



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $5^{360} \cdot 7^{90}$ ?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 25 раз больше площади треугольника  $DGF$ .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = -x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = 2x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырехугольника  $BXFY$ , если  $BF = 19$ ,  $XY = 36$ .



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

1. Вариант 12

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

предположим, что  $x^3 - 9 \geq 0$ , тогда  $x \geq \sqrt[3]{9}$ , так как  $\sqrt[3]{9} > 1$ , то  $x^2 - 1 \geq 0$

то есть при  $x^3 - 9 \geq 0$ ,  $x^2 - 1 \geq 0$ . Сравним  $x^3 - x^2 - 8$

если  $x^3 - x^2 - 8 < 0$ , то  $x^3 + x^2 - 10 \leq -x^3 + x^2 + 8 \Rightarrow 2x^3 \leq 18 \Rightarrow x \leq \sqrt[3]{9}$ , но

$x \geq \sqrt[3]{9}$ , т.е.  $x = \sqrt[3]{9}$ , проверим, что при  $x = \sqrt[3]{9}$   $x^3 - x^2 - 8 < 0$ ,  $x^3 = 9$ , т.е.

$x^3 - x^2 - 8 = 1 - x^2$ , но при  $x = \sqrt[3]{9}$  ~~так как~~  $x^2 - 1 > 0$ , а значит  $1 - x^2 < 0$  и

$x^3 - x^2 - 8 < 0$  при  $x = \sqrt[3]{9}$ . Если же при каких-то значениях  $x > \sqrt[3]{9}$

$x^3 - x^2 - 8 \geq 0$ , то утверждение  $x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8$  явно неверно,

так как  $x^3 - x^2 - 8 = (x^3 - 9) - (x^2 - 1)$ , а значит при  $x^2 - 1 \geq 0$   $x^3 - x^2 - 8 < x^3 - 9$ ,

а значит  $|x^3 - 9| + |x^2 - 1| > |x^3 - x^2 - 8|$  при  $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$

теперь рассмотрим случай, когда  $x^3 - 9 < 0$ , тогда  $x < \sqrt[3]{9}$  и возможны

2 варианта:  $x^2 - 1 \geq 0$  и  $x^2 - 1 < 0$ , рассмотрим 1 случай:  $x^2 - 1 \geq 0$

Посмотрим на  $x^3 - x^2 - 8$ :  $x^3 - x^2 - 8 = (x^3 - 9) - (x^2 - 1)$ , где  $x^3 - 9 < 0$  и

$-(x^2 - 1) \leq 0$  (так  $x^2 - 1 \geq 0$ )  $\Rightarrow x^3 - x^2 - 8 < 0$ , рассмотрим теперь:

$9 - x^3 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$ , мы получаем  $0 \leq 0$ , что верно всегда,

когда  $x^3 - 9 < 0$ , а  $x^2 - 1 \geq 0$ , что верно при  $\begin{cases} x < \sqrt[3]{9} \\ |x| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup$

$[1; \sqrt[3]{9})$ . Рассмотрим случай 2:  $x^2 - 1 < 0$ , что возможно только

при  $x \in (-1; 1)$ . Посмотрим на  $x^3 - x^2 - 8 = x^2(x - 1) - 8$ , т.е. при  $x - 1 < 0$

$x^3 - x^2 - 8 < 0$  то есть при  $x \in (-1; 1)$   $x^3 - x^2 - 8 < 0$ .

Получаем  $9 - x^3 + 1 - x^2 \leq -x^3 + x^2 + 8 \Rightarrow 10 - x^2 \leq x^2 + 8 \Rightarrow 2x^2 \geq 2$   
 $x^2 \geq 1$ , но  $x \in (-1; 1)$ , а значит на промежутке  $(-1; 1)$  нет ни одного.

Ответ:  $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. Вариант 12

Поскольку  $a, b, c$  образуют геометрическую прогрессию, то  $b^2 = ac$

$$\text{значит } b^3 = abc = 5^{360} \cdot 7^{60} \Rightarrow b = 5^{120} \cdot 7^{20} \text{ и } ac = 5^{240} \cdot 7^{60}$$

Очевидно, что разность  $a$  будет соответствовать разности  $c$  и

задача сводится к поиску натурального  $a$  такого, что  $\frac{5^{240} \cdot 7^{60}}{a} \in \mathbb{N}$

$5$  имеет степень  $241$  и  $7$  имеет степень  $61$ , т.е.

количество вариантов, когда  $5^{240} \cdot 7^{60} : a$  равно  $241 \cdot 61 = 14701$ .

