



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Решите уравнение

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?
3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x - 1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.
5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.
6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения $x y z$.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:
- а) объём пирамиды;
- б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



√3] Распишем $\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}(x+x)$ и $\operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4})$ как сумму в tg :

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin(x+x)}{\cos(x+x)} = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}; \quad \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{\sin(x + \frac{3\pi}{4})}{\cos(x + \frac{3\pi}{4})} = \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \cos x}{\cos x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin x \sin \frac{3\pi}{4}}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}$$

Подставим это в исходное уравнение:

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) \Rightarrow \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x} = \frac{\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x)}$$

$\Rightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin x - \cos x) = (\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + \sin x)$. Функции не равны нулю в tg — не 0 (узнали в конце), а $\cos^2 x - \sin^2 x$ — разность квадратов.
 $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(\sin x - \cos x) = (\cos x + \sin x)(\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x)$

$$\Rightarrow 1) \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = -\sin x \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Иначе сократим и раскроем скобки:

$$(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) = \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow$$

$$6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow 4 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos x (2 \sin x + \cos x) = 0. \text{ Никакая-то скобка - с.}$$

$$2) 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ и } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

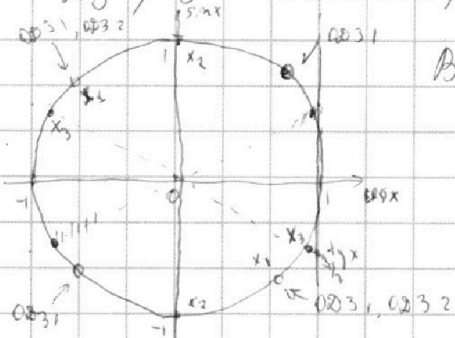
$$3) 2 \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \text{ (т.к. } \cos x = 0 \text{ рассмотрим в конце)}$$

Проверим ОДЗ для tg :

1) $\operatorname{tg} 2x$ — существует $\Rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $2x \neq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Тогда $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k$ и $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2) $\operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4})$ — существует $\Rightarrow x + \frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $x + \frac{3\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ и $x \neq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Изобразим все на три окружности.



Видно, что остались только x_3 где $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$

Ответ: $x = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{2}) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2] Рассмотрим 3 варианта не имея геом. прогрессии ($a=t, b=qt, c=q^2t$):
 1) $a = b \cdot c$ (или прогр. с $q=1$), тогда $abc = 2^{150} \cdot 3^{150} \Rightarrow a = b = c = 2^{50} \cdot 3^{50}$ - т.е. один вариант.

2) $a < b < c$, тогда $a < b < c$ (или все отриц.)
 А) $q = -1 \Rightarrow a = -b < c \Rightarrow a \cdot b \cdot c = a \cdot (-a) \cdot c = -a^2 \cdot c = 2^{150} \cdot 3^{150} \Rightarrow c = -2^{50} \cdot 3^{50}, b = 2^{50} \cdot 3^{50}, a = -2^{50} \cdot 3^{50}$ - т.е. еще 1 вариант.

3) $a < b < c$ (или все отриц.) $\Rightarrow (b = qt, c = q^2t \Rightarrow) a > b > c$ (безопасно $b = x$, тогда $a = \frac{x}{q}, c = xq \Rightarrow$
 $\Rightarrow abc = \frac{x}{q} \cdot x \cdot (xq) = x^3 = 2^{150} \cdot 3^{150} \Rightarrow b = x = 2^{50} \cdot 3^{50}$, все. Тогда чтобы a получилось целым, нужно выбрать q так, чтобы $2^{50} \cdot 3^{50}$ делилось на это q . Показано, что все такие $q = 2^d \cdot 3^p$, где $d, p \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq d, p \leq 50$. Значит всего получается таких d и p 51^2 вариантов, но при $d = p = 0$ имеем $q = 1$, что мы уже рассмотрели. Значит подходит $51^2 - 1$ вариантов на q . Очевидно, что при всех них все числа целые и имеют нужное произведение.

