



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Решите уравнение

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $3^{240} \cdot 7^{240}$ ?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = -2x^3 - ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = 5x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно,  $CF$  – биссектриса треугольника  $ABC$ . Лучи  $DE$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что  $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$ .

6. [5 баллов] Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения  $xyz$ .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит четырёхугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = BC = \sqrt{10}$ ,  $AD = DC = 2$ ,  $AC = 2\sqrt{2}$ . Ребро  $SD$  – высота пирамиды. Известно, что  $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$ . Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней  $ABCD$ ,  $SAB$ ,  $SBC$  и ребра  $SD$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$\sim 1) \quad 4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$\frac{4 \cdot 2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{\operatorname{ctg} x \cdot 1 - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = 0;$$

$$\frac{8 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = 0;$$

Пусть  $\operatorname{tg} x = t$ . Тогда  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{t}$ .  
(лучше рассмотреть случай  $\operatorname{tg} x = 0$ )

$$\frac{8t}{1-t^2} + 1 + \frac{\frac{1}{t} - 1}{\frac{1}{t} + 1} = 0;$$

$$\frac{8t + 1 - t^2}{1 - t^2} = \frac{1 - \frac{1}{t}}{\frac{1}{t} + 1};$$

$$8 + \frac{1}{t} - t + 8t + 1 - t^2 = 1 - \frac{1}{t} - t^2 + t;$$

$$8t + 8 + \frac{2}{t} = 0; \quad (*t, \text{ т.к. } t \neq 0).$$

$$8t^2 + 8t + 2 = 0;$$

$$3t^2 + 4t + 1 = 0;$$

$$\frac{D}{4} = 4 - 3 = 1 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$t_1 = \frac{-2-1}{3} = -1 \text{ — не подходит по О.О.З.}$$

$$t_2 = \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Сделаем проверку.  $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{ctg} x = -3$

$$4 \operatorname{tg}^2 x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4 \cdot 2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = \frac{8 \cdot 9}{3 \cdot 8} + 1 + \frac{(-4)}{(-2)} = -3 + 1 + 2 = 0. \quad \textcircled{V}$$

Ответ:  $x = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\text{О.О.З: } \cos 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{4} \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Из этого } \Rightarrow \operatorname{tg} x \neq \pm 1 \\ \operatorname{ctg} x \neq \pm 1$$

Если  $\operatorname{tg} x = 0$ , то

$$x = \pi k, \quad \text{тогда:}$$

$$4 \cdot \operatorname{tg} 2\pi k + 1 + \operatorname{ctg} \left(\pi k + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0;$$

$$4 \cdot 0 + 1 + 1 \neq 0$$

$$\Downarrow \\ \operatorname{tg} x \neq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2) Пусть  $q$  - знаменатель прогрессии  $\Rightarrow q \neq 1$ .

$$\text{Тогда } b = aq, c = bq = aq^2 \Rightarrow abc = a^3 \cdot q^3.$$

$$\text{По условию } abc = 3^{240} \cdot 7^{240} \Rightarrow a^3 \cdot q^3 = 3^{240} \cdot 7^{240} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow aq = 3^{80} \cdot 7^{80}, aq = b \Rightarrow b = 3^{80} \cdot 7^{80}.$$

Заметим, что  $q \in \mathbb{Q}$ , т.к.  $c \in \mathbb{Z}$  по условию и

$$c = 3^{80} \cdot 7^{80} \cdot q. \text{ Тогда } q = \frac{m}{n}, \text{ где } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N},$$

$|m|$  и  $n$  взаимно просты.

$$\text{Тогда } a = \frac{b}{q} = \frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot n}{m}, c = bq = \frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot m}{n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3^{80} \cdot 7^{80} : |m| \text{ и } 3^{80} \cdot 7^{80} : n \Rightarrow \text{есть несколько вариантов}$$

для  $\frac{m}{n}$ :

- 1)  $\frac{m}{n} = \pm 3^\alpha \cdot 7^\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq \alpha, \beta \leq 81$ , но ~~кроме~~  $\alpha = \beta = 0$

- 2)  $\frac{m}{n} = \pm \frac{1}{3^\alpha \cdot 7^\beta}$

- 3)  $\frac{m}{n} = \pm \frac{3^{\alpha\delta}}{7^{\alpha\delta}}$ ;  $\alpha, \delta \in \mathbb{Z}$ ;  $0 < \alpha, \delta \leq 81$

- 4)  $\frac{m}{n} = \pm \frac{7^\delta}{3^\alpha}$

Для 1) кол-во способов выбрать  $\alpha$  и  $\beta = 82 \cdot 82 - 1$  (исключаем  $\alpha = \beta = 1$ ).

т.к.  $m$  может быть  $< 0$ , получаем кол-во различных

$$\frac{m}{n} = 2(82 \cdot 82 - 1) \text{ (для каждого из них } b = 3^{80} \cdot 7^{80} \Rightarrow$$

$a$  и  $c = \frac{b}{q}$  различны  $\Rightarrow$  различны  $a$  и  $c \Rightarrow$  различны  
значения чисел)

Для 2), очевидно, столько же вариантов, т.к.

во 2)-м случае мы берем обратные  $q$  из 1)-го  
случая. (По сути, в 1) возрастающая прогрессия,  
здесь - убывающая)

Для 3) вариантов  $(81 \cdot 81) \cdot 2$ , для 4) по аналогии  
только те. Тогда суммарно  $4(82 \cdot 82 - 1) + 4 \cdot 81 \cdot 81 =$   
 $= 4 \cdot (82^2 + 81^2 - 1) = 4 \cdot (6724 + 6560) = 4 \cdot 13284 = 53136$

Ответ 53136.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печка QR-кода непустима!



