МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3-9\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2-8\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360}\cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=-x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=19$, $XY=36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Если $|x| \geq \sqrt[3]{9}$, то 1-ый модуль раскрывается со знаком "+", иначе со знаком минус. $|x^3-9|+|x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$ (*). Аналогично для II-ого модуля при $|x|\geq 1$, рассмотрим несколько случаев~~

~~1) $|x| \geq \sqrt[3]{9}$, $x^3-x^2-8 \geq 0$; (*): $x^3-9+x^2-1 \leq x^3-x^2-8 \Rightarrow x^2 \leq 1$, но $|x|>1$, $x\in\emptyset$~~

~~2) $|x| \geq \sqrt[3]{9}$, $|x|>1$, $x^3-x^2-8 \leq 0$ $x^3-9+x^2-1 \leq -x^3+x^2+8 \Rightarrow 2x^3 \leq 0 \Rightarrow$~~

№1.

*: $|x^3-9|+|x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$

$x^3-9 \geq 0$ при $x \in [\sqrt[3]{9}, +\infty)$, <0 при $x\in(-\infty, \sqrt[3]{9})$; $x^2-1\geq 0$ при $x\in(-\infty;-1]\cup[1,+\infty)$ <0 при $x\in(-1;1)$, рассмотрим несколько случаев: $(1<\sqrt[3]{9})$

1) $x\in[\sqrt[3]{9}, +\infty)$ $x^3-x^2-8\geq 0$ *: $x^3-9+x^2-1 \leq x^3-x^2-8 \Rightarrow x^2\leq 1$, но $x\geq\sqrt[3]{9}$, $x\in\emptyset$

2) $x\in[\sqrt[3]{9}; \sqrt[3]{9}+\infty)$ $x^3-x^2-8\leq 0$ *: $x^3-9+x^2-1 \leq -x^3+x^2+8 \Rightarrow 2x^3\leq 9$, но $x\in[\sqrt[3]{9}, +\infty)$

т.е. ед. подх. точка $x=\sqrt[3]{9}$: $x^3-x^2-8 = 1-\sqrt[3]{81}<0$ - подходит.

3) $x\in[1;\sqrt[3]{9}]$ $x^3-x^2-8\geq 0$ *: $-x^3+9+x^2-1 \leq x^3-x^2-8 \Rightarrow x^3-x^2-8 \geq 0$

4) $x\in[1,\sqrt[3]{9}]$ $x^3-x^2-8 < 0$ *: $-x^3+9+x^2-1 \leq -x^3+x^2+8 \Rightarrow 8\leq 8$, пусть $A=\left\{x \,\middle|\, \begin{matrix} x\in[1,\sqrt[3]{9}] \\ x^3-x^2-8\geq 0\end{matrix}\right\}$

тогда $x\in A$ - входит в ответ, но и $x\in[1,\sqrt[3]{9}]\setminus A$ входит в ответ по случаю 4, т.е. $x\in[1;\sqrt[3]{9}]$ - входит в ответ.

5) $x\in(-1,1)$ $x^3-x^2-8\geq 0$ *: $-x^3+9-x^2+1 \leq x^3-x^2-8$ $x^3\geq 9$, но $x^3\leq 1 \Rightarrow x\in\emptyset$

6) $x\in(-1;1)$ $x^3-x^2-8\leq 0$ *: $-x^3+9-x^2+1 \leq -x^3+x^2+8$ $x^2\geq 1$, но $x\in(-1,1) \Rightarrow x\in\emptyset$

7) $x\in(-\infty,-1]$ $x^3-x^2-8<0$, ведь $x^3<0$ и $-x^2<0$; *: $-x^3+9+x^2-1 \leq -x^3+x^2+8 \Rightarrow 8\leq 8$ - верно

Ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup[1,\sqrt[3]{9}]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

a, b, c, если a или b или $c \vdots p$, p - простое, $p \neq 5$, $p \neq 7$, то $abc \vdots p$, но $abc = 5^{360} \cdot 7^{90}$, противоречие, т.е. $a = 5^{\alpha} 7^{\beta}$, $q = 5^{\gamma} 7^{\psi}$, где α, β - натуральные или 0, γ, ψ - целые (но $\gamma = \psi = 0$ неверно (знаменатель прогрессии $\neq 1$)

тогда $b = aq$ $c = aq^2$ $abc = a^3 q^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow aq = 5^{120} \cdot 7^{30} = 5^{\alpha+\gamma} 7^{\beta+\psi}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 120 \\ \beta + \psi = 30 \end{cases}$, т.к. b, c - натуральные

$c = aq^2 = 5^{\alpha+2\gamma} 7^{\beta+2\psi}$, т.е. $\begin{cases} \alpha + 2\gamma \geq 0 \\ \beta + 2\psi \geq 0 \end{cases}$

