



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $5^{360} \cdot 7^{90}$ ?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 25 раз больше площади треугольника  $DGF$ .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = -x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = 2x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 19$ ,  $XY = 36$ .

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

Пусть  $x^3 - 9 = a$  ;  $x^2 - 1 = b \Rightarrow x^3 - x^2 - 8 = (x^3 - 9) - (x^2 - 1) = a - b$ .

Итого:  $|a| + |b| \leq |a - b|$ . Обозначим это выражение (X).

Рассмотрим возможные случаи расположения чисел  
а и b на числовой оси:

1)  $a \geq b \geq 0 \Rightarrow (X) \Rightarrow a+b \leq a-b \Rightarrow 2b \leq 0 \Rightarrow b \leq 0 \Rightarrow b=0$

2)  $b \geq a \geq 0 \Rightarrow$  (X):  $a+b \leq b-a \Rightarrow a \leq 0 \Rightarrow a=0, b \geq 0$

3)  $a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow (X)'$   $a - b \leq a + b \Rightarrow$   ~~$1 - 2 \leq 1 + 2 \Rightarrow 1 - 2 \leq 1 + 2$~~ , верно при  $a \geq 0, b \leq 0$

4)  $a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow$  (X):  $-a + b \leq -a + b \Rightarrow$   ~~$a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow a \leq 0, b \geq 0$~~

5)  $a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a - b \leq b - a \Rightarrow 2b \geq 0 \Rightarrow b = 0, a' \leq 0$

b)  $b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a - b \leq a - b \Rightarrow 2a \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \Rightarrow a = 0, b \leq 0$

Итого, рассмотрены все возможные случаи расположения чисел  $a, b$  и  $0$  на числовой оси.

~~Wasser~~  $a=0 \Rightarrow x^3 - 9 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$

$$b=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x \in \{-1; 1\}.$$

$$a > 0 \Rightarrow x^3 - 9 > 0 \Rightarrow x^3 > 9 \Rightarrow x \in (\sqrt[3]{9}; +\infty)$$

$$a < 0 \Rightarrow x^3 - 9 < 0 \Rightarrow x^3 < 9 \Rightarrow x \in (-\infty, \sqrt[3]{9})$$

$$b > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$b < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

1)  $b=0$  &  $a>0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$

$$2) \begin{cases} a=0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{9} \\ x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$$

3)  $\begin{cases} a > 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [\sqrt[3]{9}; +\infty) \\ x \in [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow$    $\Rightarrow x \in \emptyset$ .

4)  $a \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, \sqrt[3]{a}] \\ x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{a}]$

$$5) \begin{cases} b=0 \\ a \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x \in (-\infty; \sqrt[3]{9}] \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1; 1\}.$$

$$6) \begin{cases} a=0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{9} \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow x \notin \emptyset.$$

Also:  $\begin{cases} x = \sqrt[3]{9} \\ x \in (-\infty, -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}] \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$

OTBET:  $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$b = a \cdot q$$

$$c = a \cdot q^2, \text{ где } q \in \mathbb{N}, \text{ т.к. } \frac{a \cdot q}{\in \mathbb{N}} = \frac{b}{\in \mathbb{N}}.$$

$a \cdot b \cdot c = 5^{360} \cdot 7^{90}$ . Значит  $a \cdot (a \cdot q) \cdot (a \cdot q^2) = (a \cdot q)^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow a \cdot q = 5^{120} \cdot 7^{30}$ . Получается, нужно рассмотреть всевозможные  $a$  и  $q$ . Поскольку  $a \cdot q = 5^{120} \cdot 7^{30}$ , то  $a$  и  $q$  при разложении на простые множители должны иметь вид  $(5^{\alpha} \cdot 7^{\beta})$ , где  $0 \leq \alpha \leq 120, 0 \leq \beta \leq 30$ .

$$\text{Пусть } a = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}; q = 5^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 120 \\ \beta_1 + \beta_2 = 30 \end{cases}, \begin{matrix} \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \alpha_i \leq 120, \beta_j \leq 30 \\ \text{где } \forall i \in \{1, 2\} \\ \text{где } \forall j \in \{1, 2\}. \end{matrix}$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1 + 120. \text{ При } \alpha_1 \in [0; 120]: \alpha_2 \in [0; 120]$$

$$\beta_2 = -\beta_1 + 30. \text{ При } \beta_1 \in [0; 30]: \beta_2 \in [0; 30].$$