23)  $\ln^2(x+2) - (x+1) \cdot \ln(4x+8) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$ ; О.О.З.:  $x > -2$

$\ln^2(x+2) - (x+1) \cdot \ln 4 - (x+1) \cdot \ln(x+2) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$ ;

$(\ln(x+2) - (x+1)) (\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0$ ;

$\ln(4x+8) \cdot (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$ ;

$$\begin{cases} \ln(4x+8) = 0 \\ \ln(x+2) - (x+1) = 0 \\ \ln(4x+8) > 0 \\ \ln(x+2) - (x+1) > 0 \\ \ln(4x+8) < 0 \\ \ln(x+2) - (x+1) < 0 \end{cases}$$

$\downarrow \ln(4x+8) = 0 \Rightarrow 4x+8=1 \Rightarrow 4x=-7 \Rightarrow x=-1,75$   
 $\uparrow \ln(x+2) - (x+1) = 0$   
 при  $x \in (-2; -1,75)$   $\ln(4x+8) < 0$ ,  
 при  $x = -1,75$   $\ln(4x+8) = 0$ ,  
 при  $x \in (-1,75; +\infty)$   $\ln(4x+8) > 0$

1.  $\ln(x+2) - (x+1) = 0$ ;

$\ln(x+2) = (x+1)$ . Рассмотрим

кр-ки двух ф-ий

$y_1 = (x+1)$

$y_2 = \ln(x+2)$

Иная точка  $(-1; 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$  есть решение  $x = -1$

~~$y_2(0) < y_1(0) \Rightarrow$  если есть другие пересечения, т.е.  $x_1 \neq -1$  и  $x_2$  корень, то  $x_1 \in (-2; 0)$ .~~

~~Тогда возьмем  $x_1, x_2$  или~~

~~$y_2 > y_1$ , т.е.  $\ln(x_1+2) > (x_1+1)$~~

~~при  $x_1 \in (-2; -1)$~~

~~при  $x_2 \in (-1; 0)$ ,  $\ln(x_2+2) < (x_2+1)$~~

$y_1' = \frac{1}{x+2}$

Тогда получим ур-е касательной

в той же точке с коорд  $x = -1$  ур-е кас-й  $y = x+1 \Rightarrow$

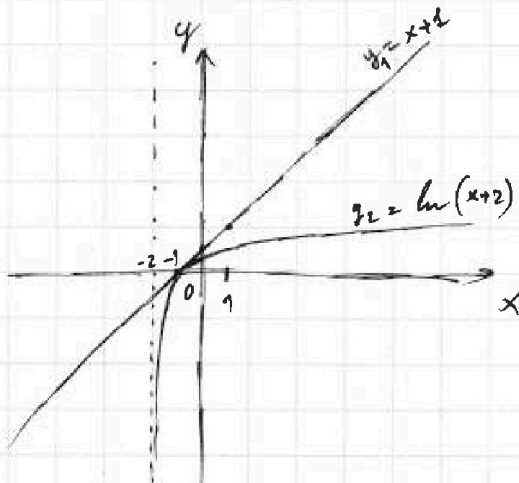
$\Rightarrow$  ур-е явл-е касательной для  $y_2 \Rightarrow$  только один

корень  $x = -1$

$\ln(4x+8)$	-	+	+
$\ln(x+2) - (x+1)$	-	-	-



Ответ:  $x \in (-2; -1,75] \cup (-1; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

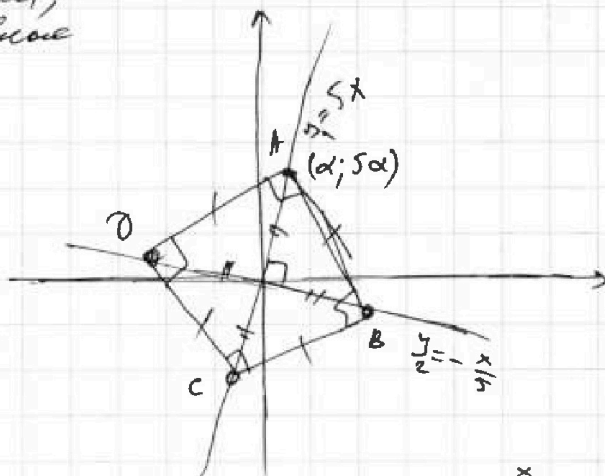
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

24) Диагонали кв-га  $t$ -ки, равной, делятся точкой  $O$  на равные отрезки.

Из перпендикулярности второй диагонали линии на  $y = -\frac{x}{5}$

Пусть вершина квадрата в I коорд. четверти имеет коорд-ты  $(d; 5d)$ , (т.к.  $\in y = 5x$ )



$C(-d; -5d)$  из симметрии  $q$ -б  $y = 5x$  и  $y = -\frac{x}{5}$  относительно начала координат. (четет.  $q$ -ли);  $B(5d; -d)$ ,  $D(-5d; d)$ .