$b = aq = 5^{\alpha+\gamma} 7^{\beta+\psi}$

$\begin{cases} \alpha + \gamma \geq 0 \\ \beta + \psi \geq 0 \end{cases}$

~~такт~~

тогда $\gamma = 120 - \alpha$

$\psi = 30 - \beta$; $\begin{cases} 240 \geq \alpha \\ 60 \geq \beta \end{cases}$, для каждого α однозначно определен γ, для β - ψ, всего α принимает 241 значение, β - 61. Тогда всего комбинаций: $241 \cdot 61 - 1 = 14400$ $(q \neq 1)$

Ответ: 14400

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

пусть $y \neq 3$

$* = x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$, квадратное уравнение отн. x

$D = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 + 34^2 - 22\cdot 34y + (4y-12)(101-32y) =$

$= 121y^2 + 34^2 - 22\cdot 34y + 404y - 128y^2 - 1212 + 384y =$

$= 121y^2 + 1156 - 784y + 404y - 128y^2 - 1212 + 384y = -7y^2 + 4y - 56 \geq 0$

кв. уравнение отн. y:

$D = 16 - 4(-7)(-56)$

$= 16 - 28\cdot 56 < 0$, т.к.

если $*$ - квадратное отн. x, то решений нет, что верно при $y \neq 3$

$y = 3$; $0 = 32\cdot 3 - 101 - x(-1)$ $x = 101 - 32\cdot 3 = 101 - 96 = 5$

Ответ: $(5; 3)$

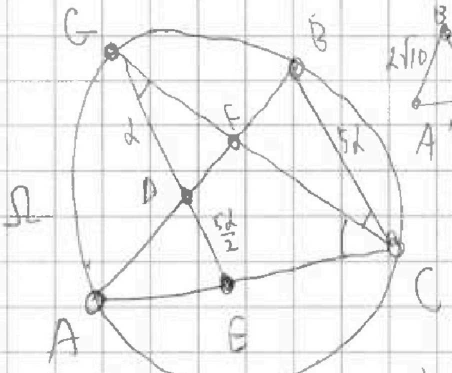
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

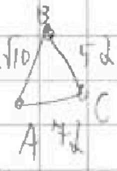
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





1) DE - ср. линия $\triangle ABC$, т.е $DE \parallel BC$ и
$\angle EGF = \angle GCB = \angle GCA \Rightarrow \triangle GEC$ - равноб. $\Rightarrow AC = 2GE = 2DE + 2DG =$
$= BC + 2DG$

2) т.к. $\angle GFD = \angle BFC$ и $\angle DGF = \angle FCB$
$\triangle GDF \sim \triangle BCF$, но $S_{\triangle BCF} = 25 S_{\triangle GDF}$
$\Rightarrow \frac{GD}{BC} = \sqrt{\frac{S_{\triangle GDF}}{S_{\triangle BCF}}} = \frac{1}{5}$, тогда $GD = \frac{BC}{5} = \alpha$ (пусть $BC = 5\alpha$)

тогда $AC = BC + 2DG = 5\alpha + 2\alpha = 7\alpha$

3) $DA = DB = \frac{AB}{2}$, степень точки D отн. Ω: $\frac{5\alpha}{2}^2 = \frac{AB^2}{4} \Rightarrow AB = \alpha\sqrt{10}$

4) З теоремы косинусов: $10\alpha^2 = 25\alpha^2 + 49\alpha^2 - 2\cdot 5\cdot 7\alpha^2 \cos\angle C$

$49\alpha^2 = 10\alpha^2 + 25\alpha^2 - 2\cdot 5\alpha\cdot\alpha\sqrt{10}\cdot\cos\angle B$ | $10 = 74 - 70\cos\angle C \Rightarrow \cos\angle C = \frac{64}{70} = \frac{32}{35}$

$49 = 35 - 10\sqrt{10}\cos\angle B$

$\cos\angle B = -\frac{14}{10\sqrt{10}} = -\frac{7}{5\sqrt{10}}$

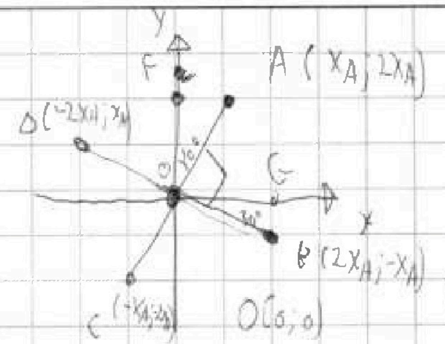
$25\alpha^2 = \alpha^2 10 + 49\alpha^2 - 2\cdot 7\alpha\cdot\alpha\sqrt{10}\cdot\cos\angle A$

$25 = 59 - 14\sqrt{10}\cos\angle A \Rightarrow \cos\angle A = \frac{34}{14\sqrt{10}} = \frac{17}{7\sqrt{10}}$

Ответ: $\angle A = \arccos\left(\frac{17}{7\sqrt{10}}\right)$

$\angle B = \arccos\left(-\frac{7}{5\sqrt{10}}\right)$

$\angle C = \arccos\left(\frac{32}{35}\right)$



$A(x_A; 2x_A)$ пусть точки (вершины квадрата ABCD) A и C, лежат на диагонали, лежащей на диагонали $y = 2x$, в частности $A(x_A; 2x_A)$, т.к. $(0;0)$ — центр квадрата $C(-x_A; -2x_A)$, пусть $F(0; 2x_A)$, тогда