Число вариантов  $\alpha_1$  равно 121, вариантов  $\beta_1$  - 31.  
Значит вариантов числа  $a$  -  $(121 \cdot 31)$  штук, причем  
каждому  $a$  соответствует единственное  $q$ , то есть  
каждому  $a$  соответствует лишь одна пара  $(a, b, c)$ .

$$121 \cdot 31 = 3751.$$

Ответ: 3751

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$x, y \in \mathbb{Z}.$$

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0.$$

$$I) y=3 \Rightarrow 0 + x + 86 - 101 = 0$$

$$x = 5.$$

$$II) y \neq 3 \Rightarrow D = (11y-34)^2 - 4(32y-101)(y-3) =$$

$$= (121y^2 - 748y + 1156) - (128y^2 - 788y + 1212) = -7y^2 + 40y - 56.$$

$$\text{Чтоб существовала } x, \text{ нужно чтоб } D \geq 0, \Rightarrow -7y^2 + 40y - 56 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7y^2 - 40y + 56 \leq 0.$$

$$7y^2 - 40y + 56 = 0 \Rightarrow D_1 = 20^2 - 7 \cdot 56 = 400 - 392 = 8$$

$$y_{1,2} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}. \quad 1) \text{ Заметим, что } \frac{20-2\sqrt{2}}{7} < 2, \text{ т.к.}$$

$$20 - 2\sqrt{2} > 14$$

$$20 > 2\sqrt{2}$$

$$3 > 2\sqrt{2} \text{ — верно}$$

$$8 > 0 \text{ — верно} \Rightarrow \frac{20-2\sqrt{2}}{7} > 2.$$

$$2) \frac{20+2\sqrt{2}}{7} < 4, \text{ т.к. } 20 + 2\sqrt{2} < 28$$

$$2\sqrt{2} < 8$$

$$\sqrt{2} < 4$$

$$2 < 16 \text{ — верно} \Rightarrow \frac{20+2\sqrt{2}}{7} < 4.$$

$$7y^2 - 40y + 56 \leq 0 \Rightarrow y \in \left[ \frac{20-2\sqrt{2}}{7}; \frac{20+2\sqrt{2}}{7} \right], \text{ причем по доказанному:}$$

(II)

$$2 < y < 4. \quad y \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y=3, \text{ но вначале мы показали, что } y \neq 3. \text{ Противоречие.}$$

$$\text{Ответ: } (5; 3).$$

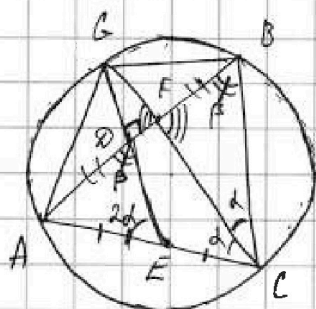
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Доано:  $\triangle ABC$

$\omega(O; R)$ ;  $A, B, C \in \omega$ .

$D \in AB$ ,  $\angle A = \angle B$

$E \in AC$ ,  $EA = EC$ .

$CF$  — биссектриса  $\angle BCA$ ,  $F \in AB$

$CF \cap \omega = G$ .

$ED \cap \omega = G$ .

$S_{BCF} = 25 \cdot S_{GFD}$ .

Найти:  $\angle A, \angle B, \angle C$ .

Решение:

$\angle ACG = \angle BCG$  — по усл.  $\Rightarrow AG = BG \Rightarrow AG = BG$ .

$C, A, B, G \in \omega$  — по усл.

$\triangle ABG$ :  $AG = BG \Rightarrow \triangle ABG$  — равноб.  $\Rightarrow GD$  — высота  $\triangle ABG \Rightarrow \angle GDF = 90^\circ$ .

$AD = DB \Rightarrow GD$  — медиана.

$\triangle ABC$ :  $DA = DB$   $\Rightarrow DE$  — средняя линия  $\Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \angle ADE = \angle ABC$  — соответств.  
 $EA = EC \Rightarrow DE = \frac{1}{2} BC$ .

$\angle ADE = \angle GDF$  — верт.  $\Rightarrow \angle ADE = 90^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$ .