Тогда для  $y_1$ :  $-2d^3 - ad = 5d$   
 для  $y_2$ :  $-2(5d)^3 - a \cdot 5d = -d$

$$\begin{cases} -2d^3 - ad = 5d \quad (-5) \\ -250d^3 - 5ad = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10d^3 + 5ad = -25d \\ -250d^3 - 5ad = -d \end{cases} +$$

Представим  $d = \sqrt{\frac{13}{120}}$  в I ур-е

$$-2\left(\sqrt{\frac{13}{120}}\right)^3 - a\sqrt{\frac{13}{60}} = 5\sqrt{\frac{13}{120}}$$

$$-\frac{2 \cdot 26^{13}}{120 \cdot 60} - a = 5 \Rightarrow a = -\frac{313}{60}$$

$$-240d^3 = -26d; \quad d \neq 0, \text{ иная}$$

$$-240d^2 = -26 \quad \text{квартат верока}$$

$$d = \sqrt{\frac{26}{240}} = \sqrt{\frac{13}{120}} \quad \text{раствор } (0; 0)$$

( $\cdot \alpha$ )

Проверим, представив до II ур-е:

$$-250 \cdot \left(\sqrt{\frac{13}{120}}\right)^3 + \frac{5 \cdot 313}{60} \cdot \sqrt{\frac{13}{120}} = -\sqrt{\frac{13}{120}}$$

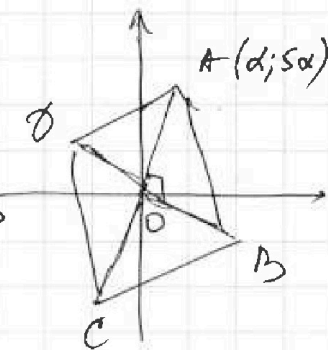
$$-\frac{250 \cdot 13}{120 \cdot 60} + \frac{5 \cdot 313}{60} = -1$$

$-1 = -1$  - Верно

$S_{Kv} = \frac{d^2}{2}$ ;  $OA = \sqrt{d^2 + 25d^2} = d\sqrt{26} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{Kv} = 52d^2 = \frac{52 \cdot 13}{120} = \frac{169}{30}$

Ответ:  $a = -\frac{313}{60}$ ,  $S_{Kv} = \frac{169}{30}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\underline{6)} \quad x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}$$

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = z^3 + \frac{10}{x^3} \Rightarrow \text{I. } x^3 - z^3 = \frac{10(y^3 - x^3)}{x^3 y^3}$$

$$y^3 + \frac{10}{z^3} = x^3 + \frac{10}{y^3} \Rightarrow \text{II. } y^3 - x^3 = \frac{10(z^3 - y^3)}{z^3 y^3}$$

$$z^3 + \frac{10}{x^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} \Rightarrow \text{III. } z^3 - y^3 = \frac{10(x^3 - z^3)}{x^3 z^3}$$

то числ. и все  
знаки равны  
и идут с собой  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  когда бы одно  
из них было  
вып-н  $\neq 0$

Пусть  $x \neq z$ :

$$x^3 - z^3 = \frac{10 \cdot 10 (z^3 - y^3)}{x^3 y^3 z^3 y^3} = \frac{1000 (x^3 - z^3)}{x^6 y^6 z^6}$$

Тогда  $x^3 - z^3 \neq 0 \Rightarrow (:(x^3 - z^3)) \Rightarrow 1 = \frac{1000}{x^6 y^6 z^6} \Rightarrow x^2 y^2 z^2 = 10$

тогда  
 $xyz = \pm \sqrt{10} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \max \text{ знат. } xyz = \sqrt{10}$

(Если  $x = z$ , тогда по усл.  $y \neq x, y \neq z \Rightarrow$   
 $\Rightarrow z^3 - y^3 \neq 0$ .

$$z^3 - y^3 = \frac{10(x^3 - z^3)}{x^3 z^3} = \frac{1000(y^3 - x^3)}{x^6 z^3 y^3} = \frac{1000(z^3 - y^3)}{(x^6 y^6 z^6)}$$

$1000 = x^6 y^6 z^6$ . Числа получили  $xyz = \pm \sqrt{10}$

Order:  $\sqrt{10}$ .