$\angle FOA = 30^\circ$ $\left(FA = \frac{OF}{2}\right)$ и $\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow \angle BOG = 30^\circ$

где $(B(x_B; y_B)$ а $G(x_B; 0))$ тогда $BG = \frac{OG}{2}$, но $OA = OB$ $(x_B = 2y_B)$

$\Rightarrow x_B = 2x_A$; $y_B = -x_A$, т.к. O — центр квадрата $D = (-x_B; -y_B) = (-2x_A; x_A)$

$A, B, C, D \in y = -x^5 + ax$;

одно и то же, одно и то же

$$\begin{cases} 2x_A = -x_A^5 + ax_A \\ -x_A = -32x_A^5 + 2ax_A \\ -2x_A = x_A^5 - ax_A \\ x_A = 32x_A^5 - 2ax_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A^4 = a - 2 \\ 32x_A^4 = 2a + 1 \end{cases}$$

($x_A \neq 0$, т.к. иначе абсурд)

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_A = \sqrt[4]{a-2} \\ 32a - 64 = 2a + 1 \end{cases}$$

$30a = 65$

$a = \frac{65}{30} = \frac{13}{6}$

$x_A = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}$

$OA = \sqrt{x_A^2 + 4x_A^2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{6}}$

$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = OA\sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt{5}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

Ответ: $a = \frac{13}{6}$, сторона квадрата $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Заметим~~: $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, если $a=b$, то $\underbrace{a+\frac{7}{a}=a+\frac{7}{c}}=c+\frac{7}{a} \Rightarrow a=c$, что противоречит условию. Аналогично, если $b=c$ (или $a=c$), т.е. $a\neq b\neq c\neq a$.

Пусть $abc=k\neq 0$, тогда $c=\frac{k}{ab}$, подставим в данное.

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7ab}{k}=\frac{k}{ab}+\frac{7}{a} \Rightarrow a+\frac{7}{b}=\frac{k}{ab}+\frac{7}{a} \Rightarrow a^2b+7a=k+7b$

$\Rightarrow (a^2-7)b=\frac{k-7a}{\cancel{a^2-7}}$ (*) и $a^2=\frac{k+7b-7a}{b}=7+\frac{k-7a}{b}$ (☆)

$b+\frac{7ab}{k}=\frac{k}{ab}+\frac{7}{a} \Rightarrow ab^2+\frac{7a^2b^2}{k}=k+7b \Rightarrow b^2\left(a+\frac{7a^2}{k}\right)=k+7b \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~(подставим ☆)~~ $\cancel{b^2\left(a+\frac{49}{k}\right)}$ $\Rightarrow b^2(ak+7a^2)=k^2+7bk \Rightarrow$ (подставим ☆)

$\Rightarrow b^2\left(ak+49+\frac{7k-49a}{b}\right)=k^2+7bk \Rightarrow b^2(ak+49)+b(7k-49a)=k^2+7bk$

$\Rightarrow b^2(ak+49)=k^2+49ab \Rightarrow (a^2-7)^2b^2(ak+49)=k^2(a^2-7)^2+(a^2-7)^2 49ab$

$\Rightarrow$ (подставим *) $(k-7a)^2(ak+49)=k^2(a^2-7)^2+(a^2-7)49a(k-7a)$

$(k^2+49a^2-14ak)(ak+49)=k^2(a^4+49-14a^2)+49a(a^2k-7k-7a^3+49a)$

$ak^3+\cancel{49a^3k}-\cancel{14a^2k^2}+\cancel{49k^2}+\cancel{49^2a^2}-7\cdot2\cdot49ak=a^4k^2+\cancel{49k^2}-\cancel{14a^2k^2}+\cancel{49a^3k}-49\cdot7ak-49\cdot7a^4$
$+\cancel{49^2a^2} \Rightarrow ak^3-\cancel{14a^2k^2}=a^4k^2+49\cdot7ak-49\cdot7a^4 \overset{(a\neq0)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow a^3(k^2-49\cdot7)=k(k^2-49\cdot7)$, т.е. либо $k^2=49\cdot7$, либо $a^3=k$, но если так, то по (*) $(a^2-7)b=k-7a=a(a^2-7)$, т.е. либо $a=b$ (что неверно), либо $a^2=7$, тогда $k^2=a^6=7^3=49\cdot7$.