4) $0 < q < 1 \Rightarrow a < b < c$ (или все отриц.) $\Rightarrow a < b < c$ (или все отриц.) Тогда $a < b < c$ если развернуть последовательность $(a, b, c) \rightarrow (c, b, a)$, то мы получим в предыдущий вариант, значит здесь тоже число $51^2 - 1$ вариантов на q .

5) $q < -1$ обозначим $b = x, a = \frac{x}{q}, c = xq \Rightarrow abc = x^3 = 2^{150} \cdot 3^{150} \Rightarrow b = x = 2^{50} \cdot 3^{50}$
 Тогда a и c - отрицательные целые \Rightarrow какую-нибудь такую пару (a, b, c) можно составить $(-a, b, -c)$, где уже $q > 1$ и тогда мы получили в пункте 3 где подходит $51^2 - 1$ вариантов q .

6) $-1 < q < 0$ аналогично составляем $(a, b, c) \Leftrightarrow (-a, b, -c)$ и получаем в варианте 4, где тоже $51^2 - 1$ вариантов q .

Мы рассмотрели все варианты q , помните, что других нет (осталось только $q = 0$, но при нем числа (хотя бы 1) отсутствуют и их произведение $-c$). Все варианты, очевидно, различны.

Ответ: $2 + 4(51^2 - 1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4) Диагонали квадрата перпендикулярны и делятся точкой пересечения на равные части. Поэтому одну из них на $y = -4x \rightarrow$ другая на $y = \frac{1}{4}x + t$ - ось x , но т.к. центр в $(0,0)$, то и $y = \frac{1}{4}x + t$ проходит через центр квадрата $\Rightarrow t=0$ и $y = \frac{1}{4}x$. ($\frac{1}{4}$, т.к. $y \perp x$ линии произведены при коэф. -4 из скалярного произведения). Пусть на $y = -4x$ лежат ~~точки~~ ^{точки} квадрата A и B , а на $y = \frac{1}{4}x$ - C и D . Тогда запишем, что эти точки и на прямых, и на окружности $y = x^2 - ax$:

$\begin{cases} \text{Т.А: } -4x_a = x_a^3 - ax_a \\ \text{Т.В: } -4x_b = x_b^3 - ax_b \\ \text{Т.С: } \frac{1}{4}x_c = x_c^3 - ax_c \\ \text{Т.Д: } \frac{1}{4}x_d = x_d^3 - ax_d \end{cases}$

Поскольку диагонали делятся точкой пересечения пополам, то равны длины: $OA = OB = OC = OD$, где $O(0,0)$:
 $x_a^2 + 16x_a^2 = x_b^2 + 16x_b^2 = x_c^2 + \frac{1}{16}x_c^2 = x_d^2 + \frac{1}{16}x_d^2$. Отсюда имеем $x_a = \pm x_b$, $x_c = \pm x_d$, ~~или~~ $x_c = \pm x_b$. Обозначим $x_b = t$, тогда $x_c = -t$ ~~или~~ точки C и D имеют или $x_c = kt$ и $x_d = -kt$, или $x_c = -kt$ и $x_d = kt$, где k - коэффициент (приближенно-равные точки C и D), поэтому возьмем первый вариант. (или отметили $x_c = x_b$ и $x_c = x_d$, т.к. они ~~тоже~~ ^{тоже} ~~совпадают~~ ^{совпадают}). Записываем систему: $\begin{cases} x_a = -t \\ x_b = t \\ x_c = kt \\ x_d = -kt \end{cases}$ (k=n)

$\begin{cases} \text{Т.А: } x_a = -t, & 4t = -t^3 + at \\ \text{Т.В: } x_b = t, & -4t = t^3 - at \\ \text{Т.С: } x_c = kt, & \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \\ \text{Т.Д: } x_d = -kt, & -\frac{1}{4}t = -kt^3 + kat \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ -4t = t^3 - at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t^3 - t^3 + at = 0 \\ -4t^3 + t^3 + at = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t^3 + at = 0 \\ -3t^3 + at = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t^3 + at = 0 \\ 3t^3 + at = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -t^3 + at \\ \frac{1}{4}t = kt^3 - kat \end{cases}$