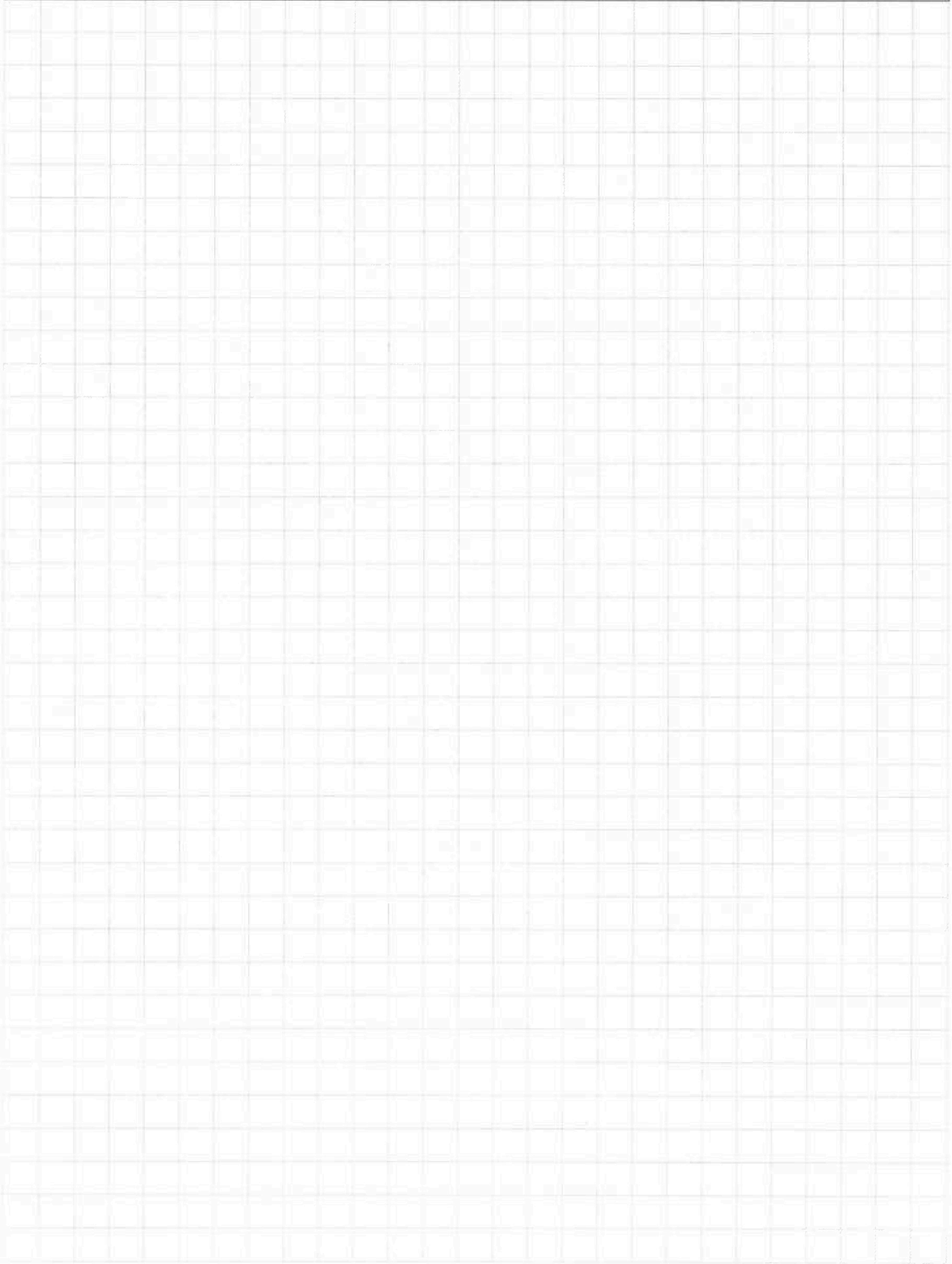
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

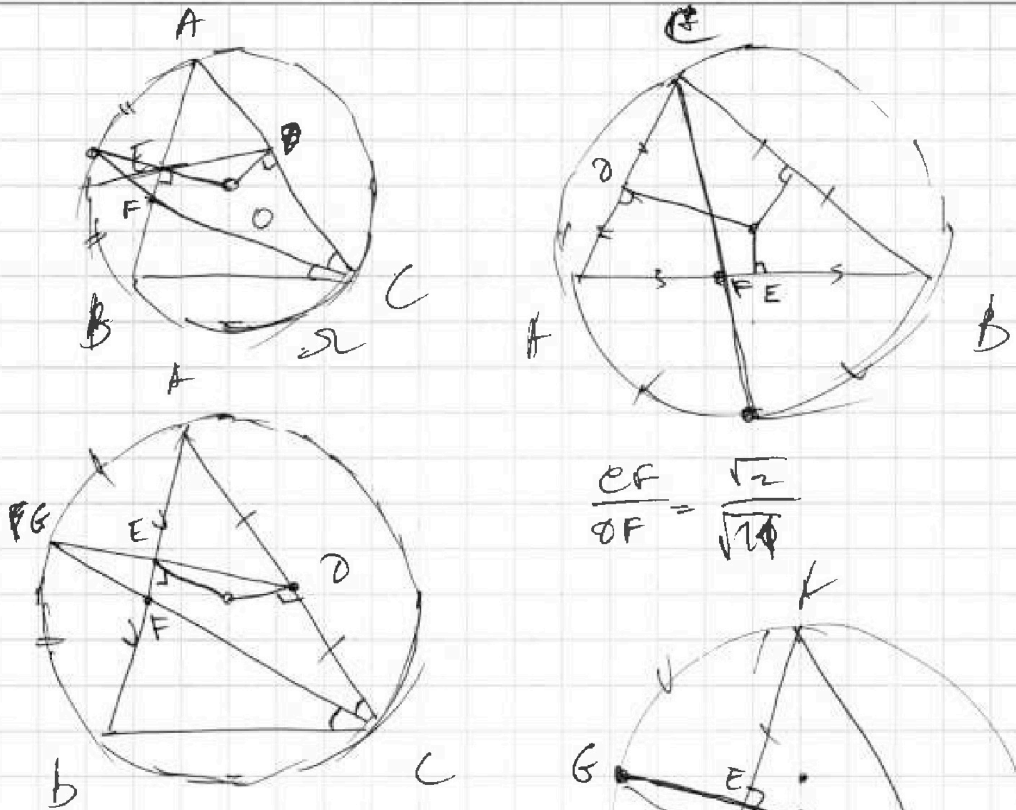
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

с.)



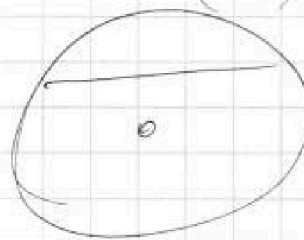
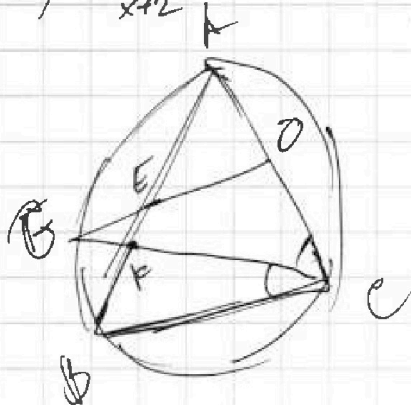
$$\frac{EF}{OF} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\phi}}$$

