



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Решите уравнение

$$6 \operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $13^{180} \cdot 17^{180}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x-1) - (x-2) \ln(3x-3) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xuz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{15}$, $AD = DC = \sqrt{6}$, $AC = 2\sqrt{3}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$26 \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{26}}$$

$$x_1 = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{26}}\right) + 2\pi k$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{26}}\right) + 2\pi k$$

$x \in I, II$ четв., где $\cos x$ и $\sin x$ одного знака.

$$0\text{-ветви: } x_1 = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{26}}\right) + 2\pi k; \quad x_2 = \pi - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{26}}\right) + 2\pi k$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\operatorname{ctg} 2x - 1 + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}}{\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} \quad \text{т.к.} \quad \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}$$

$$\frac{2 \sin x \cos x}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} - 1 + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 0$$

$$\frac{2 \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x) - (\cos x + \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = 0$$

$$\frac{-2 \cos^2 x + 10 \sin x \cos x}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = 0$$

$$\frac{2 \cos x (5 \sin x - \cos x)}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x \neq \sin x \\ \cos x \neq -\sin x \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 5 \sin x \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} 1) x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 2) (5 \sin x)^2 + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МОТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

числа $\frac{b}{a} = q \Rightarrow$ геом. прогрессия имеет следующий

вид: $a; aq; aq^2$

Тогда $abc = a^3 q^3 = 13^{180} \cdot 17^{180} \Rightarrow aq = 13^{60} \cdot 17^{60}$, т.е.

второе число (b) всегда равно $13^{60} \cdot 17^{60}$.

Тогда $ac = a^2 q^2 = 13^{120} \cdot 17^{120}$

$a, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ т.к. $c = \frac{13^{120} \cdot 17^{120}}{a}$, т.е.

число c однозначно определяется

числом a , то кол-во троек, удовл. условию

равно кол-ву ~~чисел~~ возможных значений

числа a . Кол-во возможных значений

числа a - это, в свою очередь, кол-во

целых делителей числа $13^{120} \cdot 17^{120}$, а

это удвоенное число его натур. делителей (т.к. каждому полож. соотв. один отриц. дел.)

Всего натур. делителей 121^2 (121 вариант

выбрать степень 13 и 121 вариант выбрать степень 17) (17 и 13 - простые) \Rightarrow

всего троек чисел a, b, c , удовл. условию

~~$2 \cdot 121^2$~~ $2 \cdot 121^2$

Ответ: $2 \cdot 121^2$

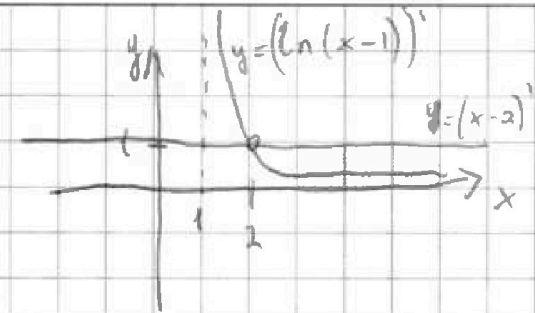
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\ln(x-1) = x-2$$

одна из корней: $x=2$. Однако

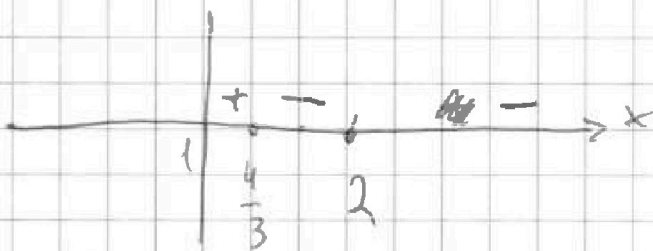
это не совместительности т. пересечения графиков этих производных \Rightarrow

эти 2 графика касаются друг друга.

$$\text{т.е. } \ln(x-1) \leq x-2$$

$$\text{Может: } x \in \left[\frac{4}{3}; 2 \right]$$

решим
нер-во методом
интервалов:



Подставим
значения из
всех получ. пр-ков.

$$x = \frac{7}{6}: \left(\ln \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \right) \left(\ln 3 + \ln \frac{1}{6} \right) \Rightarrow > 0$$

$$x = 1,5: \left(\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\ln 3 + \ln \frac{1}{2} \right) \Rightarrow < 0$$