Ответ: $a = \frac{257}{60}$; площадь квадрата $\frac{17^2}{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

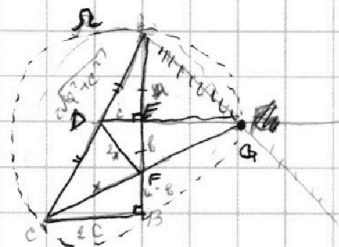
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5) CF пересекает Ω в середине AB, тогда окружность пересекает Ω перпендикулярно AB ⇒ GE - диаметр к AB ⇒ BEF - тоже диаметр, т.е. AB плоскому DE - средине ΔABC, то DE || BC ⇒ BC ⊥ AB ⇒ ∠B = 90°. Пусть CF = x, тогда по условию DF = 2x



Обозначим AE = a, EF = b ⇒ FB = a - b, BC = 2c ⇒
 ⇒ ΔCBF: $x^2 = 4c^2 + (a-b)^2$; ΔDEF: $4x^2 = b^2 + c^2$ (DE = 1/2 BC = c, как средняя линия). Величины.

$$\begin{cases} x^2 = 4c^2 + (a-b)^2 \\ 4x^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

Кроме этого, по свойству биссектрисы: $\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{CB} = \frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{2c} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{c} = \frac{a+b}{a-b}$

Нужно узнать лишь c/a или c/b, поэтому введем переменные: $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - c}{c + \sqrt{a^2 + c^2}}$. Тогда: $16c^2 + 4(a-b)^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b(c + \sqrt{a^2 + c^2}) = a(\sqrt{a^2 + c^2} - c) \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - c}{c + \sqrt{a^2 + c^2}}$

$$16c^2 + 4a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - c}{c + \sqrt{a^2 + c^2}}\right)^2 = a^2 \left(\frac{\sqrt{a^2 + c^2} - c}{c + \sqrt{a^2 + c^2}}\right)^2 + c^2$$

Заметим $\sqrt{a^2 + c^2} = d$, тогда $a^2 = d^2 - c^2$: $16c^2 + 4(d^2 - c^2) \left(1 - \frac{d-c}{c+d}\right)^2 = (d^2 - c^2) \left(\frac{d-c}{c+d}\right)^2 + c^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 16c^2 + 4 \frac{(d-c)(d+c) \cdot 2c}{(c+d)} = \frac{(d-c)(d+c)(d-c)(d-c)}{(d+c)(d+c)} + c^2$$

отсюда можно найти отношение c к d ⇒ мы узнаем угол в прямоугольном треугольнике (2d-2c): $16dc^2 + 16c^3 + 8c(d-c)(d+c) = (d-c)^2 + c^2(d+c)$

Ответ: 90° и

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 Рассмотрим ~~систему~~ ^{первое уравнение} первое равенство и ^{первое и второе} второе и выразим ^{и выразим} z в
 из $z^3: \begin{cases} x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} \\ x^3 + \frac{7}{y^3} = z^3 + \frac{7}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z^3} = \frac{x^3}{7} + \frac{1}{y^3} - \frac{y^3}{7} = \frac{x^3 y^3 + 7 - y^6}{7 y^3} \\ \frac{1}{z^3} = x^3 + \frac{7}{y^3} - \frac{7}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{7}{x^3 + y^3 - \frac{7}{y^3}} \\ z = x^3 + \frac{7}{y^3} - \frac{7}{x^3} \end{cases}$