$G, E, D \in$  одной площ.  
 $G, E, O \in$  одной площ.  
 $D, E, G$  - однак площ.  
 $G, E, O$  - однак площ.

$$f(x) = \ln(x+2) \quad (-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+2}$$

~~$y = \ln(x+2) - (x-x) + f'(x)$~~   
 ~~$(x+2)$~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Итого  $4 \cdot 3 + 10 + 12 = 84$

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}$$

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}$$

$$z^3 - x^3 = \frac{10}{y^3} - \frac{10}{x^3}$$

$$x^3 - z^3 = \frac{10}{x^3} - \frac{10}{y^3}$$

$$x^3 - z^3 = \frac{10(y^3 - x^3)}{x^3 y^3}$$

$$y^3 - x^3 = \frac{10(z^3 - y^3)}{y^3 z^3}$$

$$x^3 - z^3 = \frac{10 \cdot 10 (z^3 - y^3)}{y^3 \cdot z^3 \cdot x^3 \cdot y^3}$$

$$z^3 - y^3 = \frac{10(x^3 - z^3)}{x^3 \cdot z^3}$$

$$\frac{x^3 - z^3}{z^3} = \frac{1000(x^3 - z^3)}{x^3 \cdot y^3 \cdot z^3}$$

$$1 = \frac{1000}{x^3 \cdot y^3 \cdot z^3}$$

$$x^3 \cdot y^3 \cdot z^3 = 1000$$

$$x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 10$$

$$xyz = \pm \sqrt{10} \Rightarrow xyz_{\max} = \sqrt{10}$$

$$x=1, z=1, y=\sqrt{10}$$

$$1 + \frac{10}{10\sqrt{10}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{10 + \sqrt{10}}{10}$$

$$xyz = \sqrt{10}$$

$$x=z = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$y = \sqrt{10}$$

$$10\sqrt{10} + 10$$

$$\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^3 + \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \mp \sqrt{10} = 0$$

$$\sqrt{10} - \frac{10}{\sqrt{10}} = 0$$

$$-\sqrt{10} \mp -\sqrt{10} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

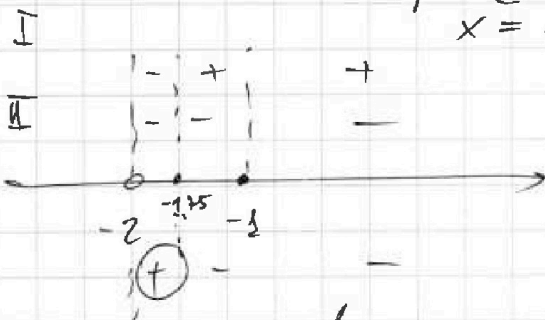


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



будем считать, что корни  $y$   $\ln(x+2) - (x+1)$

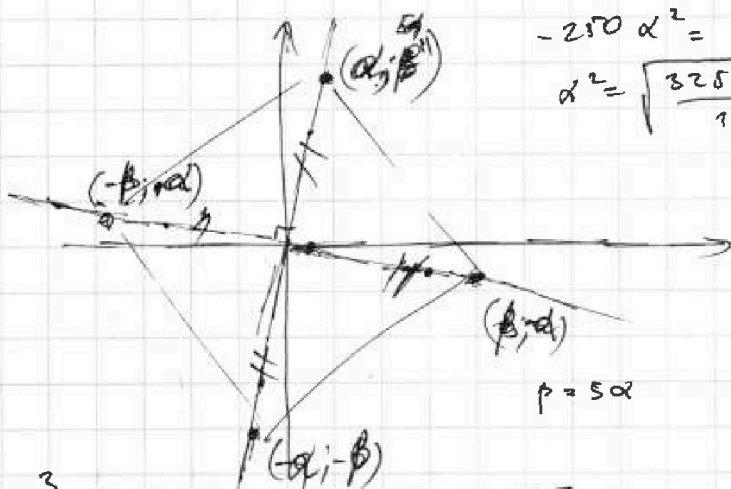
$\ln(x+2) - (x+1) < 0$  всегда,  $x = -1$   
 или  $-2x < -1$   
 кроме  $x < -2$  (ошибка)  $\ln(0,5) - 0,5 < 0$   
 $x = -1 (=)$



$x \in (-2; -1,75] \cup (-1; -1)$

или  $x > -1$   
 $\ln(2) -$   
 $\ln(x+2) - (x+1) > 0$   
 или

4)



$$-250\alpha^2 = \frac{-325}{12}$$

$$\alpha^2 = \sqrt{\frac{325 \cdot 250}{12}}$$

$$y_1 = 5x$$

$$\text{или } y_2 = -\frac{x}{5}$$

$$y_{\text{кр}} = -2x^3 - ax$$

$$b = 5a$$

$$-2x^3 - ax = 5x$$

или ось координат

$$a = -a$$

$$-2\alpha^3 - a\alpha = 5\alpha$$

$$+2\alpha^3 + a\alpha = -5\alpha$$

$$-2x^3 - ax = -\frac{x}{5}$$

или ось

$$-2x^3 - ax = -\frac{x}{5}$$

$$-2x^3 - ax = y(x)$$

$$+2x^3 + ax = y(-x) = -y(x)$$

или ось

$$-2 \cdot 125\alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha$$

$$y(x) = y$$

$$a = 250\alpha^3 + 5a\alpha$$

$$\begin{cases} -2\alpha^3 - a\alpha = 5\alpha \\ -2 \cdot 125 \cdot \alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\alpha^3 - a\alpha = 5\alpha \cdot (-5) \\ -250\alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha \end{cases}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{13}{120}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13}{30}}$$

