; \sqrt[3]{9}] \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1; 1\}.$$

$$6) \begin{cases} a=0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{9} \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow x \notin \emptyset.$$

Allora: $\begin{cases} x = \sqrt[3]{9} \\ x \in (-\infty, -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}] \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$.
 $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

OTBET: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$b = a \cdot q$$

$$c = a \cdot q^2, \text{ где } q \in \mathbb{N}, \text{ т.к. } \frac{a \cdot q}{\in \mathbb{N}} = \frac{b}{\in \mathbb{N}}.$$

$a \cdot b \cdot c = 5^{360} \cdot 7^{90}$. Значит $a \cdot (a \cdot q) \cdot (a \cdot q^2) = (a \cdot q)^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow a \cdot q = 5^{120} \cdot 7^{30}$. Получается, нужно рассмотреть всевозможные a и q . Поскольку $a \cdot q = 5^{120} \cdot 7^{30}$, то числа a и q при разложении на простые множители должны иметь вид $(5^{\alpha} \cdot 7^{\beta})$, где $0 \leq \alpha \leq 120, 0 \leq \beta \leq 30$.

$$\text{Пусть } a = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}; q = 5^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 120 \\ \beta_1 + \beta_2 = 30 \end{cases}, \begin{matrix} \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \alpha_i \leq 120, \beta_j \leq 30 \\ \text{где } \forall i \in \{1, 2\} \\ \text{где } \forall j \in \{1, 2\}. \end{matrix}$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1 + 120. \text{ При } \alpha_1 \in [0; 120]: \alpha_2 \in [0; 120]$$

$$\beta_2 = -\beta_1 + 30. \text{ При } \beta_1 \in [0; 30]: \beta_2 \in [0; 30].$$

Число вариантов α_1 равно 121, вариантов β_1 - 31.
Значит вариантов числа a - $(121 \cdot 31)$ штук, причем
каждому a соответствует единственное q , то есть
каждому a соответствует лишь одна пара (a, b, c) .

$$121 \cdot 31 = 3751.$$

Ответ: 3751

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y \in \mathbb{Z}.$$

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0.$$

$$I) y=3 \Rightarrow 0 + x + 86 - 101 = 0$$

$$x=5.$$

$$II) y \neq 3 \Rightarrow D = (11y-34)^2 - 4(32y-101)(y-3) =$$

$$= (121y^2 - 748y + 1156) - (128y^2 - 788y + 1212) = -7y^2 + 40y - 56.$$

$$\text{Чтоб существовала } x, \text{ нужно чтоб } D \geq 0, \Rightarrow -7y^2 + 40y - 56 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7y^2 - 40y + 56 \leq 0.$$

$$7y^2 - 40y + 56 = 0 \Rightarrow D_1 = 20^2 - 7 \cdot 56 = 400 - 392 = 8$$

$$y_{1,2} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}. \quad 1) \text{ Заметим, что } \frac{20-2\sqrt{2}}{7} < 2, \text{ т.к.}$$

$$20 - 2\sqrt{2} > 14$$

$$20 > 2\sqrt{2}$$

$$3 > 2\sqrt{2} \text{ — верно}$$

$$8 > 8 - \text{верно} \Rightarrow \frac{20-2\sqrt{2}}{7} > 2.$$

$$2) \frac{20+2\sqrt{2}}{7} < 4, \text{ т.к. } 20 + 2\sqrt{2} < 28$$

$$2\sqrt{2} < 8$$

$$\sqrt{2} < 4$$

$$2 < 16 - \text{верно} \Rightarrow \frac{20+2\sqrt{2}}{7} < 4.$$

$$7y^2 - 40y + 56 \leq 0 \Rightarrow y \in \left[\frac{20-2\sqrt{2}}{7}; \frac{20+2\sqrt{2}}{7} \right], \text{ причем по доказанному:}$$

(II)

$$2 < y < 4. \quad y \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y=3, \text{ но вначале мы показали, что } y \neq 3. \text{ Противоречие.}$$

$$\text{Ответ: } (5; 3).$$

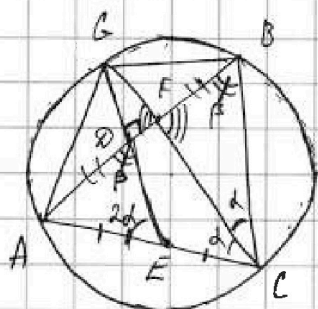
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Доано: $\triangle ABC$

$\omega(O; R)$; $A, B, C \in \omega$.

$D \in AB$, $E \in AC$, $AD = DB$

$EA = EC$, $EA = EC$.

CF — медиана $\triangle ABC$, $F \in AB$

$CF \cap \omega = G$.

$ED \cap \omega = G$.

$S_{BCF} = 25 \cdot S_{GFD}$.

Найти: $\angle A, \angle B, \angle C$.