$\triangle GDF$  и  $\triangle CBF$ :  $\angle BFC = \angle GFD$  — верт.  $\Rightarrow \triangle GDF \sim \triangle CBF$  — по 2-м углам  $\Rightarrow$   
 $\angle GDF = \angle FBC = 90^\circ$   
 $\Rightarrow \left(\frac{GD}{BC}\right)^2 = \left(\frac{GF}{CF}\right)^2 = \left(\frac{FD}{BF}\right)^2 = \frac{S_{GDF}}{S_{BCF}} = \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{BF}{FD} = \frac{5}{1} \Rightarrow BF = 5FD$ ;  $\frac{GD}{CB} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5GD = BC$ .

Пусть:  $FD = x \Rightarrow FB = 5x$ ;  $GD = y \Rightarrow BC = 5y$ .

$DB = FD + FB = 6x$ ;  $DB + DA = 2DB = AB \Rightarrow AB = 12x$ ;  $FA = FD + DA = 7x$ .

$DE = \frac{1}{2} BC = \frac{5y}{2} \Rightarrow GE = GD + DE = \frac{7y}{2}$ .

$\triangle ABC$ :  $\frac{BC}{AC} = \frac{BF}{FA}$  — по б. б. бисс. ( $CF$ )  $\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$ .

$AC = \frac{7}{5} BC \Rightarrow AC = \frac{7}{5} \cdot 5y = 7y$ .

$\cos \angle BCA = \frac{BC}{CA} = \frac{5}{7} \Rightarrow \angle BCA = \arccos\left(\frac{5}{7}\right)$ .

$\angle BAC = 180^\circ - \angle BCA - \angle CBA = 90^\circ - \arccos\left(\frac{5}{7}\right) \Rightarrow \angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$ .

Ответ:  $\angle ABC = 90^\circ$ ;  $\angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$ ;  $\angle BCA = \arccos\left(\frac{5}{7}\right)$ .

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода недопустима!



$$y = -x^5 + ax$$

$$y = 2x$$

Заметим, что диагонали квадрата перпендикулярны  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  прямая, содержащая в себе и диагональ должна быть  $y = 2x$

$\Rightarrow$  эта прямая задается функцией  $y = -\frac{1}{2}x$ , т.к. по условию проходит через  $O(0; 0)$ .

Пусть  $ABCD$  — искомым квадрат  $\Rightarrow A, B, C, D \in y = -x^5 + ax$ ;

$A, C \in y = 2x$ ;  $B, D \in y = -\frac{1}{2}x$ .

$$1) -x^5 + ax = 2x \Rightarrow x^5 + x(2-a) = 0$$

$$x(x^4 + 2 - a) = 0$$

$x$  имеет хотя бы 2 значения  $\Rightarrow 2 - a \leq 0 \Rightarrow a \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \{0; \sqrt[4]{a-2}; -\sqrt[4]{a-2}\}$ , но  $x \neq 0$ , т.к.  $A \neq C \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{a-2}$$

$$2) -x^5 + ax = -\frac{1}{2}x \Rightarrow 2x^5 - 2ax - x = 0$$

$$2x(x^4 - (a + \frac{1}{2})) = 0$$

$x$  имеет хотя бы 2 значения  $\Rightarrow a + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \{0; \sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}; -\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}\}$ , но  $x \neq 0$ , т.к.  $B \neq D$ .

Итого:  ~~$a \in [-\frac{1}{2}; +\infty)$~~   $a \in [2; +\infty)$

Пусть  $A(\sqrt[4]{a-2}; y_A)$   $\Rightarrow AB = \sqrt{(\sqrt[4]{a-2} - \sqrt[4]{a+\frac{1}{2}})^2 + (y_A - y_B)^2}$

$B(\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}; y_B)$

$$y_A = 2\sqrt[4]{a-2}$$

$$y_B = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$  Пусть  $\sqrt[4]{a-2} = t; \sqrt[4]{a+\frac{1}{2}} = d \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(t-d)^2 + (2t - \frac{1}{2}d)^2} = \sqrt{5t^2 - 3td + \frac{5}{4}d^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{5\sqrt{a-2} - 3\sqrt[4]{a-2}\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}} + \frac{5}{4}\sqrt{a+\frac{1}{2}}}$$