$$\begin{cases} 10\alpha^3 + 5a\alpha = -25\alpha \\ -250\alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha \end{cases}$$

$$-240\alpha^3 = -26\alpha$$

$$\alpha^2 = \frac{26}{240} = \frac{13}{120}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$d = \sqrt{\frac{13}{120}}$  прообраз и найдем  $a$

$$-2 \left( \sqrt{\frac{13}{120}} \right)^2 - a \sqrt{\frac{13}{120}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{13}{120}}$$

$$-\frac{2 \cdot 13}{120 \cdot 60} - a = 5 \quad a = -\frac{13}{60} - 5 = \frac{-15 - 200}{60} = \frac{-313}{60}$$

$$-2 \left( \sqrt{\frac{13}{120}} \right)^2 + \frac{313}{60} \cdot \sqrt{\frac{13}{120}} = -\frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{13}{120}}$$

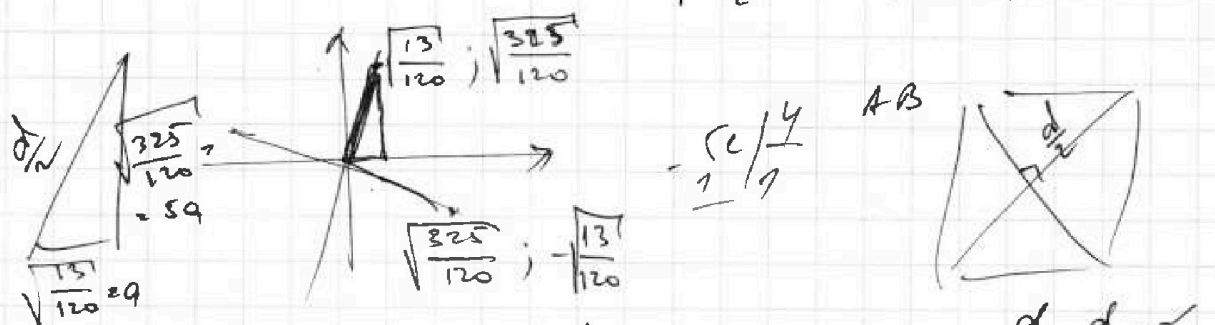
$$-\frac{2 \cdot 13}{220 \cdot 60} + \frac{313}{60} = \frac{313 - 13}{60} = 5 \quad (h(x+2))' = \frac{1}{x+2} \quad (-1) \cdot 1$$

$$-2x^2 + \frac{313}{60} x = -\frac{x}{5} \quad \& \quad h(x-x_0) + y_0 = 260 + 50$$

$$-2x^2 + \frac{313}{60} = -\frac{1}{5}$$

$$2x^2 = \frac{313}{60} + \frac{1}{5} = \frac{313 + 12}{60} = \frac{325}{60} = \frac{625}{120}$$

$$x = \sqrt{\frac{625}{120}} \quad ? \quad \sqrt{\frac{13}{120} \cdot 5} = \sqrt{\frac{13 \cdot 25}{120}} = \sqrt{\frac{260 + 50 + 15}{120}} \quad \textcircled{1}$$



$$\sqrt{a^2 + 259^2} = a \sqrt{26}$$

$$\frac{d}{2} = a \sqrt{26}$$

$$d = a \sqrt{26} \Rightarrow \frac{d^2}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{4a^2 \cdot 26}{2} = 2a^2 \cdot 26$$

$$125 \cdot 13 = 1250 + 300 + 75 = -1625 + 1565 =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(\ln(x+2) + \ln 4) (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$$

~~$$\ln(x+2) + \ln 4 = 0$$~~

$$\ln(4x+8) \cdot (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$$

$$a = \ln \frac{1}{b} \quad b = \ln a$$

$$a = b e^b$$

$$-a = \ln b$$

$$e^{-a} = b \Rightarrow b = \frac{1}{e^a}$$

- $\ln(4x+8) = 0$  (1)
- $\ln(x+2) - (x+1) = 0$  (2)
- $\ln(4x+8) > 0$  (3)
- $\ln(x+2) - (x+1) > 0$  (4)
- $\ln(4x+8) < 0$  (5)
- $\ln(x+2) - (x+1) < 0$  (6)

1)  $\ln(4x+8) = 0$

$$4x+8=1$$

$$4x = -7$$

~~$$e^b = \ln \left( \frac{1}{b} \right) \left( \frac{1}{b} \right)^{e^b}$$~~

$$x = -\frac{7}{4} = -1,75 \quad \checkmark$$

при  $x \in (-2; -1,75)$   $\ln(4x+8) < 0$

при  $x \in (-1,75; +\infty)$   $\leftarrow > 0$

2)  $\ln(x+2) - (x+1) = 0$

$$\ln(x+2) = (x+1) \quad (\ln(x+2) - (x+1))' =$$

$$= \frac{1}{x+2} - 1$$

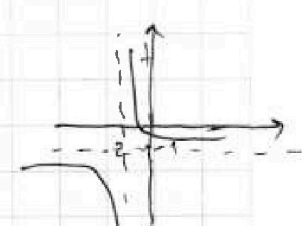
для  $y = \ln x$   
 $y' = \frac{1}{x}$

$$e^{x+1} = x+2$$

$$g'' = \frac{-1}{x^2}$$

0 только

$$x = -1 \quad \checkmark \quad e^0 = 1 \quad \checkmark$$



для  $y = \log_2 x$

$$1 = \log_2 2$$

$$2 = \log_2 4$$

$$3 = \log_2 8$$

$$\frac{1}{2} - 1 = \log_2 \frac{1}{2}$$

$$-2 = \log_2 \frac{1}{4}$$

0

$$\ln(x+2) = (x+1) \quad f'(x)$$

$$\ln(1) = 0 \quad (-1; 0)$$

$$\ln(e) = 1$$

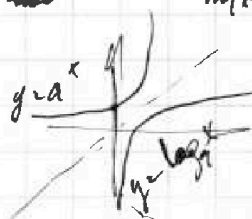
$$c = 2,7$$

$$= 0,7$$

$$3,2 \Rightarrow (1,1; 1)$$

ln если  $x+1$  нас

после  $x+1 > 0$  при  $x > -1$   
 $\ln(x+2) > 0$  при  $x > -2$   
при  $x > 0$