Решение:

$\angle ACG = \angle BCG$ — по ум. $\Rightarrow AG = BG \Rightarrow AG = BG$.

$C, A, B, G \in \omega$ — по ум.

$\triangle ABG$: $AG = BG \Rightarrow \triangle ABG$ — равноб. $\Rightarrow GD$ — высота $\triangle ABG \Rightarrow \angle GDF = 90^\circ$.

$AD = DB \Rightarrow GD$ — медиана.

$\triangle ABC$: $DA = DB$ $\Rightarrow DE$ — средняя линия $\Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \angle ADE = \angle ABC$ — соответств.
 $EA = EC \Rightarrow DE = \frac{1}{2} BC$.

$\angle ADE = \angle GDF$ — верт. $\Rightarrow \angle ADE = 90^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$.

$\triangle GDF$ и $\triangle CBF$: $\angle BFC = \angle GFD$ — верт. $\Rightarrow \triangle GDF \sim \triangle CBF$ — по 2-м углам $\Rightarrow$
 $\angle GDF = \angle FCB = 90^\circ$
 $\Rightarrow \left(\frac{GD}{BC}\right)^2 = \left(\frac{GF}{CF}\right)^2 = \left(\frac{FD}{BF}\right)^2 = \frac{S_{GDF}}{S_{BCF}} = \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{BF}{FD} = \frac{5}{1} \Rightarrow BF = 5FD$; $\frac{GD}{CB} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5GD = BC$.

Пусть: $FD = x \Rightarrow FB = 5x$; $GD = y \Rightarrow BC = 5y$.

$DB = FD + FB = 6x$; $DB + DA = 2DB = AB \Rightarrow AB = 12x$; $FA = FD + DA = 7x$.

$DE = \frac{1}{2} BC = \frac{5y}{2} \Rightarrow GE = GD + DE = \frac{7y}{2}$.

$\triangle ABC$: $\frac{BC}{AC} = \frac{BF}{FA}$ — по теореме синусов. $(CF) \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$.

$AC = \frac{7}{5} BC \Rightarrow AC = \frac{7}{5} \cdot 5y = 7y$.

$\cos \angle BCA = \frac{BC}{CA} = \frac{5}{7} \Rightarrow \angle BCA = \arccos\left(\frac{5}{7}\right)$.

$\angle BAC = 180^\circ - \angle BCA - \angle CBA = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{5}{7}\right) \Rightarrow \angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$.

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$; $\angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$; $\angle BCA = \arccos\left(\frac{5}{7}\right)$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода недопустима!



$$y = -x^5 + ax$$

$$y = 2x$$

Заметим, что диагонали квадрата перпендикулярны $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ прямая, содержащая в себе и диагональ должна быть $y = 2x$

$\Rightarrow$ эта прямая задается функцией $y = -\frac{1}{2}x$, т.к. по условию проходит через $O(0; 0)$.

Пусть $ABCD$ — искомым квадрат $\Rightarrow A, B, C, D \in y = -x^5 + ax$;

$A, C \in y = 2x$; $B, D \in y = -\frac{1}{2}x$.

$$1) -x^5 + ax = 2x \Rightarrow x^5 + x(2-a) = 0$$

$$x(x^4 + 2 - a) = 0.$$

x имеет хотя бы 2 значения $\Rightarrow 2 - a \leq 0 \Rightarrow a \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \{0; \sqrt[4]{a-2}; -\sqrt[4]{a-2}\}$, но $x \neq 0$, т.к. $A \neq C \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{a-2}.$$

$$2) -x^5 + ax = -\frac{1}{2}x \Rightarrow 2x^5 - 2ax - x = 0$$

$$2x(x^4 - (a + \frac{1}{2})) = 0$$

x имеет хотя бы 2 значения $\Rightarrow a + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \{0; \sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}; -\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}\}$, но $x \neq 0$, т.к. $B \neq D$.

Итого: ~~$a \in [-\frac{1}{2}; +\infty)$~~ $a \in [2; +\infty)$

Пусть $A(\sqrt[4]{a-2}; y_A)$ $\Rightarrow AB = \sqrt{(\sqrt[4]{a-2} - \sqrt[4]{a+\frac{1}{2}})^2 + (y_A - y_B)^2}$.