Ответ: Асторона рибна:  $\sqrt{5\sqrt{a-2} - 3\sqrt[4]{a-2}\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}} + \frac{5}{4}\sqrt{a+\frac{1}{2}}}$ ; при  $a \in [2; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \quad \Rightarrow a, b, c \neq 0$$

$$\begin{cases} a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} \\ a + \frac{7}{b} = c + \frac{7}{a} \\ b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \end{cases} \begin{matrix} | \cdot (bc) \\ | \cdot (ab) \\ | \cdot (ac) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} abc + 7c = b^2c + 7b & (1) \\ a^2b + 7a = abc + 7b & (2) \\ abc + 7a = ac^2 + 7c & (3) \end{cases}$$

$$(1) - (2) + (3) : 3abc + 7a + 7b + 7c = a^2b + b^2c + c^2a + 7a + 7b + 7c$$

$$3abc = a^2b + b^2c + c^2a$$

или  $a > 0, b > 0, c > 0$ , то  $\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} = abc \Rightarrow$   
 $\Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc$ . Равенство достигается, когда  $a=b=c$ , но это  
 противоречит условию.

Значит  $\exists$  число, которое ~~меньше~~ <sup>не больше</sup> 0, но  $a, b, c \neq 0 \Rightarrow \exists$  число  
 меньше 0.

Поскольку мы хотим, чтоб  $abc$  было максимальным,  
 нужно, чтоб: 2 числа были  $< 0$  и одно  $> 0$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|x^3-9|+|x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$$

$$|a|+|b| \leq |a-b|$$

$$1) a \geq b \geq 0 \Rightarrow a+b \leq a-b$$

$$2) b \geq a \geq 0 \Rightarrow a+b \leq b-a \Rightarrow 2a \leq 0 \Rightarrow \emptyset$$

$$3) a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow a-b \leq a-b - \text{верно}$$

$$4) a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow -a+b \leq b-a \Rightarrow 0 \leq 0 - \text{верно}$$

$$5) a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a-b \leq b-a \Rightarrow -2b \leq 0 \Rightarrow b \geq 0$$

$$6) b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a+b \leq a-b \Rightarrow -2a \leq 0 \Rightarrow a \geq 0$$

$$a \geq 0, b \leq 0$$

$$125-9+24 \leq 125-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$121-9+24 \leq 121-25-8$$

$$x=2$$

$$|8-9|+|4-1| \leq |8-4-9|$$

$$1+3 \leq 4$$

$$x=2$$

$$|8-9|+|4-1| \leq$$

$$\leq |8-4-9|$$

$$1+3 \leq 20 - \text{верно}$$

$$x^3-9 \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt[3]{9} \geq 1$$

$$x^2-1 \leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 1]$$

$$x^3-9 \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; \sqrt[3]{9}]$$

$$x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

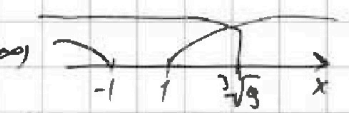
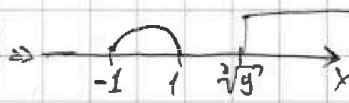
$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$



$$x \in [-1; 1]$$

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$abc = a^3 b^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow a, b = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

$$a \geq 1$$

$$b \geq 1$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-3) + x(11y-34) + 32y-101=0$$

$$x^2y - 3x^2 + 11xy - 34x + 32y - 101 = 0$$

$$y(x^2 + 11x - 32) - (3x^2 + 34x + 101) = 0$$

$$Dy + 32 = (11y - 34)^2 - 4(3x^2 + 34x + 101)(y-3) = 0$$

$$121y^2 - 34 \cdot 11 \cdot 2y - 4(32y^2 - 37 \cdot 3y - 101(y+303)) =$$

$$= 121y^2 - 34 \cdot 11 \cdot 2y - 128y^2 + 37 \cdot 4y - 4 \cdot 194y - 303 \cdot 4 = -7y^2 + 748y + 888y + 1156 - 1212 =$$