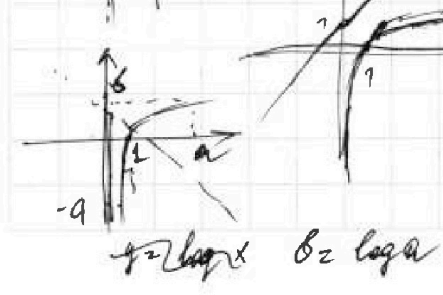
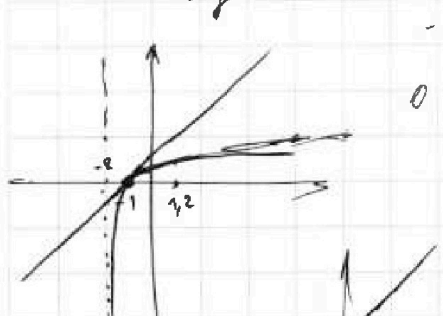
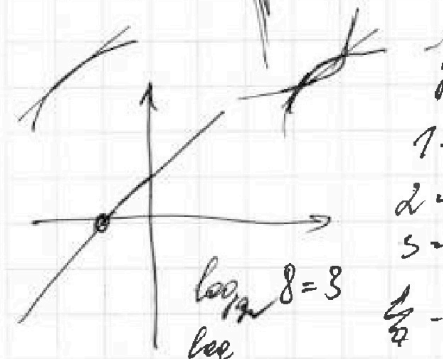
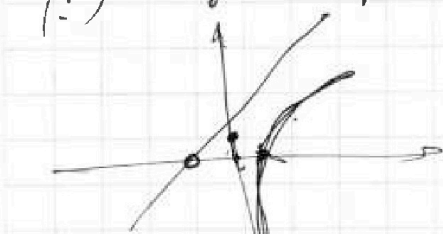
$$y = a^x$$

$$a^x = \log_a x$$

$$a^{a^x} = x$$

$$a = -\log_a b = -\frac{1}{\log_a e}$$

(1) - это график корення



$$\frac{1}{x+2}$$

$$y = \log_a x$$

$$e = 2,7$$

$$y = 1 \text{ при } x = 1,27$$

$$y = 2 \text{ при } x = 2,7 = e$$

$$-a = \log_a b$$

$$b = \ln a$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{m}{n} = \frac{3^x}{7^y}$$

$0 < \alpha \leq 80$  80 бар  
 $0 < \beta \leq 80$  80 бар.

$$\frac{5^x}{7^y} \quad \text{где } \alpha \text{ 81 бар}$$

где  $\beta$  81 бар

$$(81 \cdot 81 - 1) - \text{где } +$$

$$2(81 \cdot 81 - 1) - \text{где } +$$

$$4(81 \cdot 81 - 1) - \text{где } +$$

еще есть  $q_3 = \pm 3^{8 \cdot 5}$

$$\frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot 3^x}{7^y}, \quad \frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot 7^x}{3^x}$$

короче

$$q \in \mathbb{Q}$$

$$q_1 = \pm \frac{3^x}{7^y}$$

или  $q_1 = \pm \frac{7^x}{3^y}$

$$\begin{array}{r} 13 \ 284 \\ 4 \\ \hline 53 \ 136 \end{array}$$

$$y_1(0) = 1$$

$$y_2(0) = \ln 2 < 1$$

т.е.  $\omega_1 = 80$

$$q_1 = 2q_2 = 2q_3$$

второй корень заменим  $z = x + 2 \in (-2; 0)$

$$\ln(x+2) \rightarrow -\infty; 21$$

$x \neq 0, \delta \neq 0$ , т.к. у нас несутано

тогда по 80 бар.

$$80 \cdot 80 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\ln(x+2) > (x+1)$$

$$e^{x+1} < x+2$$

$$4(81 \cdot 81 - 1) + 4 \cdot 80 \cdot 80 = 4(81^2 - 1 + 80^2) =$$

$$81^2 = (80+1)^2 = 6400 + 160 + 1 = 6561$$

$$= 6400 + 320 + 4 = 6724$$

$$81^2 = (80+1)^2 = 6400 + 160 + 1 = 6561$$

$$\begin{array}{r} 12 \ 960 \\ 7 \\ \hline 51 \ 840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \ 1 \\ 8 \ 1 \\ \hline 6 \ 4 \ 8 \\ 6 \ 5 \ 6 \ 1 \end{array}$$

$$80 \cdot 80 = 6400$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) - \ln 2 \ln(x+2) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) = t^2$$

$$t^2 - (x+1) \cdot (\ln 2 + t) + \ln 4 \cdot t \geq 0;$$

$$t^2 - (x+1) \cdot \ln 2 - t(x+1) + 2 \ln 2 \cdot t \geq 0;$$

$$\ln(x+2) \cdot \ln(x+2) - (x+1) \cdot (\ln 2 + \ln(x+2)) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln(x+2) (\ln(x+2) - (x+1)) + \ln 4 (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0;$$

$$(\ln(x+2) + \ln 4) (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0;$$

$x > -2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице.