$B(\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}; y_B)$

$y_A = 2\sqrt[4]{a-2}$
 $y_B = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ Пусть $\sqrt[4]{a-2} = t; \sqrt[4]{a+\frac{1}{2}} = d \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(t-d)^2 + (2t - \frac{1}{2}d)^2} = \sqrt{5t^2 - 3td + \frac{5}{4}d^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{5\sqrt{a-2} - 3\sqrt[4]{a-2}\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}} + \frac{5}{4}\sqrt{a+\frac{1}{2}}}$$

Ответ: Асторона рибна: $\sqrt{5\sqrt{a-2} - 3\sqrt[4]{a-2}\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}} + \frac{5}{4}\sqrt{a+\frac{1}{2}}}$; при $a \in [2; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \quad \Rightarrow a, b, c \neq 0$$

$$\begin{cases} a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} \\ a + \frac{7}{b} = c + \frac{7}{a} \\ b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \end{cases} \begin{matrix} | \cdot (bc) \\ | \cdot (ab) \\ | \cdot (ac) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} abc + 7c = b^2c + 7b & (1) \\ a^2b + 7a = abc + 7b & (2) \\ abc + 7a = ac^2 + 7c & (3) \end{cases}$$

$$(1) - (2) + (3) : 3abc + 7a + 7b + 7c = a^2b + b^2c + c^2a + 7a + 7b + 7c$$

$$3abc = a^2b + b^2c + c^2a$$

или $a > 0, b > 0, c > 0$, то $\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} = abc \Rightarrow$
 $\Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc$. Равенство достигается, когда $a=b=c$, но это
 противоречит условию.

Значит $\exists$ число, которое ~~не больше~~ ^{не больше} 0, но $a, b, c \neq 0 \Rightarrow \exists$ число
 меньше 0.

Поскольку мы хотим, чтоб abc было максимальным,
 нужно, чтоб: 2 числа были < 0 и одно > 0 .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|x^3-9|+|x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$$

$$|a|+|b| \leq |a-b|$$

$$1) a \geq b \geq 0 \Rightarrow a+b \leq a-b$$

$$2) b \geq a \geq 0 \Rightarrow a+b \leq b-a \Rightarrow 2a \leq 0 \Rightarrow \emptyset$$

$$3) a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow a-b \leq a-b - \text{верно}$$

$$4) a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow -a+b \leq b-a \Rightarrow 0 \leq 0 - \text{верно}$$

$$5) a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a-b \leq b-a \Rightarrow -2b \leq 0 \Rightarrow b \geq 0$$

$$6) b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a+b \leq a-b \Rightarrow -2a \leq 0 \Rightarrow a \geq 0$$

$$b \leq a \leq 0 \Rightarrow a \geq 0$$

$$a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow a-b \leq a-b$$

$$a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow -a+b \leq b-a$$

$$a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a-b \leq b-a$$

$$b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a+b \leq a-b$$

$$a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow a-b \leq a-b$$

$$a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow -a+b \leq b-a$$

$$a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a-b \leq b-a$$

$$b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a+b \leq a-b$$

$$a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow a-b \leq a-b$$

$$a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow -a+b \leq b-a$$

$$a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a-b \leq b-a$$

$$b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a+b \leq a-b$$

$$a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow a-b \leq a-b$$

$$a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow -a+b \leq b-a$$

$$a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a-b \leq b-a$$

$$b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a+b \leq a-b$$

$$a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow a-b \leq a-b$$

$$a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow -a+b \leq b-a$$

$$a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a-b \leq b-a$$

$$b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a+b \leq a-b$$

$$a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow a-b \leq a-b$$

$$a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow -a+b \leq b-a$$

$$a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a-b \leq b-a$$

$$b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a+b \leq a-b$$

$$a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow a-b \leq a-b$$

$$a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow -a+b \leq b-a$$

$$a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a-b \leq b-a$$

$$b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a+b \leq a-b$$

$$a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow a-b \leq a-b$$

$$a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow -a+b \leq b-a$$

$$a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a-b \leq b-a$$

$$b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a+b \leq a-b$$

$$a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow a-b \leq a-b$$

$$-3+1=-2$$

$$\frac{-1}{a} \frac{1}{b} \frac{1}{0} \rightarrow x=2$$

$$|8-9|+|4-1| \leq |8-4-9|$$

$$1+3 \leq 4$$

$$2b \leq 0$$

$$x=2$$

$$|8-9|+|4-1| \leq$$

$$\leq |8-4-9|$$

$$+1+3 \leq 20 - \text{верно}$$

$$125-9+24 \leq 125-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

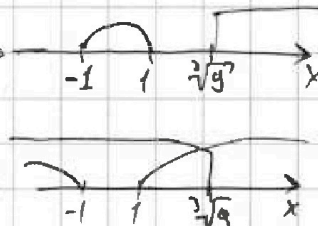
$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$\left. \begin{aligned} x^3-9 \geq 0 &\Rightarrow x \geq \sqrt[3]{9} \geq 1 \\ x^2-1 \leq 0 &\Rightarrow x \in [-1, 1] \\ x^3-9 \leq 0 &\Rightarrow x \in (-\infty, \sqrt[3]{9}] \\ x^2-1 \geq 0 &\Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



$$\text{Итого: } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$$

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$a, aq, aq^2$$

$$abc = a^3 q^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow aq = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