$\ln \frac{1}{6} < -1$ $\ln \frac{1}{6} = -\ln 6; \ln 6 > \ln 3$

$$x = 100: \left(\ln 99 - 98 \right) \left(\ln 3 + \ln 99 \right) \Rightarrow > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } x \in \left(1; \frac{4}{3} \right] \cup \{ 2 \}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2(x-1) - (x-2)\ln(3x-3) + (\ln 3)\ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \text{ОДЗ: } x > 1$$

$$\ln(x-1) \cdot \ln(x-1) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) + (\ln 3)\ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln(x-1) (\ln(x-1) + \ln 3 - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1))) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) - x + 2)(\ln 3 + \ln(x-1)) \geq 0$$

Найдём нули этой функции

$$\ln 3 + \ln(x-1) = 0 \Rightarrow \ln(x-1) = \ln \frac{1}{3} \Rightarrow$$

т.к. функция $\ln a$ монотонно возрастает,
то корень один: $x = \frac{4}{3}$

$$\ln(x-1) - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) - (x-2) = 0$$

$$\ln(x-1) = x-2$$

~~$(x-2)' > 0$~~ * а производная $\ln(x-1)$
 $(x-2)' = 1$ монотонно убывает \Rightarrow

у этих функций не более двух
пересечений.

Можно дополнительно показать графики
производных этих функций для наглядности.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 18d^3 - 3ad = d \\ -18d^3 + 3ad = -d \\ -\frac{2}{3}d^3 + ad = 3d \\ \frac{2}{3}d^3 - ad = -3d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 54\frac{2}{3}d^3 - 10ad = 0 \\ 16d^3 = 10d \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2 = \frac{10}{16} \\ 10a = \frac{164d^2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2 = \frac{5}{8} \\ a = \frac{164}{30}d^2 \end{cases}$$

$$a = \frac{164}{30} \cdot \frac{5}{16} = \frac{164}{48} = 3 + \frac{5}{12} = \frac{41}{12}$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{41}{12}x$$

$$18d^3 - \frac{41}{12}d = d \Rightarrow d^2 = \frac{45}{4} \cdot \frac{1}{18} = \frac{5}{8}$$

Площадь квадрата — это полу произведение его диагоналей. Диагонали равны.

Найдем длину диагонали BD , $\Delta x = 2d$; $\Delta y = 6d$

$$BD = \sqrt{(2d)^2 + (6d)^2} = \sqrt{40d^2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{BD^2}{2} = \frac{40d^2}{2} = 20d^2 = 20 \cdot \frac{5}{8} = \frac{100}{8} =$$

$$= 12,5$$

Ответы: $a = \frac{41}{12}$; $S_{ABCD} = 12,5$.



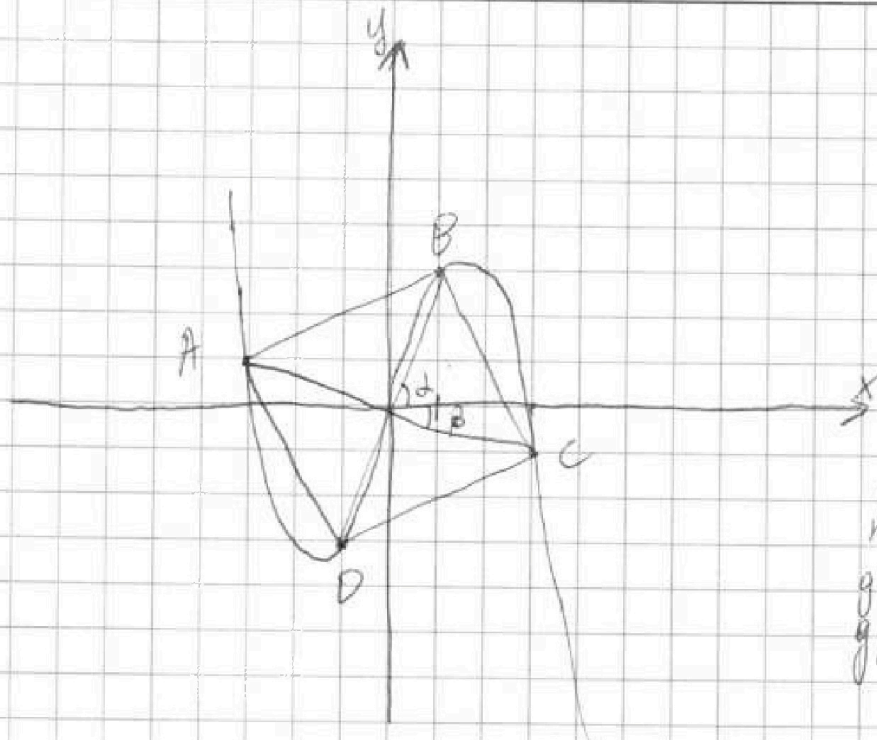
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

ЛОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что центр квадрата — это по совместительству т. пересечения его диагоналей ~~А также,~~

Диагонали квадрата перпендикулярны друг другу \Rightarrow

Раз первая диагональ лежит на прямой $y = 3x$, то вторая лежит на прямой $y = -\frac{x}{3}$ ввиду того, что

y функции $f(x) = kx$ k это тангенс угла между прямой и осью Ox .

$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow |\operatorname{tg} \alpha| = |\operatorname{ctg} \beta|$, но они противоположны

по знаку $\Rightarrow \operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{3}$.

Заметим также, что график функции $y = -\frac{2}{3}x^3 + ax$ также проходит через начало координат.

Зная всё это можно выписать координаты вершин квадрата.

$A(-3d; d), B(d; 3d), C(3d; -d), D(-d; -3d)$

Из этого следуют некоторые следствия:

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

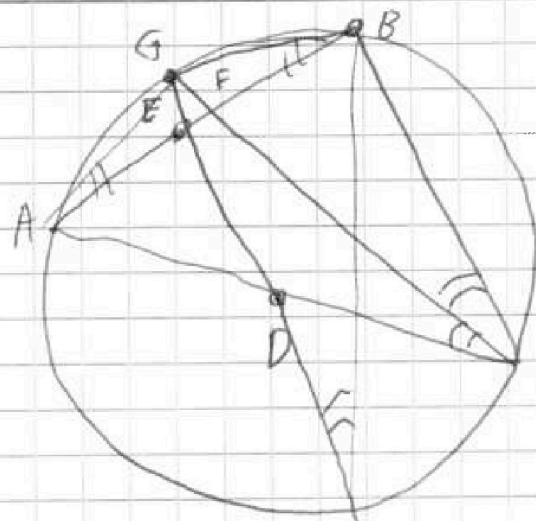
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AE = EB$$

$$AD = DC$$

Воспользуемся леммой о том, что серединный перпендикуляр, проведенный из стороны треугольника и бис-са проведенная из противолежащего ей

угла пересекаются на описанной вокруг этого треугольника окружности.

(ввиду того, что и сер. пер. и бис-са делят дугу пополам).

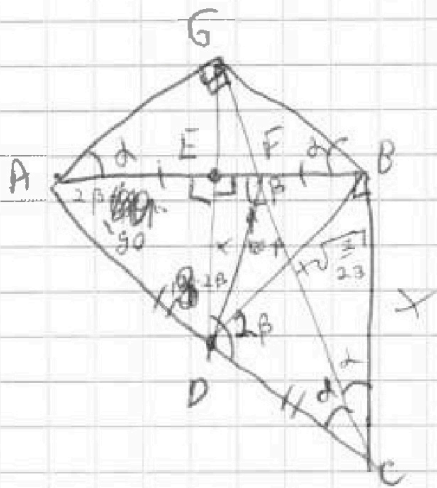
В нашем случае перпендикуляр из т. E и CF пересекутся в т. G.

$$\text{Однако } DE \perp CF = G \Rightarrow DE \perp AB$$

$$ED - \text{ср. линия } \triangle ABC \Rightarrow ED \parallel BC; ED = \frac{1}{2} BC \Rightarrow$$

$$\angle AED = \angle ABC, \text{ но т.к. } \angle AED = 90^\circ, \text{ то } \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow$$

AC - диаметр.



$$\cancel{DGC} \text{ определяется } \frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{21}{23}}$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC} \text{ по известному}$$

сб-ву биссектрисы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle AGC \sim \triangle ABC$, по 2 углам,
 $\triangle ACF$