При таком подходе мы считаем тройки  $a, b, c$  и  $c, b, a$  за разные тройки, если не считать это за одинаковые тройки,

то ответ будет  $7351$

Ответ:  $7351$  не учитывая порядок и  $14701$  учитывая порядок

чисел  $a, b, c$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. вариант 12

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11y-34 \pm \sqrt{121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212}}{2y-6} =$$

$$= \frac{11y-34 \pm \sqrt{4y^2 + 40y - 56}}{2y-6}, \text{ откуда } -4y^2 + 40y - 56 \geq 0 \text{ и } y \neq 3$$

$$4y^2 - 40y + 56 \leq 0$$

$$y_{1,2} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1568}}{8} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$y \in \left[ \frac{20 - 2\sqrt{2}}{4}, \frac{20 + 2\sqrt{2}}{4} \right], \text{ но } y \in \mathbb{Z}, \frac{20 - 2\sqrt{2}}{4} > 2, \text{ т.к. } 20 - 2\sqrt{2} > 14$$

$$\frac{20 + 2\sqrt{2}}{4} < 4, \text{ т.к. } 20 + 2\sqrt{2} < 23, \text{ то есть } 2 < y < 4, \text{ т.е. } y = 3, \text{ но}$$

$y \neq 3$  решений нет.

Но при  $y = 3$  уравнение имеет вид  $-x(11y-34) + 32y - 101 = 0$

$$\text{где } x = \frac{32y - 101}{11y - 34}, \text{ а при } y = 3 \quad x = \frac{96 - 101}{33 - 34} = \frac{-5}{-1} = 5$$

Ответ:  $(5; 3)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

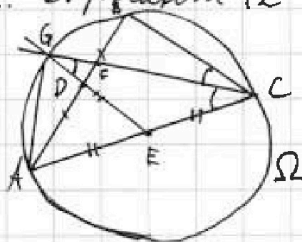
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. Введите 12



Дано:  $AD = DB$ ,  $AE = EC$   $CF$  - биссектриса  
 $ED \cap CF = G$   $G \in \Omega$

$$S_{DGF} = \frac{1}{25} S_{BCF}$$

Найти:  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$

Заметим:  $DE$  - средняя линия  $\triangle ABC \Rightarrow DE \parallel BC$ ,  $\angle DGF = \angle FCB$  как  
накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых  $BC$  и  $DE$

секущей  $CG$ , также  $\angle GFD = \angle BFC$  как ~~накрест~~ вертикальные.

Значит,  $\triangle DGF \sim \triangle BCF$  по I признаку, значит  $\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}} = k^2$ , где  $k$  - coeff.

по условию  $\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}} = 25 = 5^2 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow \frac{FC}{GF} = 5$  и  $\frac{BF}{DF} = 5$ , т.к.

$AD = BD$ , а  $BD = BF + DF$ , то  $\frac{BF}{DF} = \frac{5}{4}$ . Так как  $\angle DGF = \angle FCB$ , а

$\angle FCB = \angle FCA$ , то  $\angle DGF = \angle FCA \Rightarrow \triangle CEG$  - равнобедренный и

$GE = EC$ , а  $EC = EA$ . Вспомогательная  $\triangle AGC$  медиана  $GE = \frac{1}{2}$  стороны

$AC$ , к которой проведена, а значит  $\angle AGC = 90^\circ$ , но  $\angle AGC$  и  $\angle B$  вертикальные

на одну и ту же дугу, значит  $\angle B = 90^\circ$ . Так как  $CF$  - биссектриса, то

$\frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{4}$ , откуда  $\sin \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{4} = \cos \angle C$ , откуда

$\angle A = \arcsin \frac{5}{4}$ , а  $\angle C = \arccos \frac{5}{4}$

Ответ:  $\angle A = \arcsin \frac{5}{4}$ ,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $\angle C = \arccos \frac{5}{4}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

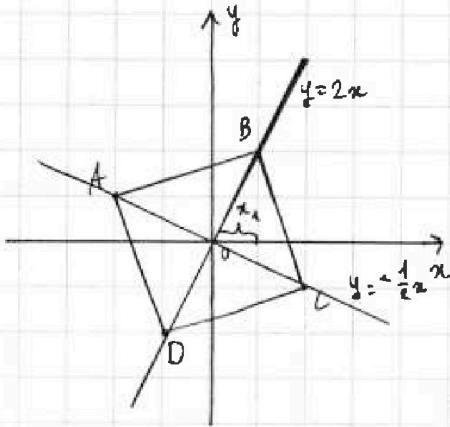
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. Вариант 12



Центр - точка  $O$ ;  $A, B, C, D$  - вершины квадрата

$x_1$  - абсцисса точки  $B$  ( $-x_1$  - ордината точки  $C$ )