$$q \geq 1$$

$$+24-8$$

$$24+4+8 \leq 24+9+8$$

$$\text{гла } a: 5^{120} \cdot 7^{30} \text{ возможности}$$

$$0, 5, 10, \dots, 120, 125, \dots$$

$$40, 45, 50, \dots$$

$$\text{Пример: } 5^3 \cdot 7^2 = aq^2 \Rightarrow aq^2 = 121 = 11^2$$

$$\begin{array}{l} a = 5^0 \cdot 7^2 \Rightarrow 5^0 \cdot 7^2 \\ 5^1 \cdot 7^0 \Rightarrow 5^1 \cdot 7^0 \\ 5^2 \cdot 7^0 \Rightarrow 5^2 \cdot 7^0 \\ 5^3 \cdot 7^0 \Rightarrow 5^3 \cdot 7^0 \\ 5^0 \cdot 7^1 \Rightarrow 5^0 \cdot 7^1 \\ 5^1 \cdot 7^1 \Rightarrow 5^1 \cdot 7^1 \\ 5^2 \cdot 7^1 \Rightarrow 5^2 \cdot 7^1 \\ 5^3 \cdot 7^1 \Rightarrow 5^3 \cdot 7^1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = 5^0 \cdot 7^2 \Rightarrow 5^0 \cdot 7^2 \\ 5^1 \cdot 7^0 \Rightarrow 5^1 \cdot 7^0 \\ 5^2 \cdot 7^0 \Rightarrow 5^2 \cdot 7^0 \\ 5^3 \cdot 7^0 \Rightarrow 5^3 \cdot 7^0 \\ 5^0 \cdot 7^1 \Rightarrow 5^0 \cdot 7^1 \\ 5^1 \cdot 7^1 \Rightarrow 5^1 \cdot 7^1 \\ 5^2 \cdot 7^1 \Rightarrow 5^2 \cdot 7^1 \\ 5^3 \cdot 7^1 \Rightarrow 5^3 \cdot 7^1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} aq^2 = 5^6 \cdot 7^4 \\ 5^6 \cdot 7^4 \\ 5^5 \cdot 7^4 \\ 5^4 \cdot 7^4 \\ 5^3 \cdot 7^4 \\ 5^2 \cdot 7^4 \\ 5^1 \cdot 7^4 \\ 5^0 \cdot 7^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} aq^2 = 5^6 \cdot 7^4 \\ 5^6 \cdot 7^4 \\ 5^5 \cdot 7^4 \\ 5^4 \cdot 7^4 \\ 5^3 \cdot 7^4 \\ 5^2 \cdot 7^4 \\ 5^1 \cdot 7^4 \\ 5^0 \cdot 7^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} aq^2 = 5^6 \cdot 7^4 \\ 5^6 \cdot 7^4 \\ 5^5 \cdot 7^4 \\ 5^4 \cdot 7^4 \\ 5^3 \cdot 7^4 \\ 5^2 \cdot 7^4 \\ 5^1 \cdot 7^4 \\ 5^0 \cdot 7^4 \end{array}$$

$$ab = 5^3 \cdot 7^2 \cdot 5^6 \cdot 7^4 = 5^9 \cdot 7^6$$

$$5^3 \cdot 7^2 \cdot 5^6 \cdot 7^4 = 5^9 \cdot 7^6$$

$$5^3 \cdot 7^2 \cdot 5^6 \cdot 7^4 = 5^9 \cdot 7^6$$

$$5^3 \cdot 7^2 \cdot 5^6 \cdot 7^4 = 5^9 \cdot 7^6$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-3) + x(11y-34) + 32y-101=0$$

$$x^2y - 3x^2 + 11xy - 34x + 32y - 101 = 0$$

$$y(x^2 + 11x - 32) - (3x^2 + 34x + 101) = 0$$

$$D_y = (11y-34)^2 - 4(32y-101)(y-3) = 0$$

$$121y^2 - 34 \cdot 11 \cdot 2y - 4(32y^2 - 32 \cdot 3y - 101(y+303)) =$$

$$= 121y^2 - 34 \cdot 11 \cdot 2y - 128y^2 + 384y - 400y + 1200 - 12 = 7y^2 - 40y + 56 = 0$$

$$7y^2 - 40y + 56 = 0$$

$$D_y = 40^2 - 4 \cdot 7 \cdot 56 = 1600 - 1568 = 432$$

$$y_{1/2} = \frac{40 \pm \sqrt{432}}{14} = \frac{40 \pm 12\sqrt{3}}{14} = \frac{20 \pm 6\sqrt{3}}{7}$$

$$y_1 = \frac{20 + 6\sqrt{3}}{7} \approx 4.14$$

$$y_2 = \frac{20 - 6\sqrt{3}}{7} \approx 1.86$$

$$21 < 20 + 6\sqrt{3} < 40$$

$$1 < 2\sqrt{3} < 2.9$$

$$D \in \frac{20-2\sqrt{3}}{4} \cup (0,1) \cup \frac{20+2\sqrt{3}}{4} \subset \mathbb{R}$$