~~$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}$$
$$\frac{AE}{FB} =$$~~

$\angle BAC = \arctg\left(\sqrt{\frac{3}{23}}\right)$
 $\angle BCA = \arctg\left(\sqrt{\frac{23}{2}}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} \Rightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{a} = c - \frac{1}{b} \\ b - \frac{1}{b} = a - \frac{1}{c} \\ c - \frac{1}{c} = b - \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = b - c + \frac{1}{c} = a - c + \frac{1}{b} \Rightarrow b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{b} \Rightarrow$$

либо $b=c$, либо $\frac{1}{b} = c$. Первый случай -
это $\Leftrightarrow y=z$ - уже см.

$$b = \frac{1}{c}:$$

$$a + c = \frac{2}{c} = c + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = a \Rightarrow a = 1$$

$$c + 1 = \frac{2}{c} \Rightarrow c = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array} \right\}$$

$c \neq 1$, т.к.

b противен
случае $a=c$ -
это уже
см.

Итого:

$$c = -2; \quad b = \frac{1}{c} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}; \quad a = 1$$

$$\frac{x^3}{\sqrt{11}} = 1; \quad \frac{y^3}{\sqrt{11}} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{z^3}{\sqrt{11}} = -2.$$

$$\frac{x^3 y^3 z^3}{11\sqrt{11}} = 1$$

$$\underline{xyz} = \sqrt[3]{11\sqrt{11}} = \underline{\sqrt{11}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что каждое из трёх выражений имеет вид $a^3 + \frac{11}{b^3}$

Возьмём производную:

$$\left(a^3 + \frac{11}{b^3}\right)' = 3a^2 - \frac{33}{b^4} = 3\left(a^2 - \frac{11}{b^4}\right) = 3\left(a - \frac{\sqrt{11}}{b^2}\right)\left(a + \frac{\sqrt{11}}{b^2}\right)$$

два нуля \Rightarrow функция $a^3 + \frac{11}{b^3}$ принимает какое-то значение с b не более, чем

3 точками.

Заметим (также) что если какие-то

2 числа (x, y, z) равны друг другу, то им не равна a и b :

$$x = y:$$

$$x^3 + \frac{11}{x^3} = x^3 + \frac{11}{x^3} \Rightarrow x = z$$

$$x = z: x^3 + \frac{11}{y^3} = x^3 + \frac{11}{x^3} \Rightarrow y = x$$

$$y = z: y^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{y^3} \Rightarrow x = y$$

Значит x, y, z попарно неравны (иначе - противоречие условию)

Разделим все части выражения на $\sqrt{11}$

$$\frac{x^3}{\sqrt{11}} + \frac{\sqrt{11}}{y^3} = \frac{y^3}{\sqrt{11}} + \frac{\sqrt{11}}{z^3} = \frac{z^3}{\sqrt{11}} + \frac{\sqrt{11}}{x^3}$$

$$a = \frac{x}{\sqrt{11}}, \quad b = \frac{y}{\sqrt{11}}, \quad c = \frac{z}{\sqrt{11}}$$

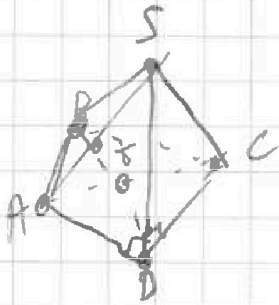
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что $AD^2 + DC^2 = AC^2$
 $\angle ADC = 90^\circ$

Также заметим, что $ABCD$ -

геометрич. \Rightarrow DB - биссектриса, $AC \perp BD$

$AC \cap BD = T$ $AT = TD$, т.к. $\triangle ATO$ -

р/б п/у, $\Rightarrow TD = \frac{1}{2} AC$, т.к. T - сер. AC

(ибо это точка пересечения биссектрис, гроб.