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta} \\ \text{tg} 2\alpha &= \frac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} \end{aligned}$$

$$\text{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{ctg}\alpha \cdot \text{ctg}\beta - 1}{\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\beta}$$

$$\frac{8\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} + 1 + \frac{\text{ctg}\alpha \cdot 1 - 1}{\text{ctg}\alpha + 1} = 0;$$

поскольку  $\text{tg} x = t$

$$\frac{8t}{1 - t^2} + 1 + \frac{\frac{1}{t} - 1}{\frac{1}{t} + 1} = 0;$$

$$\frac{8t + 1 - t^2}{1 - t^2} = \frac{1 - \frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t}}$$

$$\frac{t^2 + 8t - 1}{t^2 - 1} = \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}}$$

$$\cancel{t^2} + 8t - 1 + t - \frac{1}{t} = \cancel{t^2} - 1 - t + \frac{1}{t}$$

$$-7t - 9 - \frac{1}{t} = -1 - t + \frac{1}{t}; \quad (\cdot t)$$

$$-7t^2 - 9t - 1 = -t - t^2 + 1;$$

$$6t^2 + 8t + 2 = 0;$$

$$3t^2 + 4t + 1 = 0;$$

$$D = 4 - 3 = 1$$

$$t_1 = \frac{-2 - 1}{3} = -1 \quad \text{— не подходит}$$

$$t_2 = \frac{-2 + 1}{3} = -\frac{1}{3} \quad \text{— проверим}$$

0, 2, 3:  $\text{tg} = \frac{\sin}{\cos} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos 2x \neq 0$$

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$$

$$x + \frac{\pi}{4} \neq \pi k$$

$$x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{tg} x \neq \pm 1$$

$$\text{ctg} x \neq -1$$

Обязательно проверить

$$\text{tg} x = 0$$

если  $\text{tg} x = 0 \Rightarrow$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k$$

$$4 \text{tg}(2\pi k) + 1 + \text{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) =$$

$$= 0 + 1 + 1 = 2 \Rightarrow t \neq 0$$

$$\text{tg} x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \text{ctg} x = -3$$

$$\text{tg} 2x = \frac{-\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2}{3} : \frac{8}{9} = -\frac{2 \cdot 9^3}{3 \cdot 8^3} = -\frac{3}{4}$$

$$-\frac{3 \cdot 4}{4} + 1 + \left(\frac{-3 \cdot 1 - 1}{-3 + 1}\right) =$$

$$= -3 + 1 + \frac{-4}{-2} = -3 + 1 + 2 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ



aza

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b = aq, c = bq = aq^2 \Rightarrow abc = a^3 \cdot q^3 = (aq)^3$$

$$(aq)^3 = 3^{240} \cdot 7^{240} \Rightarrow aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$$

Сначала разберемся с  $q > 1$

Все  $q$  выписыв  ~~$(81-81-1)$~~   $= (q^4-1) \cdot 2$

Кажется 9.20  
+  
+  
+  
-

~~если  $q < 1$  однозначна  $q$  как  $\frac{1}{q}$ , где  $q' > 1$~~

$$\frac{a}{q'} = \frac{3^{80} \cdot 7^{80}}{\dots} \quad a = 3^{80} \cdot 7^{80} \cdot q \quad \text{мы не опуск}$$

$q = \frac{1}{2}$   ~~$q = 2$~~   ~~$q = 2$~~

$b^2 = ac$  если  $q < 0$ , то  $b_+, c_-, a_- \Rightarrow b = \sqrt{ac}$

$$\sqrt{ac} \cdot ac = (ac)^{3/2} = (aq)^3 \quad \text{если } q = \frac{1}{3}$$

$ac = dq^2 \cdot a$

$$a = 3^{81} \cdot 7^{80} \quad b = 3^{80} \cdot 7^{80} \quad c = 3^{82} \cdot 7^{80}$$

$b = aq = 3^{80} \cdot 7^{80} \quad c = aq^2$

$$a = \frac{3^{80} \cdot 7^{80}}{q}$$

$c = \frac{3^{80} \cdot 7^{80}}{q^2}$

если  $q \in \mathbb{Z}$   
то разобран  
если  $q = \frac{m}{n}$

$$\frac{3^{80} \cdot 7^{80}}{m} \quad \frac{3^{80} \cdot 7^{80}}{n}$$

а для  $\mathbb{Z}$  (или  $\frac{1}{q}$ )  
если  $q < 0$  в  $\mathbb{Z}$ , тогда  
это просто проверяем,  
к-то мы уже посчитали  
когда получается  
всего  $4(q^4-1)$

$m, n$   
 $q = \frac{m}{n}$

$m = 3 \quad n = 7 \Rightarrow q = \frac{3}{7}$

$$\frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot 2}{3} = 3^{79} \cdot 7^{81} \quad ; \quad 3^{80} \cdot 7^{80} \quad ; \quad 3^{81} \cdot 7^{80}$$

$m = \pm 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \quad n = 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$

$$a = \frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}}{3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}}$$

$\frac{m}{n} = \frac{3^{\alpha_1}}{7^{\beta_1}} / \frac{3^{\alpha_2}}{7^{\beta_2}} = \frac{3^{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot 7^{\beta_2 - \beta_1}}{1}$

рассмотрим