$$y \in [1, 5]$$

$$y=1 \Rightarrow -2x^2 + x(34-11) + 32-101=0$$

$$-2x^2 + 23x - 69 = 0$$

$$2x^2 - 23x + 69 = 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 2 \cdot 69 = 529 - 552 = -23$$

$$y=2 \Rightarrow -x^2 + x(34-22) + 64-101=0$$

$$-x^2 + 12x - 37 = 0$$

$$x^2 - 12x + 37 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 + 1 > 0$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 37 = 144 - 148 = -4$$

$$y=4 \Rightarrow x^2 - 10x + 28 = 0$$

$$x^2 - 10x + 28 = 0$$

$$(x-5)^2 + 3 = 0$$

$$1) y=3 \Rightarrow x-101=0$$

$$2x^2$$

$$x = -101$$

$$y-3=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow 0-x+32 \cdot 3-101=0$$

$$x = -5$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 34 \\ \hline 88 \\ 660 \\ \hline 748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 34 \\ \hline 136 \\ 1020 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 303 \\ \times 4 \\ \hline 1212 \\ -1156 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$2 < \frac{20-2\sqrt{3}}{4} < \frac{20+2\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{20-2\sqrt{3}}{4} < 1$$

$$4 < \frac{20-2\sqrt{3}}{4}$$

$$2\sqrt{3} < 13$$

$$86 < 42.25$$

$$y_1 \leq \frac{20+2\sqrt{3}}{4} \leq 7$$

$$21 < 20+2\sqrt{3} < 40$$

$$1 < 2\sqrt{3} < 2.9$$

$$20+2\sqrt{3} < 42$$

$$2\sqrt{3} < 2.2$$

$$\sqrt{3} < 1.1$$

$$20+2\sqrt{3} < 35$$

$$20+2\sqrt{3} < 35$$

$$55-34=21$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 4 \\ \hline 128 \\ 21 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 2 \\ \hline 42 \\ 441 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ -64 \\ \hline 367 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ -64 \\ \hline 367 \end{array}$$

$$y=5 \Rightarrow 2x^2 - 21x + 160 - 101 = 0$$

$$2x^2 - 21x + 59 = 0$$

$$D = 21^2 - 4 \cdot 2 \cdot 59 = 441 - 472 = -31$$

$$441 - 472 = -31$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$D = (11y - 34)^2 - 4(y - 3)(32y - 10)$$

$$(11y - 34)^2 = 121y^2 - 22 \cdot 34y + 34^2 = 121y^2 - 748y + 1156$$

$$4(y - 3)(32y - 10) = 4(32y^2 - 101y - 30) = 4(32y^2 - 101y + 303) = 128y^2 - 404y + 1212$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 117 \\ \hline 388 \\ 1156 \end{array}$$

$$\text{Уравнение: } D = 121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y - 1212 = -7y^2 + 40y - 56 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 212 \\ \times 156 \\ \hline 332 \end{array}$$

$$7y^2 - 40y + 56 \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 2 < \sqrt{2} < 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22 < 20 + (2\sqrt{2}) < 24 \Rightarrow 21 < \frac{20 + 2\sqrt{2}}{2} < \frac{28}{2} = 14$$

$$D_1 = 20^2 - 56 \cdot 7 = 400 - 392 = 8$$

$$y = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7} \Rightarrow \text{② } 4 < 2\sqrt{2} < 2$$

$$\text{Уравнение } \leq 4$$

$$\text{③ } 16 < 20 + 2\sqrt{2} < 18$$

$$\frac{14}{7} < \frac{20 + 2\sqrt{2}}{7} < \frac{21}{7}$$

$$\text{Уравнение: } y = 3$$

$y = -x^5 + 2a$ — координаты вершин.

$y = 2x$ — диагональ $\Rightarrow$ диагональ: $y = -\frac{1}{2}x$

Пересечение: $2x = -x^5 + 2a$ и $-\frac{1}{2}x = -x^5 + 2a$.