Приравняв, имеем: $\frac{7}{x^3} + y^3 - \frac{7}{y^3} = x^3 + \frac{7}{y^3} - \frac{7}{x^3} \Rightarrow (y^3 - x^3) + 2\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}\right) = 0$
 $\Rightarrow (y^3 - x^3) + 14 \frac{y^3 - x^3}{x^3 y^3} = 0 \Rightarrow (y^3 - x^3) \left(1 + \frac{14}{x^3 y^3}\right) = 0$. Решая для этих x, y -
 ренных, имеем $y = x$ или $y = -\sqrt[3]{14}/x$. Помните это можно изобразить
 взять группы равенства (выразить x или y) и получается аналогичные во-
 рождения (т.к. все симметрично). Тогда:

$\begin{cases} y = x \\ y = -\sqrt[3]{14}/x \end{cases}$ и $\begin{cases} y = z \\ y = -\sqrt[3]{14}/z \end{cases}$ и $\begin{cases} z = x \\ z = -\sqrt[3]{14}/x \end{cases}$ Рассмотрим все варианты, пусть $x = t$:

- В первом $y = xt \Rightarrow z \neq y \Rightarrow \begin{cases} z = -\sqrt[3]{14}/z \\ z + x \Rightarrow z = -\sqrt[3]{14}/x \end{cases} \Rightarrow z = -\sqrt[3]{14}/t \Rightarrow (x, y, z) = (t, t, -\sqrt[3]{14}/t)$
- В первом $y = -\sqrt[3]{14}/x$, во втором $y = z \Rightarrow z = -\sqrt[3]{14}/x \Rightarrow (x, y, z) = (t, -\sqrt[3]{14}/t, -\sqrt[3]{14}/t)$
- В первом $y = -\sqrt[3]{14}/x$, во втором $y = -\sqrt[3]{14}/z \Rightarrow z = x \Rightarrow (x, y, z) = (t, -\sqrt[3]{14}/t, t)$.

Помните, что теперь все логично:

- 1) $(x, y, z) = (t, t, -\sqrt[3]{14}/t) \Rightarrow t^3 + \frac{7}{t^3} = t^3 - \frac{7}{14} = -\frac{14}{t^3} + \frac{7}{t^3} \Rightarrow \frac{7}{t^3} = -\frac{14}{t^3} \Rightarrow -t^3 = 14$ - такого не бывает.
- 2) $(x, y, z) = (t, -\sqrt[3]{14}/t, -\sqrt[3]{14}/t) \Rightarrow t^3 + \frac{7}{14} = -\frac{14}{t^3} + \frac{7}{14} = -\frac{14}{t^3} + \frac{7}{t^3} \Rightarrow t^3 = -\frac{14}{t^3}$
 $\Rightarrow t^6 = -14$ - такого не бывает.
- 3) $(x, y, z) = (t, -\sqrt[3]{14}/t, t) \Rightarrow t^3 - \frac{7}{14} = -\frac{14}{t^3} + \frac{7}{t^3} = t^3 + \frac{7}{t^3} \Rightarrow -\frac{14}{t^3} = t^3$
 $\Rightarrow t^6 = 14$ - такого не бывает.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

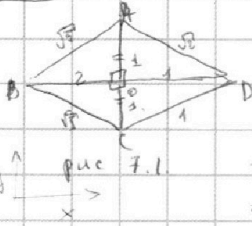
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

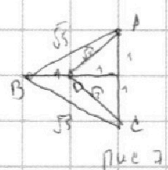


№7



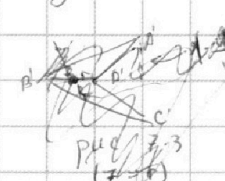
Рассмотрим основание $ABCD$. $AB=BC \Rightarrow B$ — на сеп. перпендикуляр к AC , $AD=DC \Rightarrow D$ на сеп. перпендикуляр к $AC \Rightarrow$ плоскости $AC \perp BD$ и в точке пересечения O . $AO=OC = \frac{AC}{2} = 5$. Основание $ABCD$ разделилось на прямоугольные треугольники $\Rightarrow BO^2 = AB^2 - AO^2 = BC^2 - CO^2 = 5^2 - 1^2 = 4 = 2^2 \Rightarrow BO = 2$; $OD^2 = AD^2 - AO^2 = DC^2 - CO^2 = 5^2 - 1^2 = 4 = 2^2 \Rightarrow OD = 2$. Введем координатную систему так, что $O(0;0;0)$.