$$= -7y^2 + 40y + 56 = 0$$

$$7y^2 - 40y + 56 = 0$$

$$D = 400 - 4 \cdot 7 \cdot 56 = 400 - 1568 = -1168 < 0$$

$$y_{1/2} = \frac{20 \pm 2\sqrt{86}}{7}$$

$$y \leq \frac{20 + 2\sqrt{86}}{7} \leq 7$$

$$21 < 20 + 2\sqrt{86} < 40$$

$$1 < 2\sqrt{86} < 29$$

$$D \in \frac{20-2\sqrt{86}}{7} \cup (0,1) \cup \dots$$

$$y \in [1, 5]$$

$$y=1 \Rightarrow -2x^2 + x(34-11) + 32-101=0$$

$$-2x^2 + 23x - 69 = 0$$

$$2x^2 - 23x + 69 = 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 2 \cdot 69 = 529 - 552 = -23 < 0$$

$$y=2 \Rightarrow -x^2 + x(34-22) + 64-101=0$$

$$-x^2 + 12x - 37 = 0$$

$$x^2 - 12x + 37 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 + 1 > 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 37 = -1 < 0$$

$$y=4 \Rightarrow x^2 - 10x + 128 - 101 = 0$$

$$x^2 - 10x + 27 = 0$$

$$(x-5)^2 + 2 = 0$$

$$1) y=3 \Rightarrow x-101=0$$

$$2x^2$$

$$x = -101$$

$$y-3=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow 0-x+32-101=0$$

$$x = -5$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 34 \\ \hline 88 \\ 66 \\ \hline 748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 303 \\ \times 4 \\ \hline 1212 \\ -1156 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$2 < \frac{20-2\sqrt{86}}{7} < \frac{20+2\sqrt{86}}{7}$$

$$\frac{20-2\sqrt{86}}{7} < 1$$

$$4 < 20-2\sqrt{86}$$

$$2\sqrt{86} < 16$$

$$86 < 64$$

$$21 < 20 + 2\sqrt{86} < 40$$

$$1 < 2\sqrt{86} < 29$$

$$20 + 2\sqrt{86} < 42$$

$$2\sqrt{86} < 22$$

$$\sqrt{86} < 11$$

$$20 + 2\sqrt{86} < 35$$

$$2\sqrt{86} < 15$$

$$55 - 34 = 21$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 4 \\ \hline 128 \\ 21 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 2 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ -64 \\ \hline 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 21 \\ \hline 441 \end{array}$$