$$x^5 = 2(x - a)$$

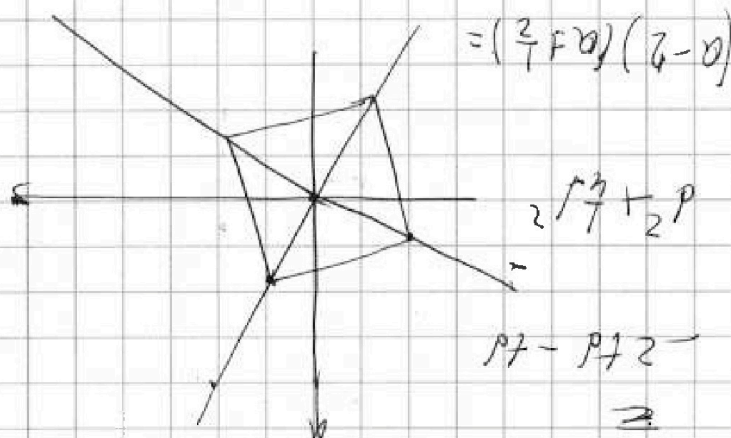
$$x^5 - 2x + 2a = 0$$

$$1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$0 = (a - 2 + x) \cdot x$$

$$0 = x(a - 2) + x^2$$

$$\begin{aligned} x^5 + x^5 - x^5 &= x^5 - x^5 + x^5 \\ x^5 + x^5 - x^5 &= x^5 \end{aligned}$$





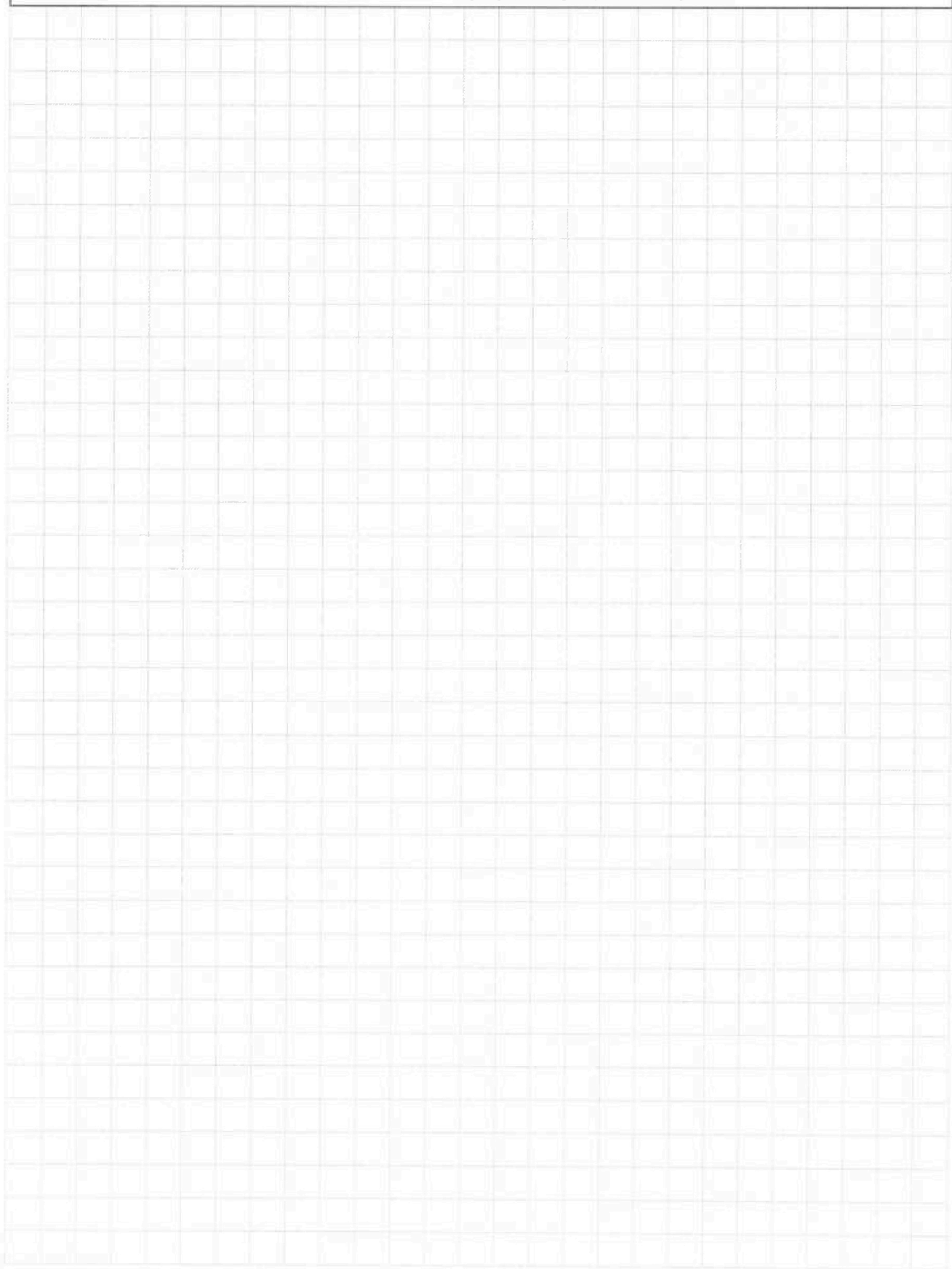
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