$D(1;0;0)$, $B(-2;0;0)$, $C(0;-1;0)$, $A(0;1;0)$, $S(1;0;h)$ (S над D , т.к. $SD \perp ABCD$ по условию). Из координат, найдем $SA^2 = 1^2 + 1^2 + h^2 = 2 + h^2$; $SB^2 = 3^2 + 0^2 + h^2 = 9 + h^2 \Rightarrow SA + SB = 2\sqrt{5} = \sqrt{2+h^2} + \sqrt{9+h^2}$. Возведем в квадрат: $4 + 5 + 4\sqrt{5} = 2 + h^2 + 9 + h^2 + 2\sqrt{(2+h^2)(9+h^2)} \Rightarrow 4\sqrt{5} = 2h^2 + 7 + 2\sqrt{(2+h^2)(9+h^2)} \Rightarrow \sqrt{(2+h^2)(9+h^2)} = 2\sqrt{5} - 1 - h^2$. Возведем еще раз: $(2+h^2)(9+h^2) = 20 + 11h^2 + h^4 - 4\sqrt{5} - 4\sqrt{5}h^2 + 2h^2 \Rightarrow h^4 + h^2(2-4\sqrt{5}) + (21-4\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow h^2(2-4\sqrt{5}-11) = (4\sqrt{5}-3) \Rightarrow h^2 = \frac{4\sqrt{5}-3}{-4\sqrt{5}-9}$. Видно, что получается $h^2 < 0 \Rightarrow$ картинка выйдут не так, а B и D по одну сторону от AC . Тогда правильной рисунок — 7.2.

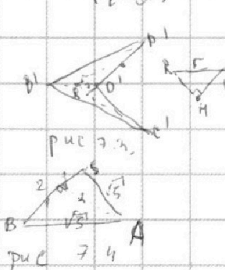


Пусть $D(0;0;0)$, $A(1;1;0)$, $C(1;-1;0)$, $B(-1;0;0)$, $S(0;0;h)$. $\Rightarrow SA^2 = h^2 + 2$, $SB^2 = h^2 + 1 \Rightarrow 2 + \sqrt{5} = \sqrt{2+h^2} + \sqrt{1+h^2}$. Возведем в квадрат, выведем, что такое h всего одно, а $h = \sqrt{3}$ — подходит. Тогда S — площадь $ABCD$: $2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1) = 1$, в $SABCD$ $h = \sqrt{3} \Rightarrow$ объем $SABCD$: $1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пусть R — центр шара из точки S . Тогда выведем, что пусть $R(R_x, R_y, R_z)$, но пометки, что $|R_x| = r$, где r — радиус шара (из касания SD и $|R_z| = r$ — из касания $ABCD$, а $R_y = 0$, т.к. картинка сим. отн. BDS). Тогда имеем $R(-r, 0, r)$, но нужно учесть касание SAR и SBR .



Рассмотрим пирамиды $BASR$, $BCSR$, $BA \cap C R$ и SAR и SCR . Показано, что высоты от R к ребрам равной длины всей пирамиды, а высоты из R на BA , BC и $BA \cap C$ по r . Высоты на SA и SC получим по $r/\sqrt{2}$ (из-за того, что они лежат в сечении по $r=r$ и они $AR \perp DR$ — $r/\sqrt{2}$ приложу с r и r). Считаем площади граней: $S_{\triangle ABC} = 1$, $S_{\triangle SAR} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} r$; $S_{\triangle SCR} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} r$.