причем $k=\sqrt{7^3}$ (максимальное) достигается, к примеру, если $a=\sqrt{7}$, $b=-\frac{\sqrt{7}}{2}$, $c=-2\sqrt{7}$: $k=abc=\sqrt{7}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\cdot(-2\sqrt{7})=\sqrt{7^3}$, а исходное равенство имеет вид:

$\sqrt{7}+\frac{7}{-\frac{\sqrt{7}}{2}}=-\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{7}{-2\sqrt{7}}=-2\sqrt{7}+\frac{7}{\sqrt{7}}=-\sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{7^3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

т.к. $XF = XA + AF = FC + CY = FY$, $\angle FXY = \angle XYF$; введём декартовые координаты, $F(0;0)$, $Y(x_2;0)$, $X(x_1;y_1)$, пусть $\frac{CY}{FC} = \lambda$, тогда

$A\left(\frac{x_1}{\lambda+1}, \frac{y_1}{\lambda+1}\right)$, $XY = 36$: $\qquad C\left(\frac{x_2\lambda}{\lambda+1}; 0\right)$

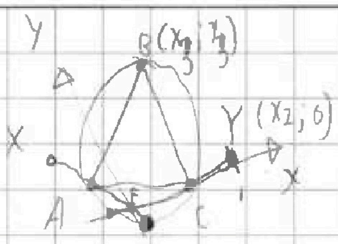
$(x_2 - x_1)^2 + y_1^2 = 36^2$

$FB = 19$; $x_3^2 + y_3^2 = 19^2$, т.к. $\triangle ABC$ - равнобедр.

$$\left(x_3 - \frac{x_1}{\lambda+1}\right)^2 + \left(y_3 - \frac{y_1}{\lambda+1}\right)^2 = \left(x_3 - \frac{x_2\lambda}{\lambda+1}\right)^2 + y_3^2$$

по формуле Гаусса

$$S = \frac{y_3 x_2 + y_1 x_3 - x_1 y_3}{2}$$



B	x_3	y_3
Y	x_2	0
F	0	0
X	x_1	y_1
B	x_3	y_3

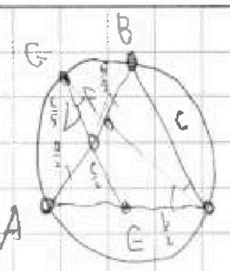
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



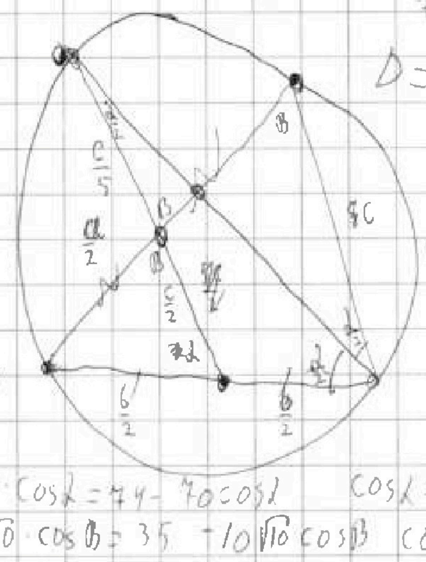
$S_{\triangle BCF} = 25 \quad S_{\triangle DGF}$

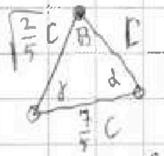
$\angle A \ \angle B \ \angle C$

IV

$7y^2 - 4y + 56 \geq 0$

$D = 16$



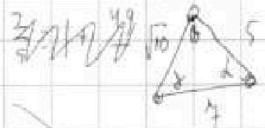


$a = c\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{c}{5} \cdot \frac{c}{2}$

$b = c + \frac{2c}{5} = \frac{7c}{5} \qquad \frac{b}{2} = \frac{c}{5} + \frac{c}{2}$

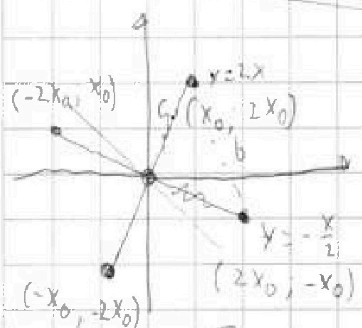
$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{\frac{4}{6}} = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$



$10 = 25 + 49 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos\alpha = 74 - 70\cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{64}{70} = \frac{32}{35}$

$49 = 25 + 10 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\beta = 35 - 10\sqrt{10}\cos\beta \qquad \cos\beta = -\frac{14}{10\sqrt{10}} = -\frac{7}{5\sqrt{10}}$

$25 = 10 + 49 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot 7 \cdot \cos\gamma = 59 - 14\sqrt{10}\cos\gamma \qquad \cos\gamma = \frac{34}{14\sqrt{10}} = \frac{17}{7\sqrt{10}}$



$$\begin{cases} 2x_0 = -x_0^5 + ax_0 \\ -x_0 = -32x_0^5 + 2ax_0 \\ 2x_0 = x_0^5 - ax_0 \\ x_0 = 32x_0^5 - 2ax_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{2x_0^4 = a - 2} \\ \cancel{32x_0^4 = 2a + 1} \\ \cancel{x_0^4 = 2 - a} \\ \cancel{32x_0^4 = 2a + 1} \end{cases}$$

Ответ: $2\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \sqrt{2}$.