$$y=5 \Rightarrow 2x^2 - 21x + 160 - 101 = 0$$

$$2x^2 - 21x + 59 = 0$$

$$D = 21^2 - 4 \cdot 2 \cdot 59 = 441 - 472 = -31 < 0$$

$$441 - 472 = -31$$





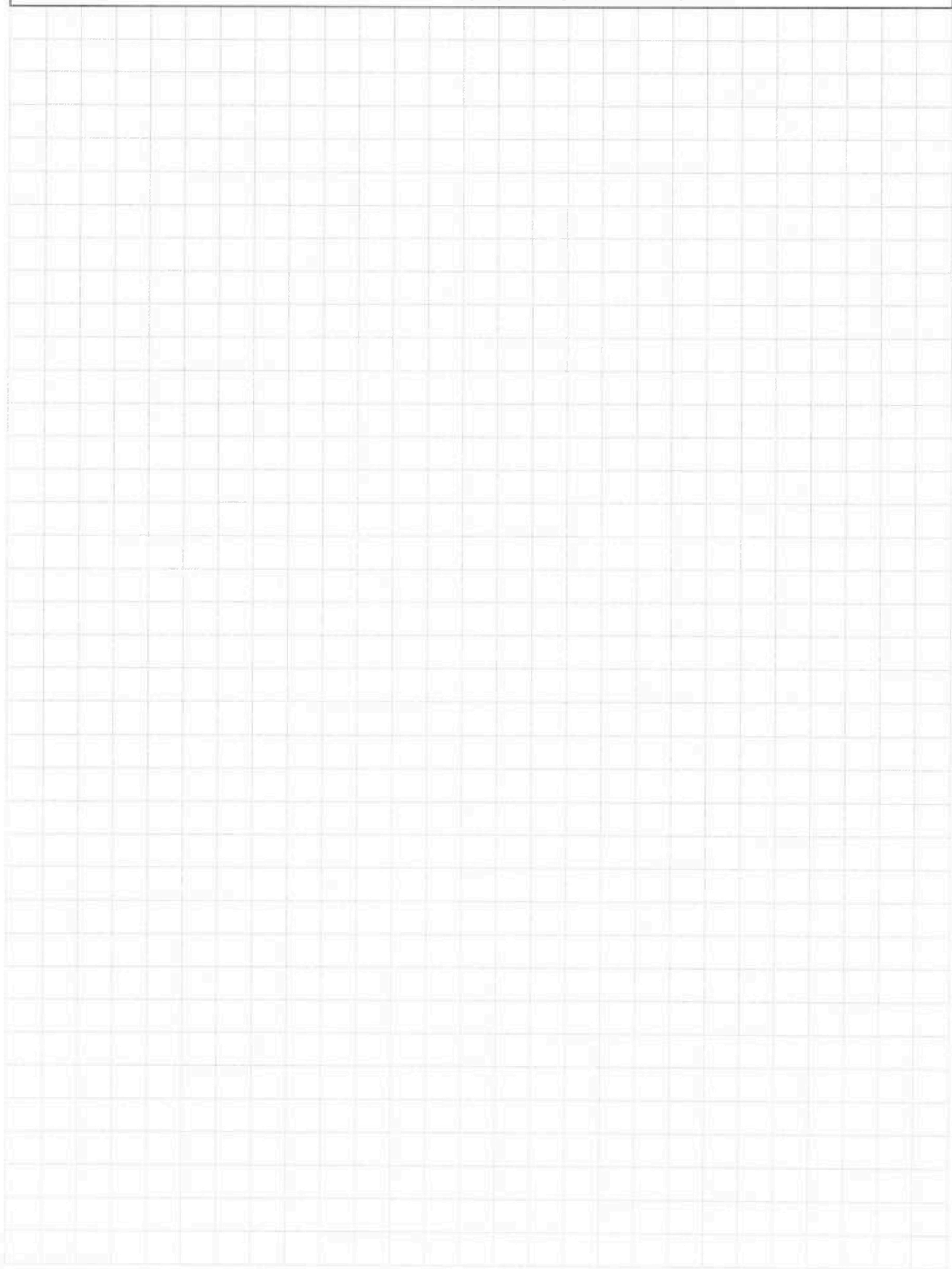
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





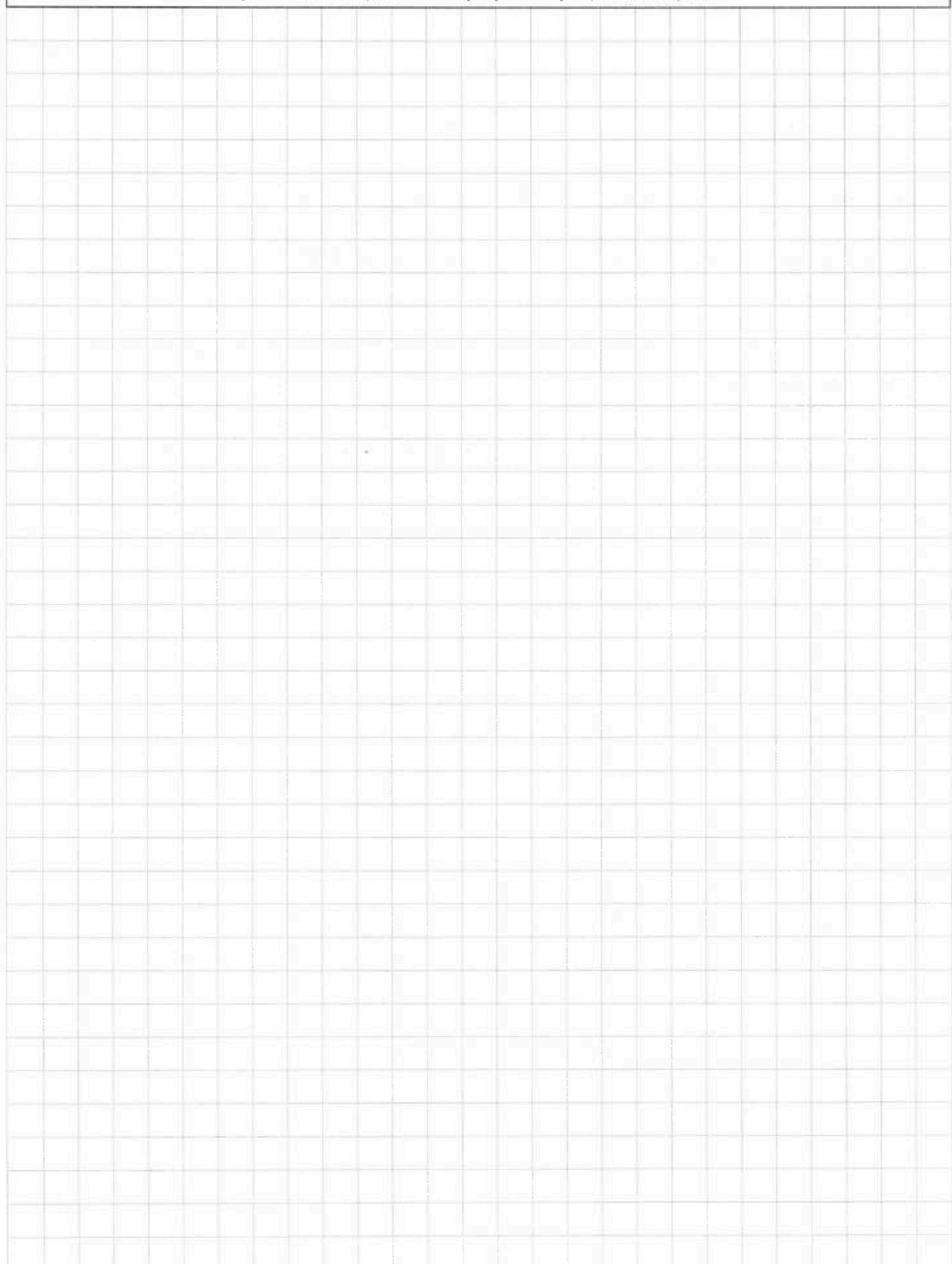
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