к осн - катю р/б Δ) $TD = \sqrt{3}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} BT \cdot AC$$

по т. косинусов ($\angle AOC$)

$$15 + 15 - 30 \cos \alpha = 12 \Rightarrow \cos \alpha = 0,1 \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \sqrt{0,99} \Rightarrow BT = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \alpha}{AC} =$$

$$= \frac{15 \sqrt{0,99}}{2\sqrt{3}} = 7,5 \sqrt{0,33} = 0,75 \sqrt{33}$$

$$\Rightarrow BD = BT + TD = \sqrt{3} + 0,75 \sqrt{33}$$

$$SD \perp ABCD \Rightarrow BS^2 = BD^2 + SD^2, AS^2 = AD^2 + SD^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



к 1, 2, 4, 3

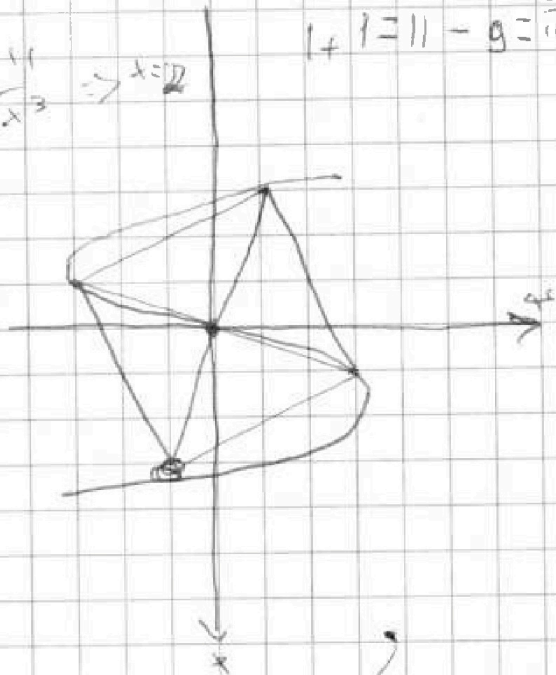
$$\left(\frac{3}{x} + \frac{11}{x^3}\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{11}{y^3}\right) = 2\left(y^3 + \frac{11}{z^3}\right)$$

$x=y$:

$$\frac{3}{x} + \frac{11}{x^3} + \frac{3}{2} + \frac{11}{x^3} = 2\left(x^3 + \frac{11}{z^3}\right) \Rightarrow x=2$$

$$1 + 1 = 11 - 9 = \frac{9}{11} + 1$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{FB}{BC}$$



$$R(2z - \sqrt{2})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4a}{4a} = 46R - \sqrt{8}R \\
 &= \frac{-\sqrt{8} + 2\sqrt{4}R^2}{\sqrt{8} + 2\sqrt{4}R^2} \\
 &= \frac{-\sqrt{8} + 2\sqrt{4}R^2}{\sqrt{8} + 2\sqrt{4}R^2} \\
 &= \frac{2\sqrt{8}DF + R\sqrt{8}}{2\sqrt{8}DF - R\sqrt{8}} = 0 \\
 &= \frac{2\sqrt{8}DF + R\sqrt{8}}{2\sqrt{8}DF - R\sqrt{8}} = 0
 \end{aligned}$$



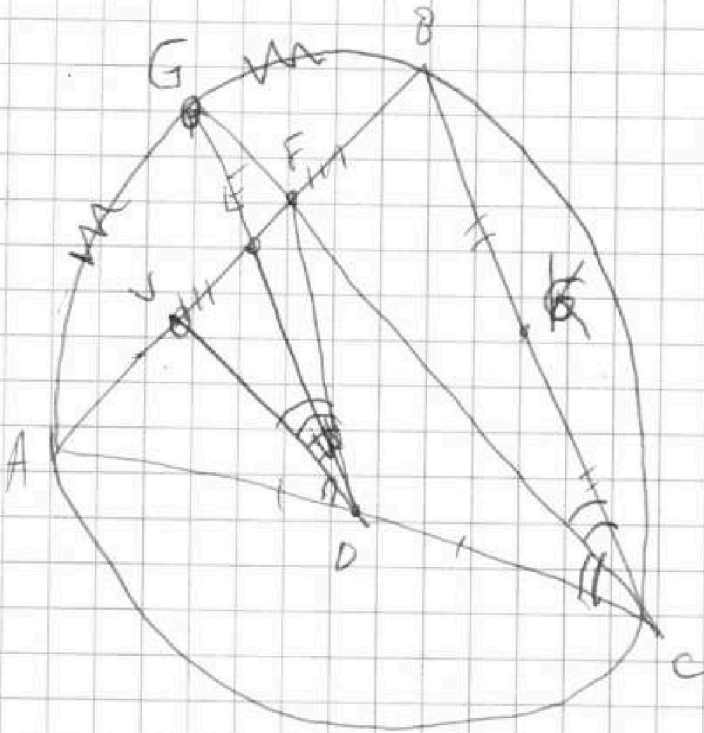
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{CF}{DF}$