V

$$\begin{cases} x_0^4 = a - 2 \\ 32x_0^4 = 2a + 1 \end{cases}$$

$2a + 1 = 32a - 64 \qquad 30a = 65 \qquad a = \frac{65}{30} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$

$x_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}; \quad b = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{6}}\sqrt{2}$

$c = x_0\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{6}}$

$a \neq b$ или $b \neq c$ или $a \neq c$

$a \neq 0 \ b \neq 0 \ c \neq 0$

$\boxed{a \neq b \neq c}$

$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$

$\Delta + \frac{7}{\Delta} = \Delta + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{\Delta}$

$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}; \quad a^2bc + 7ac = ab^2c + 7ab = abc^2 + 7bc$

$a = b + \frac{7}{c} - \frac{7}{b}$

$7 = b^2 + 14\frac{b}{c} + \frac{49}{c^2} - 7 - \frac{49}{bc} + 7\frac{c}{b} - bc - 7 + \frac{7c}{b}$

$abc + 7c = b^2c + 7b = bc^2 + \frac{7bc}{a}$

$a = \frac{7}{b + \frac{7}{c} - c}$

$= b^2 + \frac{49}{c^2} - \frac{49}{bc} - 14 - bc + 14\frac{c}{b} + 14\frac{b}{c}$

$abc + 7a = a^2c + 7c = a^2c + \frac{7ac}{b}$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 1 \qquad b = c + 7 - \frac{7}{c} = \frac{7}{c+b} \\ 1 + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + 7 \end{array}}$$

$abc = k$

$abc + 7b = a^2b + 7a = ab^2 + \frac{7ab}{c}$

$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{7}{a}$

$3abc + 7(a+b+c) = a^2b + ac^2 + b^2c + 7(a+b+c) = ab^2 + a^2c + bc^2 + 7\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)$

$a^2b + ac^2 + b^2c = ab\left(a + \frac{7}{b}\right) + ac\left(c + \frac{7}{a}\right) = ab\left(b + \frac{7}{c}\right) + ac\left(a + \frac{7}{b}\right) + bc\left(c + \frac{7}{a}\right) =$

$abc = \frac{a^2b + ac^2 + b^2c}{3} \qquad + bc\left(b + \frac{7}{c}\right) = (ab + ac + bc)\left(a + \frac{7}{b}\right) = \left(a + \frac{7}{b}\right)(ab + ac + bc)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [x] 5 [x] 6 [x] 7 [x]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$|x^3-9|+|x^2-1| \le |x^3-x^2-8|$

1) $|x| \ge \sqrt[3]{9}$ $x^3-x^2-8 \ge 0$

$x^3-9+x^2-1 \le x^3-x^2-8$

$2x^2 \le 2$ $x \in [-1,1]$ противоречие.

2) $|x| \ge \sqrt[3]{9}$ $x^3-x^2-8 \le 0$

$x^3-9+x^2-1 \le -x^3+x^2+8$

$2x^3 \le 18$ $x \le \sqrt[3]{9}$

$\boxed{x=\sqrt[3]{9}}$ $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{9}]$

$1-\sqrt[3]{81}$ $\vee$ 0

$1 < \sqrt[3]{81}$

3) $|x| < \sqrt[3]{9}$ $|x| \ge 1$ $x^3-x^2-8 \ge 0$

$-x^3+9+x^2-1 \le x^3-x^2-8$

$16+2x^2 \le 2x^3$

$x^3-x^2-8 \ge 0$

4) $|x| < \sqrt[3]{9}$ $|x| \ge 1$ $x^3-x^2-8 \le 0$

$-x^3+9+x^2-1 \le -x^3+x^2+8$

$8 \le 8$

5) $|x| < \sqrt[3]{9}$ $|x| < 1$ $x^3-x^2-8 \ge 0$

$-x^3+9-x^2+1 \le x^3-x^2-8$

$18 \le 2x^3$

$9 \le x^3$ $|x| \ge \sqrt[3]{9}$

6) $|x| < \sqrt[3]{9}$ $|x| < 1$ $x^3-x^2-8 \le 0$

$-x^3+9-x^2+1 \le -x^3+x^2+8$

$2 \le 2x^2$

$|x| \ge 1$ противоречие.

Ответ: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$ (I.)

$x \in (-\sqrt[3]{9}, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$

$34 \cdot 34 = 136 + 102 = 1156$; $34 \cdot 22 = 68 + 68 = 748$; $404 + 384 = 788$; $788 - 784 = 4$; $241 \cdot 61$: $241 + 1446 = 14701$; $1212 - 1156 = 56$; $32 \cdot 12 = 64 + 32 = 384$; $1600 - 1568 = 32$; $56 \cdot 28 = 448 + 112 = 1568$; $96 \cdot 4 = 384$; $1212 - 1156 = 56$

$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$

$a = b + \frac{7}{c} - \frac{7}{b}$

$b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{b + \frac{7}{c} - \frac{7}{b}} = c + \frac{7c}{bc + 7 - \frac{7c}{b}}$

$bc + 7 = c^2 + \frac{c^2}{\frac{bc}{7} + 1 - \frac{c}{b}}$

56

(II.)