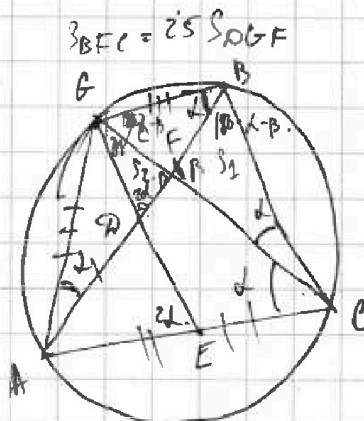
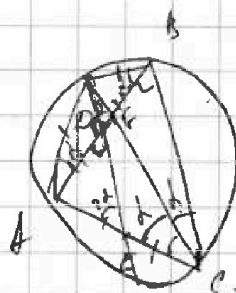
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

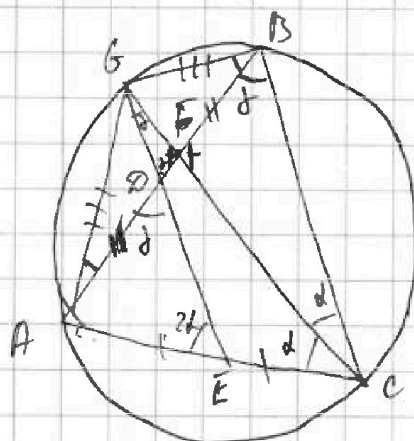
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



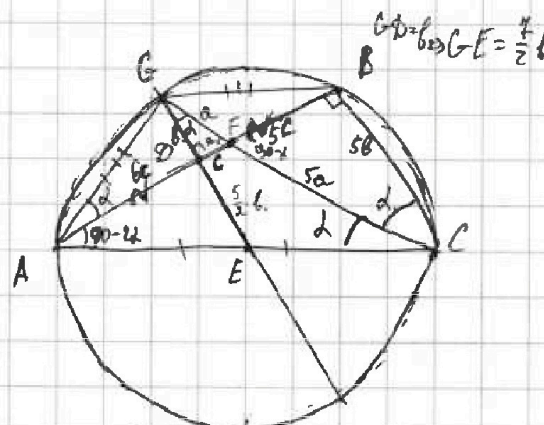
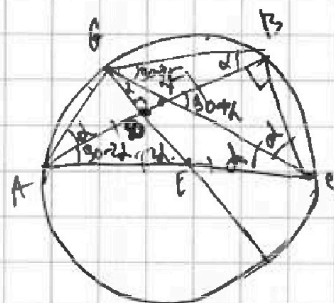
$$3BFC = 25 S_{\triangle GFC}$$