$x_1 > 0$

Проведём вторую диагональ квадрата, она перпендикулярна первой и её функция  $y = -\frac{1}{2}x$

ордината точки  $C = -x_1$  в силу того, что

при повороте на  $90^\circ$  квадрата переходит в такой же квадрат. Рассмотрим

точки  $B$  и  $C$ , были пересекаться по 2 функциям, так что

$$2x_1 = -x_1^5 + ax_1 \quad (\text{в точке } B \quad y = y) \quad \text{и} \quad -x_1 = -32x_1^5 + 2ax_1 \quad (\text{в точке } C)$$

$$-x_1^5 + x_1(a-2) = 0 \Rightarrow -x_1^4 + (a-2) = 0 \quad (\text{т.к. } x_1 > 0 \text{ у нас центр тяжести})$$

$$a-2 = x_1^4 \Rightarrow a = x_1^4 + 2 \quad (1)$$

$$-x_1 = -32x_1^5 + 2ax_1 \Rightarrow -32x_1^5 + x_1(2a+1) = 0 \quad 2a+1 = 32x_1^4$$

$$a = \frac{32x_1^4 - 1}{2} \quad (2)$$

$$\text{из } (1) \text{ и } (2) \text{ получаем } 2x_1^4 + \frac{1}{2} = 32x_1^4 - 1 \Rightarrow 30x_1^4 = \frac{3}{2} \quad x_1^4 = \frac{1}{6}$$

$$a = \frac{1}{6} + 2 = 2\frac{1}{6} \quad x_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$$

$$OB = OC \text{ и } BC = \sqrt{2} \cdot OB, \text{ где } OB = \sqrt{x_1^2 + 4x_1^2} \quad (y = 2x \Rightarrow y_1 = 2x_1)$$

$$OB = \sqrt{5x_1^2} \Rightarrow BC = \sqrt{10x_1^2} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{4\sqrt{50}}{3}$$

$$\text{Ответ: } a = 2\frac{1}{6} = \frac{13}{6}, \text{ а сторона квадрата } \frac{4\sqrt{50}}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. Вариант 12

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}$$

$$\frac{ab+4}{b} = \frac{bc+4}{c} = \frac{ac+4}{a} \quad \text{abc}$$

$$abc + 4ac = ab^2c + 4ab = abc^2 + 4bc$$

$$\begin{cases} abc(a-b) = 4a(b-c) \\ abc(a-c) = 4c(b-a) \\ abc(b-c) = 4b(c-a) \end{cases}$$

$$bc(a-b) = 4(b-c) \Rightarrow a-b = \frac{4(b-c)}{bc}$$

$$abc(c-a) = 4c \cdot \frac{4(b-c)}{bc} = 4c \cdot \frac{4(b-c)}{bc}$$

$$c-a = \frac{49(b-c)}{ab^2c}$$

$$abc(b-c) = 4b \cdot \frac{49(b-c)}{ab^2c}$$

$$abc = \frac{4^3}{abc}$$

$$abc = \pm \sqrt[3]{4^3} = \pm \sqrt[3]{343}$$

Ответ:  $abc = \sqrt[3]{343}$

Заметим, что  $a \neq b \neq c$ , т.к. если

например  $a=b$ , то  $\frac{4}{b} = \frac{4}{c}$ , а значит

$b=c$ , но тогда получается,

что  $a=b=c$ , что противоречит

условию.