$S_{\triangle SAB}$ и $S_{\triangle SBC}$ по рис. 7.4: $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$. Запишем уравнение: $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}}{S_{\triangle SAS}} + \frac{r \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}}{S_{\triangle SCS}} + \frac{r \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{S_{\triangle SAR}} + \frac{r \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{S_{\triangle SCR}} + \frac{r \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{S_{\triangle SAR}} + \frac{r \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{S_{\triangle SCR}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} r + \frac{1}{2\sqrt{5}} r$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = r \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \Rightarrow r = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1/\sqrt{3}}{\frac{5\sqrt{3} + 1}{3}} = \frac{3}{5\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}}$$

Ответ: а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ б) $\frac{\sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(a, b, c) $abc = 2^{150} \cdot 3^{150} = \frac{x}{q} \cdot x \cdot q = x^3 \rightarrow x = 2^{50} \cdot 3^{50}$
 $a = b = c = 2^{50} \cdot 3^{50} \parallel a > b > c \approx ac < bc < c \rightarrow q \in \text{gen. } 2^{50} \cdot 3^{50} \rightarrow q = 2^x \cdot 3^p$
 $\text{Ans: } 1 + 2(51^2 - 1) = 2 \cdot 51^2 - 2 = 2 \cdot 51^2 - 1$

$\text{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{\sin(x + \frac{3\pi}{4})}{\cos(x + \frac{3\pi}{4})} = \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \cos x}{\cos x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin x \sin \frac{3\pi}{4}}$
 $= \frac{\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}$
 $\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} + 1 = \frac{-\sin x \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}$
 $(\frac{\sqrt{2}}{2})(\sin x + \cos x)(6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin x + \cos x)(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x)$

$(\sin x + \cos x)(6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(\sin x - \cos x)$
 1) $\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$
 2) $\cos^2 x + 6 \sin x \cos x - \sin^2 x = -\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \cos x \sin x$
 $4 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow 2 \cos x (2 \sin x + \cos x) = 0$
 2) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ 3) $2 \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \text{tg } x = -\frac{1}{2}$

3) $\ln^2 x - (x-1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geq 0$
 $\ln^2 x - x \ln 2 \ln x + \ln 2 \ln x \geq 0$
 $\ln x (\ln x - x \ln 2 + \ln 2) \geq 0$

$y = -4x \rightarrow \text{opred.} \rightarrow (x_1, -4x_1) \rightarrow x_1 \sqrt{17} = 5$
 $y = \frac{1}{4}x \rightarrow \text{opred.} \rightarrow (x_3, \frac{1}{4}x_3) \rightarrow x_3 \sqrt{17} = \frac{1}{4}x_3 \sqrt{17}$
 $(x_4, \frac{1}{4}x_4) \rightarrow \frac{1}{4}x_4 \sqrt{17}$
 $\begin{cases} -4t^3 = t^3 - at \\ 4t^3 = -t^3 + at \\ 7 = 6t^3 - at \\ -t = 6t^3 + at \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5t^3 = at \\ 6t^3 = 4at \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5t^2 = a \\ 6t^2 = 4a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5t^2 = a \\ 3t^2 = 2a \end{cases}$

$z(x, y): \begin{cases} x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 - \frac{7}{x^3} \\ x^3 - \frac{7}{y^3} = z^3 - \frac{7}{x^3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^3 + \frac{7}{y^3}}{y^3} = \frac{y^3 - \frac{7}{x^3}}{y^3} \\ \frac{x^3 - \frac{7}{y^3}}{y^3} = \frac{z^3 - \frac{7}{x^3}}{y^3} \end{cases}$

$x^3 - y^3 + 14(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3}) = 0$
 $(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 14 \frac{x^2 - y^2}{y^3 x^3} = 0 \Rightarrow (x^3 - y^3)(1 + \frac{14}{y^3 x^3}) = 0$
 $(y^3 - z^3)(1 + \frac{14}{y^3 z^3}) = 0$
 $(x^3 - z^3)(1 + \frac{14}{x^3 z^3}) = 0$
 $x^3 - 14 = x \cdot x \cdot \frac{\sqrt{14}}{x} = x^2 \sqrt{14}$
 $x^3 - 14 = x \cdot x \cdot \frac{\sqrt{14}}{x} = x^2 \sqrt{14}$
 $x^3 - 14 = x \cdot x \cdot \frac{\sqrt{14}}{x} = x^2 \sqrt{14}$