$a; b; c$

$abc = 5^{360} \cdot 7^{30}$

$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ $p_i \ne 5$ $p_i \ne 7 \Rightarrow abc$ $p_i \ne 5 \ne 7$

противоречие $\Rightarrow$ $a = 5^\alpha 7^\beta$; $q = 5^\gamma 7^\psi$

$abc = a(aq)(aq^2) = a^3 q^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$

$aq = 5^{120} \cdot 7^{30} = 5^{\alpha+\gamma} 7^{\beta+\psi}$

α, β — натуральные (или 0) ~~натуральные или 0~~ ~~$\alpha, \beta, \gamma, \psi$~~

γ, ψ — целые

$\alpha + 2\gamma \ge 0$

$\beta + 2\psi \ge 0$

$\begin{cases} \alpha + \gamma = 120 \\ \beta + \psi = 30 \end{cases}$

$2\gamma = 240 - 2\alpha$

$2\psi = 60 - 2\beta$

$240 \ge \alpha$

$60 \ge \beta$

$(\alpha; \gamma)$ ровно 241

$(\beta; \psi)$ ровно 61

всего $241 \cdot 61 - 1$ комбинация.

$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$

$D = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) =$

$= 121y^2 - 748y + 1156 - 4(32y^2 - 101y - 96y + 303)$

$= 121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212$

$= -7y^2 + 40y - 56 \ge 0$ $7y^2 - 40y + 56 \le 0$ $D = 1600 - 1568 = 32$

$\frac{11y - 34 \pm \sqrt{-7y^2 + 40y - 56}}{2(y-3)}$

$2 + \frac{6-2\sqrt{2}}{7} = \frac{20-2\sqrt{2}}{7} = \frac{40-4\sqrt{2}}{14} \le y \le \frac{40+4\sqrt{2}}{14} = \frac{20+2\sqrt{2}}{7} = 2 + \frac{6+2\sqrt{2}}{7} = 3 + \frac{2\sqrt{2}-1}{7} < 4$

$y = 3$ — единственное $y \in \mathbb{Z}$.

~~$-7y^2 + 40y - 56 = -7 \cdot 9 + 40 \cdot 3 - 56 = 120 - 56 - 63 = 120 - 119 = 1$~~

Ответ: $(5; 3)$

$x = \frac{32 \cdot 3 - 101}{11 \cdot 3 - 34} = 101 - 32 \cdot 3 = 101 - 96 = 5$ (III.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

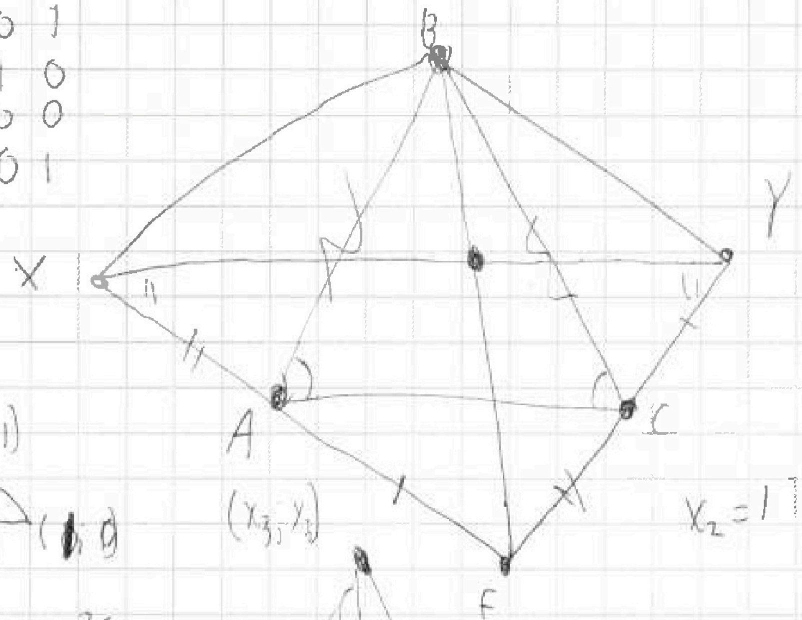
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