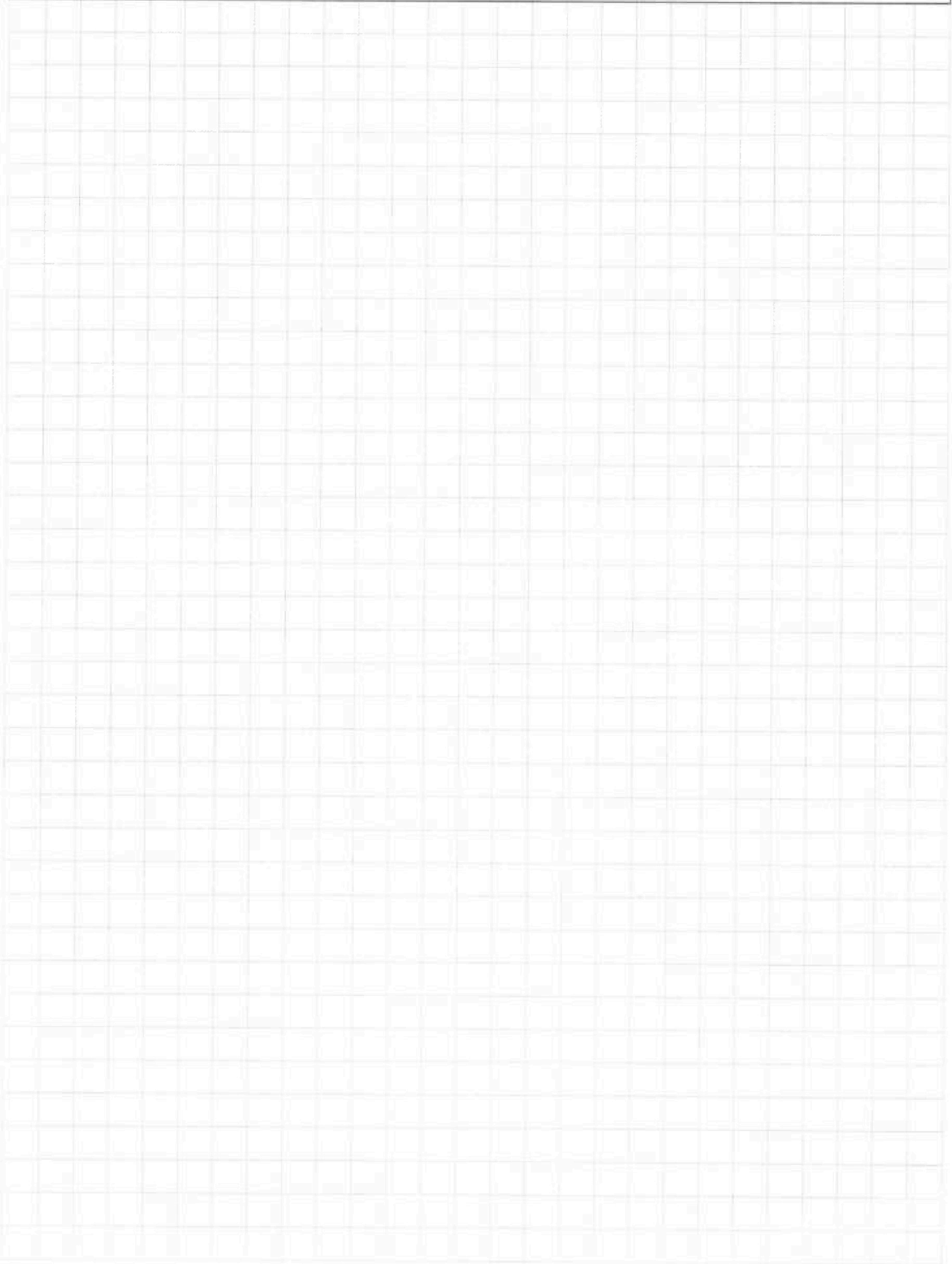
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