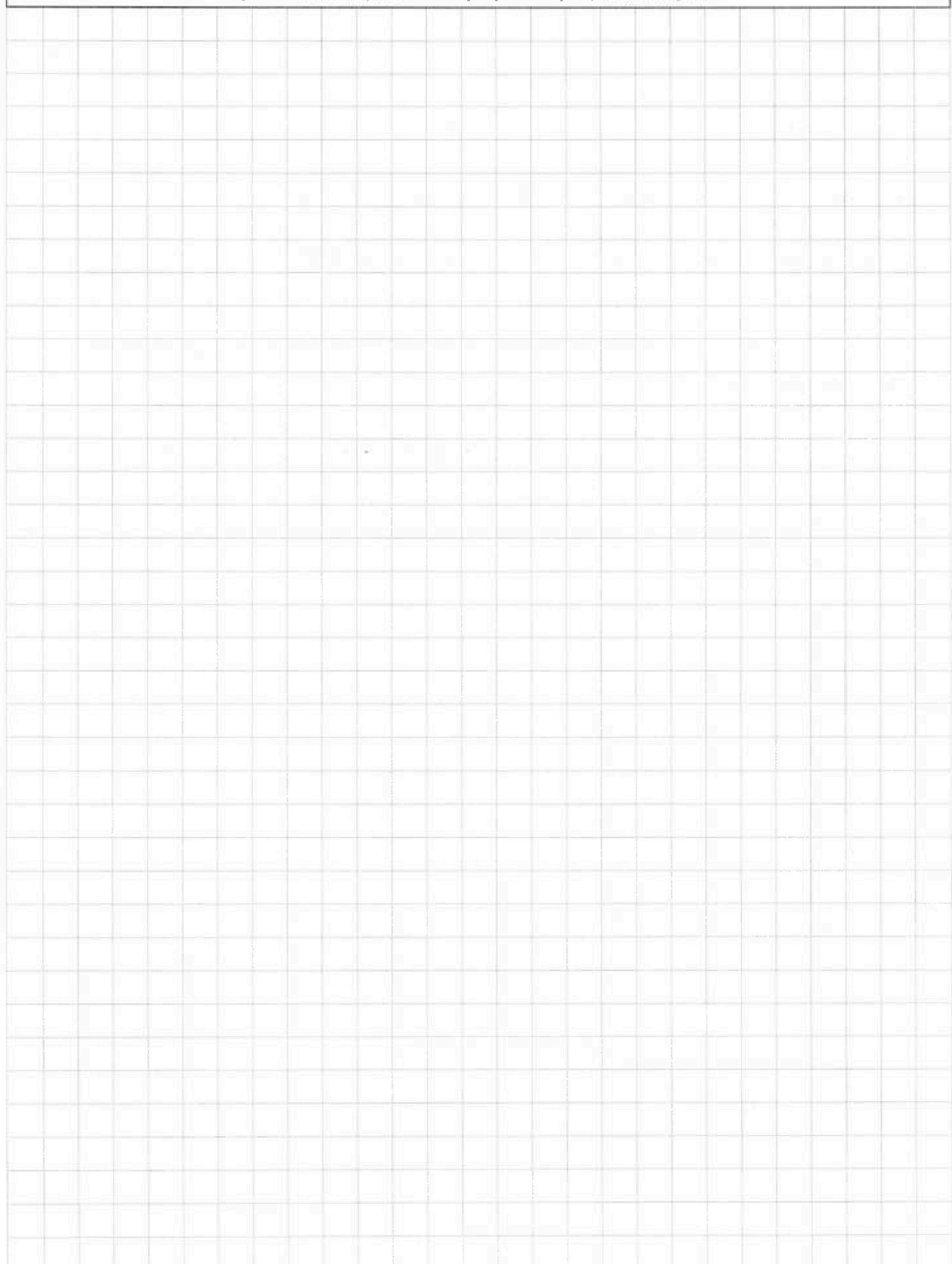
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



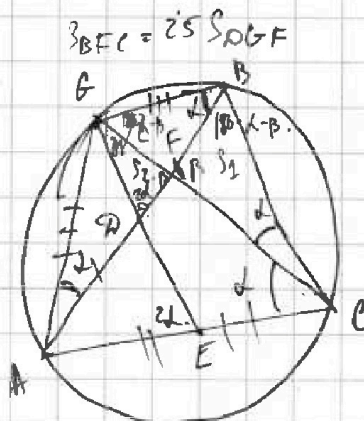
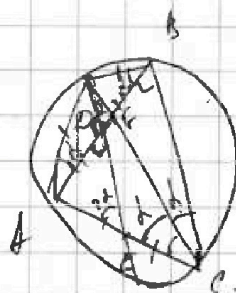
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