0 1
1 0
0 0
0 1

X_3 Y_3
X_2 0
0 0
X_1 Y_1
X_3 Y_3



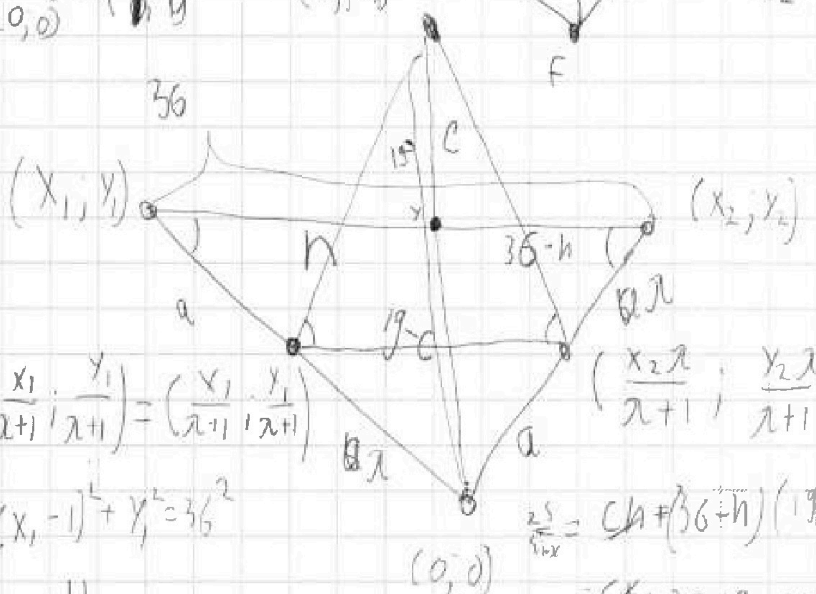
(0;1)
(0,0) (1;0)

$(x_3;y_3)$

$x_2=1$ $y_2=0$

$x_3^2+y_3^2=19^2$

$(x_2-x_1)^2+y_1^2=36^2$



$\left(\frac{x_1}{\lambda+1};\frac{y_1}{\lambda+1}\right)=\left(\frac{x_1}{\lambda+1};\frac{y_1}{\lambda+1}\right)$

$\left(\frac{x_2\lambda}{\lambda+1};\frac{y_2\lambda}{\lambda+1}\right)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+1};0\right)$

$(x_1-1)^2+y_1^2=36^2$

||

$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=36^2$

$x_3^2+y_3^2=19^2$

$2S = ch+(36-h)(19-c)-c(36-h)-h(19-c)=$

$=\cancel{ch+36\cdot19-36c-19h+hc-36c+hc-19h+ch}$

$=4ch$

$\frac{x_1y_3-y_3x_2-y_1x_3}{2}$

~~Xnyt~~

$\left(x_3-\frac{x_1}{\lambda+1}\right)^2+\left(y_3-\frac{y_1}{\lambda+1}\right)^2=\left(x_3-\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2+y_3^2$

$(x_3\lambda+x_3-x_1)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [x] 5 [x] 6 [x] 7 [x]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}$

$abc=k$

$c=\frac{k}{ab}$

1) $\boxed{k^2=7^3}$

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7ab}{k}=\frac{k}{ab}+\frac{7}{a}$

$k(k^2-7\cdot 49)=a^3(k^2-7\cdot 49)$

1) $a+\frac{7}{b}=\frac{k}{ab}+\frac{7}{a}$

$a^3=k$

$a^2b+7a=k+7b$

$b=\frac{k-7a}{a^2-7}$

$a^2=\frac{k+7b-7a}{b}=7+\frac{k-7a}{b}$

$\sqrt{7}+\frac{7}{\frac{\sqrt{7}}{2}}$

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7ab}{a^3}=\frac{a^3}{ab}+\frac{7}{a}$

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7b}{a^2}=\frac{a^2}{b}+\frac{7}{a}$

2) $a^2=7$

$k=(\sqrt{7})^3=\sqrt{7^3}$

$ab+7=b^2+\frac{7b^2}{a^2}=a^2+\frac{7}{a}b$

2) $b+\frac{7ab}{k}=\frac{k}{ab}+\frac{7}{a}$

$(a^2-7)\frac{1}{a}b=b\left(a-\frac{7}{a}\right)=a^2-7$

$a=b$

3) $a=b=c$

$b^2\left(1+\frac{7}{a^2}\right)=7+ab$

$ab^2+\frac{7a^2b^2}{k}=k+7b$

$ab^2k+7a^2b^2=k^2+7bk$

$b^2(ak+7a^2)=k^2+7bk$

Р: $k=\sqrt{7^3}$

$a=\sqrt{7}$

$c=-2\sqrt{7}$

$b^2\left(ak+49+\frac{7k-49a}{b}\right)=k^2+7bk$

$a+\frac{7}{b}=2b=\frac{7}{b}+\frac{7}{a}$

$b^2(ak+49)+7bk=k^2+7bk+49ab$

$2b^2=\sqrt{7}b+7$

$2b^2-\sqrt{7}b-7=0$

$b^2(ak+49)=k^2+49ab$

$2b^2=ab+7$

$2b^2-ab-7=0$

$\Delta=a^2+4\cdot 2\cdot 7$

$b=\frac{\sqrt{7}\pm 3\sqrt{7}}{4}=-\frac{\sqrt{7}}{2}$

$b^2(ak+49)(a^2-7)^2=k^2(a^2-7)^2+49ab(a^2-7)^2$

$(k-7a)^2(ak+49)=k^2(a^4-14a^2+49)+49a(k-7a)(a^2-7)$

$(k^2-14ak+49a^2)(ak+49)=a^4k^2-14a^2k^2+49k^2+49a(a^2k-7k-7a^3+49a)$

$ak^3-14a^2k^2+49a^3k+49k^2-14\cdot 49ak+49a^2=a^4k^2-14a^2k^2+49k^2+49a^3k-49\cdot 7ak-7\cdot 49a^4+49a^2$