$$\triangle GFD \sim \triangle BCF$$

$$\frac{GF}{AC} = \frac{DF}{CF} = \frac{DG}{BF} = \frac{GF}{BC} = \frac{1}{5}$$

$$\angle G = \angle B = \angle \gamma = 90^\circ$$



$$\frac{BF}{FA} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{7} \Rightarrow BC = 5B \Rightarrow AC = 7B$$

$$\cos \angle C = \frac{5}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

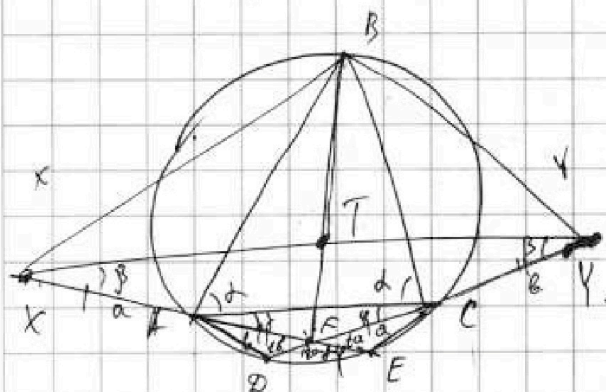
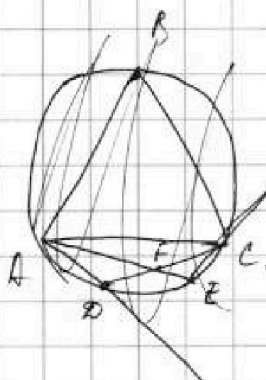
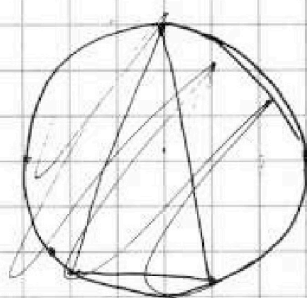
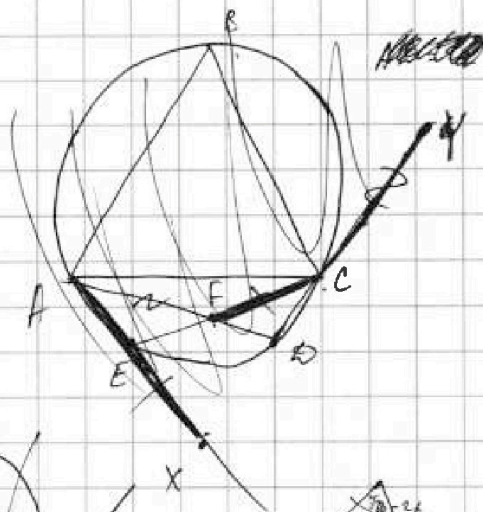
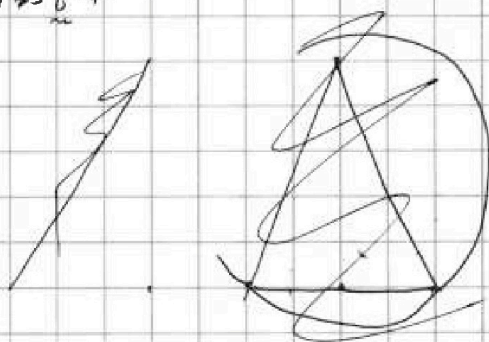
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

564



$$\boxed{B \times F \times Y?} \quad XY = 36 \quad BF = 14$$

$$XF = FY$$

$$\angle AFC = \frac{\widehat{DE} + \widehat{AC}}{2}$$

$$\widehat{DE} = \widehat{AC} - \widehat{AE} - \widehat{EC} = 180 - 2\alpha$$

$$\angle AFC = \frac{180 - 2\alpha - 4 - 8 + 180 + 2\alpha}{2} = 180 - 8 - 4$$

$$FEC \sim DFA \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{FD}{FE} = \frac{1}{a}$$