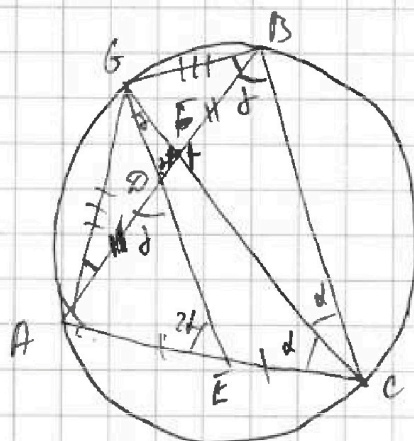
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



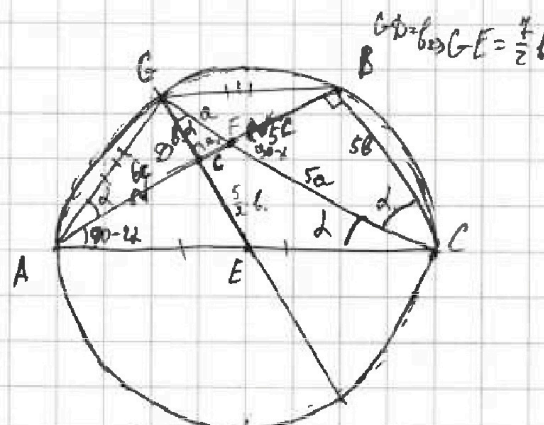
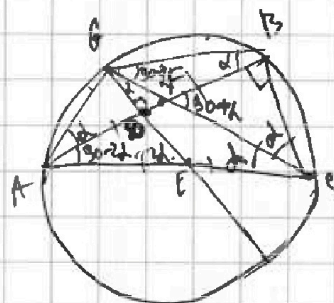
$$3BFC = 25 S_{\triangle GFC}$$



$$\triangle GFD \sim \triangle BCF$$

$$\frac{GF}{AC} = \frac{DF}{CF} = \frac{DG}{BF} = \frac{GF}{BC} = \frac{1}{5}$$

$$\angle G = \angle B = \angle \gamma = 90^\circ$$



$$\frac{BF}{FA} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{7} \Rightarrow BC = 5B \Rightarrow AC = 7B$$

$$\cos \angle C = \frac{5}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

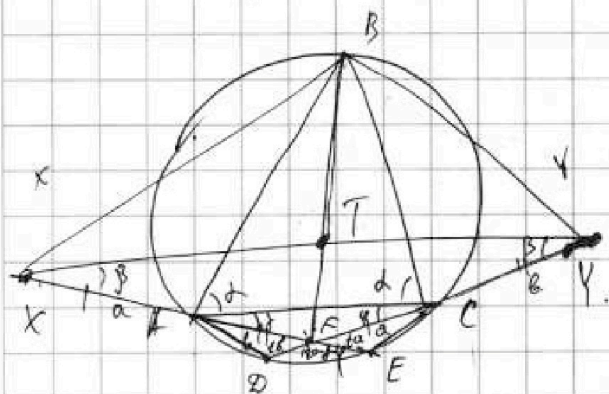
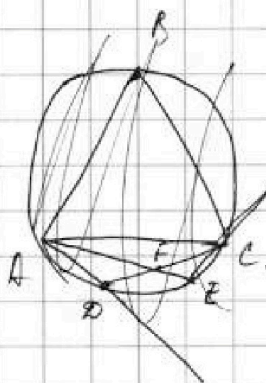
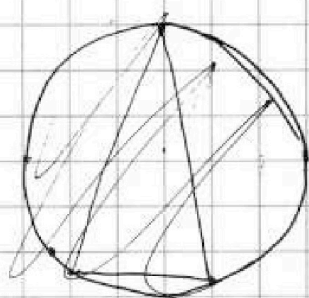
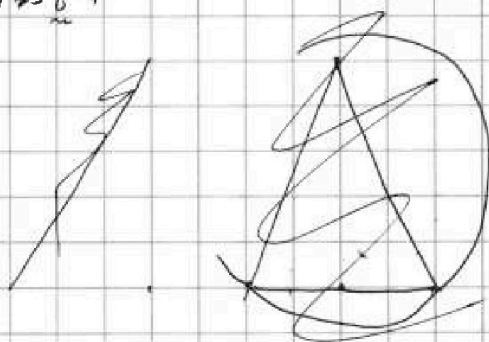
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

564



$$\boxed{B \times F \Psi?} \quad \begin{matrix} XY = 36 \\ BF = 14 \end{matrix}$$

$$XF = FY$$

$$\angle AFC = \frac{\widehat{DE} + \widehat{AC}}{2}$$

$$\widehat{DE} = \widehat{AC} - \widehat{AE} - \widehat{EC} = 180 - 2\alpha$$

$$\angle AFC = \frac{180 - 2\alpha - 4 - 8 + 180 + 2\alpha}{2} = 180 - 8 - 4$$

$$FEC \sim DFA \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{FD}{FE} = \frac{1}{a}$$