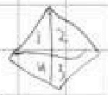
$ak^3=a^4k^2-7\cdot 49a^4+7\cdot 49ak \Rightarrow k^3=a^3k^2-7\cdot 49a^3+7\cdot 49k$

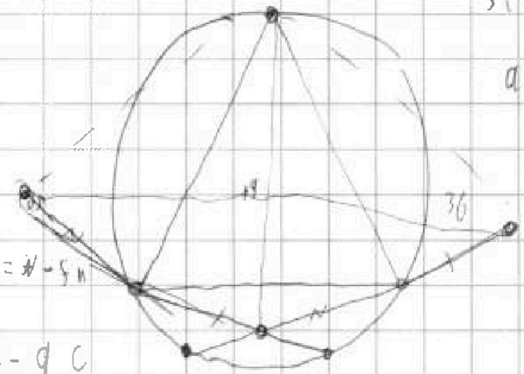
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

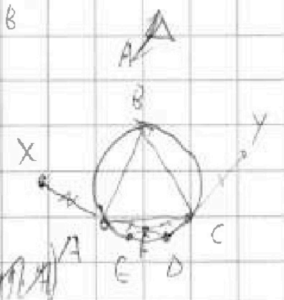




$S(BXFY) = 8$

$a^3(k^2-49\cdot 7) = k^3 - 7\cdot 49k$

$a^3 = k$



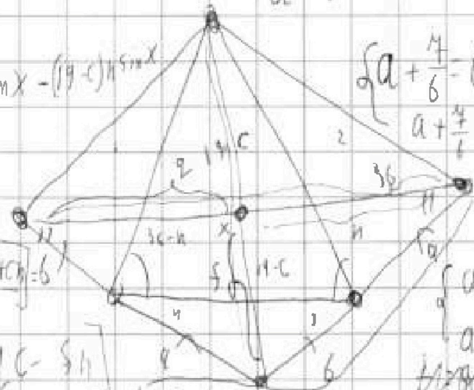
$19 - c$

$-19h + ch = \ldots - 5h$

$36 - n$

$-36c + 6h = -9c$

$k^3 = a^3k^2 - 49\cdot 7a^3 + 7\cdot 49k$



$2S = \sin(x)\,ch + \sin(x)(19-c)(36-h) - 19(36-h)\sin x - (19-c)h\sin x$

$= \sin(x)\left[ch + (19-c)(36-h) - 19(36-h) - (19-c)h\right] =$

$= \sin(x)\left[ch + 19\cdot 36 - 19h + ch - 36c - 19\cdot 36 + 19h - 19h + ch\right]$

$= \sin(x)\left[3ch - 19h - 36c\right] = \sin(x)\left[ch - 9c - 5h\right]$

$\Rightarrow S = \boxed{2} + \boxed{1} + \boxed{3}$

$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{b}$

$a + \frac{7}{b} = \frac{1}{b} + \frac{7}{a}$

$a + \frac{7}{b} = 8b$

$b + \frac{7ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{7}{a}$

$a\cdot k + \frac{7}{b}k = bk + 7ab$

$a^3b + 7a^2 = ka + 7ab$

$ab^2k + 7a^2b^2 = k^2 + 7bk$

$b^2(ka + 7a^2) = k^2 + 7bk$

$b = \frac{ka - 7a^2}{a^3 - 7a} = \frac{k - 7a}{a^2 - 7}$

$\begin{cases} a + \frac{7}{b} = b + \frac{7ab}{k} \\ a + \frac{7}{b} = \frac{k}{ab} + \frac{7}{a} \end{cases}$

$b^2\left(ka + \frac{7k - 49a}{b} + 49\right) = k^2 + 7bk$

$a^2 = \frac{k - 7a}{b} + 7$

$ak + \frac{7}{b}k = b + 7ab$

$a^3b + 7a^2 = ka + 7ab$

$b^2(ka + 49) = k^2 + \ldots 7k + 7ab$

$b^2(k+7) - 7kb - k^2 = 0$

$\frac{7}{b}k = b + 14ab - a^3b - 7a^2$

$(k - 7a^2)^2(ka + 49) = k^2(a^2 - 7)^2 + 49a(\ldots)(k - 7a)$

$k = \frac{b^2 + 14ab^2 - a^3b^2 - 7a^2b}{7}$

$(k^2 + 49a^2 - 14ak)(ka + 49) = k^2(a^4 + 49 - 14a^2) + 49a(\ldots)$

$a = 1$

$k^3a + \ldots - 14\cdot 49ak = a^4k^2 + \ldots$

$k^3a - 14\cdot 49ak = a^4k^2 - 49\cdot 7a^4 - 49\cdot 7ak$

$k = \frac{b^2 + 14b^2 - b^2 - 7b}{7}$

$k^3a = a^4k^2 - 49\cdot 7a^4 + 7\cdot 49ak$

$= \frac{14b^2 - 7b}{7} = 2b^2 - b$