- 2 y 8
 -2 4 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

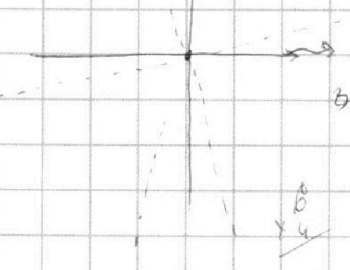
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



00 34 56 7



$$1^2 + 4 = -4 + 2 = 1/11$$

$$5^2 = -4,25$$

$$\frac{320}{17} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r} 320 \\ \times 4 \\ \hline 1280 \\ + 17 \\ \hline 1297 \end{array}$$

280

56

297

$$x_B^2 + 4x_B^2 = x_C^2 + 1/16 x_C^2$$

$$x_B^2 \cdot 5 = x_C^2 \cdot \frac{17}{16}$$

$$\frac{80}{17} - 1 \quad x_C = x_B \cdot \pm \sqrt{\frac{17 \cdot 5}{16}}$$

$$\begin{array}{r} 1297 \\ - 7 \\ \hline 59 \\ - 56 \\ \hline 3 \end{array}$$

7

$$x_B^2 + 16x_B^2 = x_C^2 + 1/16 x_C^2$$

$$x_C = 4x_B$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{3\sqrt{14}}{4}$$

$$t^3 + \frac{7}{t^3} = 1^3 + \frac{7}{1^3} = 1^3 - \frac{13}{2}$$

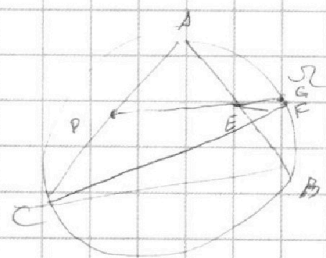
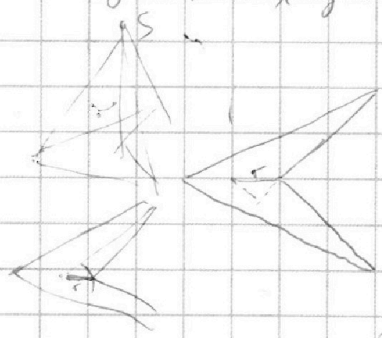
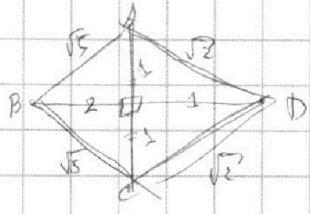
$$= 1^3 - \frac{14}{t^3} + \frac{7}{t^3} = -\frac{7}{t^3}$$

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = z^3 + \frac{7}{x^3} \rightarrow \frac{1}{y^3} = \frac{z^3}{7} + \frac{1}{x^3} - \frac{x^3}{7} = \frac{z^3 x^3 + 7 - x^6}{7 x^3} \quad y^3 =$$

$$y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3} \quad y^3 = z^3 + \frac{7}{x^3} - \frac{7}{z^3}$$

$$x^3 y^3 + 7 - y^6 = z^3 y^3 \quad x^3 + \frac{7}{y^3} - \frac{7}{x^3} = \frac{7 y^3}{x^3 y^3 + 7 - y^6}$$

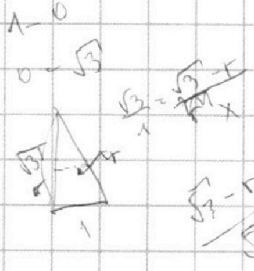
3/5/6



$$\begin{array}{l} 3 + \sqrt{2} \quad \sqrt{2 + \sqrt{5}} \\ 1 + \sqrt{2} \quad \sqrt{5} \\ 3 + 2\sqrt{2} \quad \sqrt{5} \\ 2\sqrt{2} \quad 2 \end{array}$$