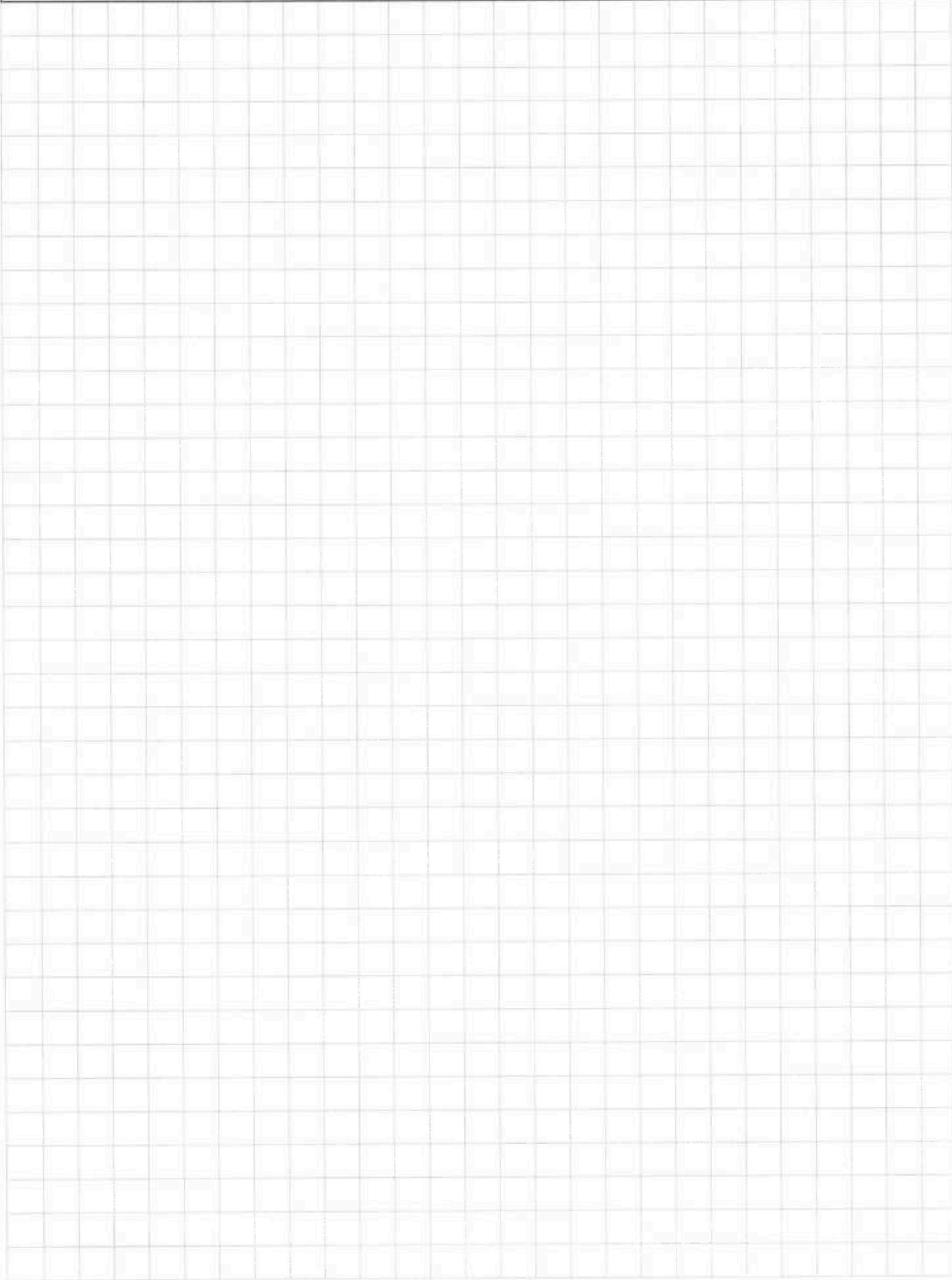
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3)  $x^3(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$

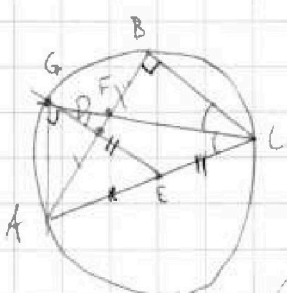
$x_{1,2} = \frac{11y-34 \pm \sqrt{(11y-34)^2 - 4(32y-101)}}{2}$

$-4y^2 + 40y - 56 \geq 0$   
 $4y^2 - 40y + 56 \leq 0$   
 $y_{1,2} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1568}}{8} = \frac{40 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{10 \pm \sqrt{2}}{2}$

возможна  $y = 3$

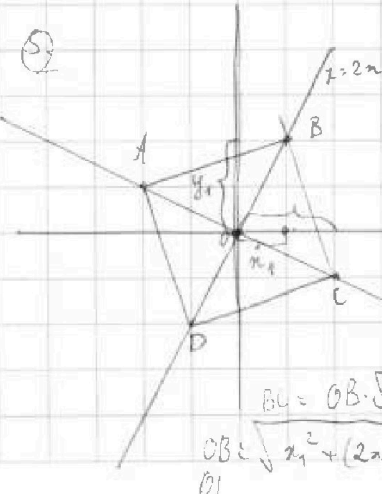
$x^2(3-3) - x(33-34) + 96 - 101 = 0$   
 $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$   
 Ответ:  $(5; 3)$

4)



$abc = \sqrt{7^3} \quad (a-b) = \frac{abc(c-b)}{abc} = \frac{abc(c-b)}{abc}$   
 $k = 5 \quad abc(c-b) = \frac{49 \cdot 7 \cdot (c-b)}{abc}$   
 $\frac{FC}{GF} = 5 \quad \frac{BF}{DF} = 5 \quad \frac{AF}{AF} = 1$

5)



$\angle A = \arcsin(\frac{5}{12})$   
 $\angle C = \arccos(\frac{5}{12})$   
 $OB = \sqrt{\frac{4}{6} + \frac{16}{6}} = \sqrt{\frac{20}{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$   
 $OC = \sqrt{5 \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{21}{6}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$   
 $BC = OB \cdot \sqrt{2} - 2x_1 = \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \sqrt{2} - 2x_1 = \sqrt{\frac{20}{3}} - 2x_1$   
 $OB \cdot OC = \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \sqrt{\frac{7}{2}} = \sqrt{\frac{70}{6}} = \sqrt{\frac{35}{3}}$