$$\frac{CF}{DF} = \frac{c - a + b}{c - a - b} = \sqrt{\frac{2}{23}}$$

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$$

$$a - \frac{1}{a} = b - \frac{1}{b} = c - \frac{1}{c}$$

$$a - \frac{1}{a} = b - \frac{1}{b} = c - \frac{1}{c}$$

$$\ln(x-1) (\ln(x-1) + \ln 3) - (x-2) (\ln(x-1) + \ln 3) \geq 0$$

$$\ln(x-1) = \frac{e^x}{e^2} \quad \ln 2 \leq 1$$

$$e^2 x - e^2 = e^x \quad \ln$$

$$e^x - e^2 = -e^2$$

$$e^{x-2} - x = -1 \quad x=2$$

$$1000 \cdot (\ln 999 - 998) \left(+ \frac{1}{a} = b - c + \frac{1}{b} = a - c + \frac{1}{c} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~3/12/22~~

~~$$\left(x^3 + \frac{11}{x^3}\right)^2 = x^3 y^3 + 11 + \frac{11x^3}{z^3} + \frac{121}{y^3 z^3}$$~~

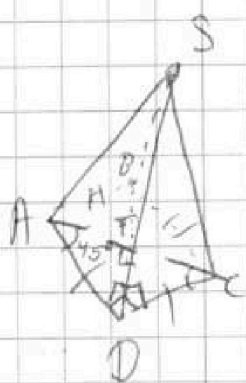
$$x^3 y^3 z^3 + 11(x^3 + z^3 + y^3)$$

~~3/12/22~~

$$\left(x^3 + \frac{11}{y^3}\right)^2 = 3x^2 - \frac{33}{y^4} = 3\left(x^2 - \frac{11}{y^4}\right)$$

$$R^2 = \frac{21}{23} DF^2$$

7.



$$AC^2 = 12$$

$$TD = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$15 - 30 \cos \theta = 12$$

$$BD = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} + 1,5\sqrt{11} \right)$$

$$\cos \theta = 0,1 \Rightarrow$$

$$\sin \theta = \sqrt{0,99}$$

$$2 S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} + 1,5\sqrt{11} \right) = AC \cdot r \Rightarrow$$

$$15\sqrt{0,99} = TB \cdot \sqrt{12} \Rightarrow TB = 7,5\sqrt{0,33} = 0,75\sqrt{33}$$

21



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \operatorname{ctg} 2x - 1 + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\text{a) } x = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \begin{matrix} a^3 b^3 = 13 \cdot 17 \\ a^6 b^6 = 13 \cdot 17 \end{matrix}$$

$$\frac{x \sin \alpha - x \cos \alpha}{x \sin \alpha + x \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$a = \pm 13^k \cdot 17^y \quad x, y = \{0, 1\}$$

всего $2 \cdot 121^2$ вариантов.

$$\ln^2(x-1) - (x-3)(\ln 3 + \ln(x-1)) \geq 0$$

$$\ln^2(x-1) - (\ln 3 + \ln(x-1)) / (x-2) + \ln 3 \ln(x-1) \geq 0$$

$$\frac{x \sin \alpha - x \cos \alpha}{x \sin \alpha + x \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\log_2 8 + \log_2 4 = 5$$

$$\ln^2(x-1) - 1$$

$$\frac{\left(\frac{\ln(x-1)}{x-1}\right) \sin \alpha}{\cos \left(\frac{\ln(x-1)}{x-1}\right) \cos \alpha}$$

$$0 + 0 = \frac{0}{1} + 0$$

$$\begin{aligned} \leq \frac{e^x}{11} + x - \frac{e^x}{11} + \frac{1}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon} + x \\ &= \frac{1}{\varepsilon} + x \\ &= \frac{1}{\varepsilon} + x \\ &= \frac{1}{\varepsilon} + x \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} + x = \frac{e^x}{11} + x = \frac{1}{\varepsilon} + x$$