$$c = 2a$$

$$(c+d) - (d-c) = 2c$$





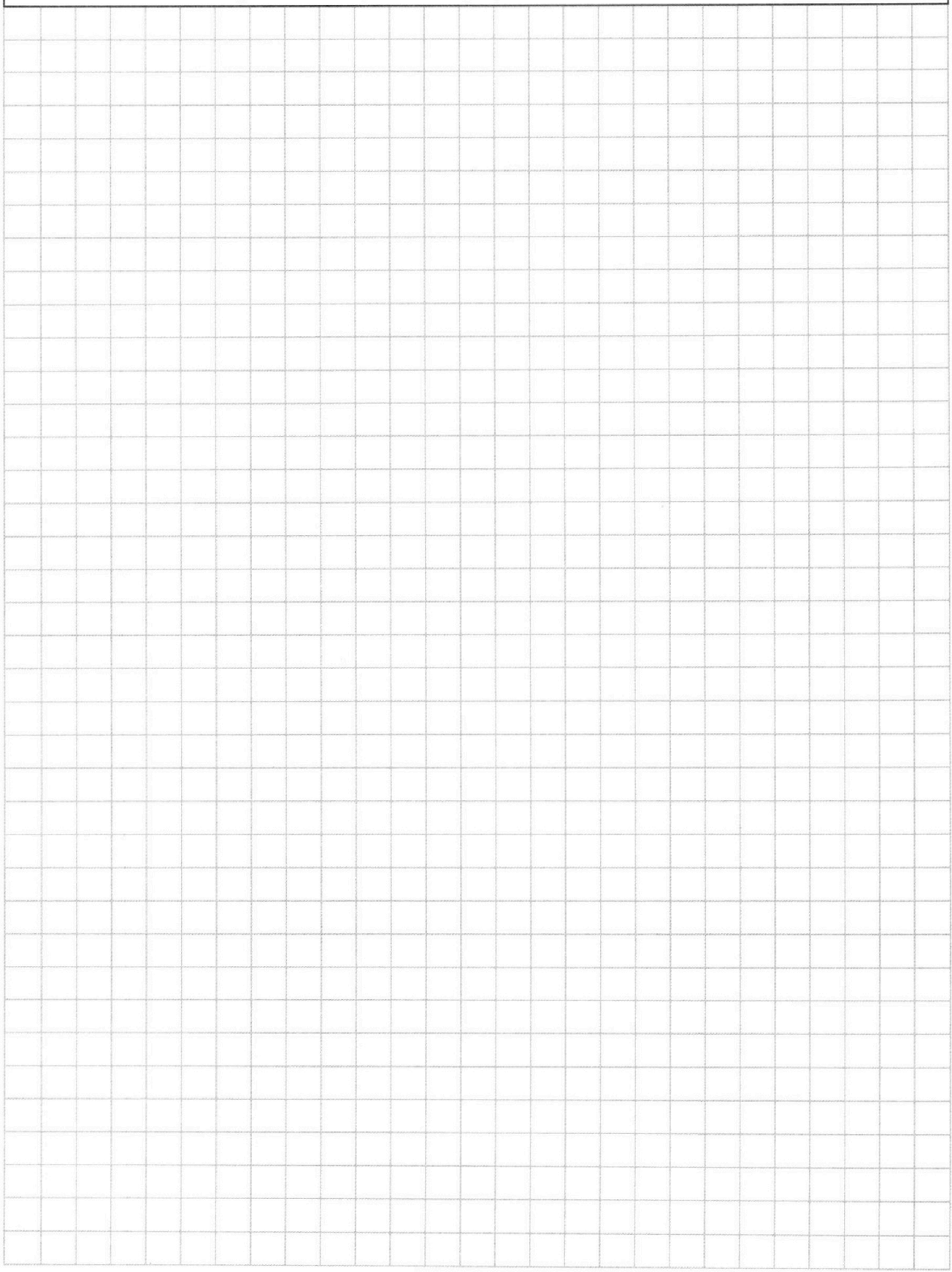
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

