



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{147^{13}}$ ,  $bc$  делится на  $3^{197^{17}}$ ,  $ac$  делится на  $3^{237^{42}}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже ~~велосипедиста~~ <sup>мотоциклиста</sup>. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$ab : 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc : 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 3^{23} \cdot 7^{42}$$

по условию, тогда:

$$ab \cdot bc \cdot ac : 3^{14+19+23} \cdot 7^{13+17+42}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 3^{56} \cdot 7^{72}$$

$$abc : 3^{28} \cdot 7^{36}$$

Наименьшее значение произведения  $abc$  мы получили, если  $abc$  не содержит других простых множителей, кроме 3 и 7, тогда наименьшее значение  $abc$ , удовлетворяющее условию:

$$\underline{3^{28} \cdot 7^{36}}$$

Ответ:  $3^{28} \cdot 7^{36}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2.

$\frac{a}{b}$  - несокращенная дробь  $\Rightarrow a$  и  $b$  - взаимно простые числа

$$a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} \quad m=?$$

$\Downarrow$   
Необходимо найти

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 9ab + b^2)$$

$$\frac{a+b}{(a+b)(a-b) - 9ab}$$

$$\frac{a^2 - 9ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b) - 9ab}{a+b} = a - b - \frac{9ab}{a+b}$$

Предположим, что остаток от деления  $a$  на  $m$  равен  $x$ , а остаток от деления  $b$  на  $m$  равен  $y$ , если

$$a+b : m \Rightarrow x+y : m, \text{ т.к. } x < m; y < m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y = m$$

$$a^2 - 9ab + b^2 : m \Rightarrow x^2 - 9xy + y^2 : m$$

$$\Downarrow$$
$$x^2 - 2xy + y^2 - 7xy : m$$

$$\cancel{x^2 - y^2}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 11xy : m$$

$$(x+y)^2 - 11xy : m$$

$$m^2 - 11xy : m \Rightarrow 11xy : m$$

$$\text{или так } x : m \Rightarrow y : m$$

$$\Rightarrow 11 : m \Rightarrow m = 1$$

$$\text{или } m = 11.$$

наибольшее возможное значение  $m = 11$ .

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Задача 5 (неоформлена)~~

$$216x^4 - 828x^3 + 1038x^2 - 505x + 75 = 0$$

$$\begin{array}{r} + 828 \\ 505 \\ \hline 1333 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 1038 \\ 75 \\ \hline 1113 \end{array}$$

Задача 3.

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\sqrt{3x^2 + x - 6x + 1 + 5} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\sqrt{3x^2 + x + 1 + (5 - 6x)} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\text{ОДЗ: } 3x^2 - 5x + 6 \geq 0; 3x^2 + x + 1 \geq 0$$

Положим

$$3x^2 + x + 1 = y$$

$$5 - 6x = z$$

Тогда:

$$\sqrt{y+z} - \sqrt{y} = z$$

$$\sqrt{y+z} = z + \sqrt{y} \quad (\text{обе части в квадрате})$$

$$y+z = z^2 + 2z\sqrt{y} + y$$

$$z - z^2 = 2z\sqrt{y} \quad (\text{обе части в квадрате})$$

$$z(1-z) = 2z\sqrt{y}$$

$$1-z = 2\sqrt{y}$$

$$1 - 2z + z^2 = 4y \quad \left. \begin{array}{l} \text{обе} \\ \text{части в} \\ \text{квадрате} \end{array} \right\}$$

$$1 - 2(5-6x) + (5-6x)^2 = 4(3x^2 + x + 1)$$

$$1 - 10 + 12x + 25 - 60x + 36x^2 = 12x^2 + 4x + 4$$

$$12 - 52x + 24x^2 = 0 \quad | :2$$

10  
10  
10  
10

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$24x^2 - 52x + 12 = 0 \quad | :2$$

$$12x^2 - 26x + 6 = 0 \quad | :2$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$D = 13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 97$$

169      24 | 72

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$$

$$\text{Ответ: } \frac{13 + \sqrt{97}}{12} ; \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2

$a, b$  - взаимно простые числа  
 $a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}$   
 $m$  - ?

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}$$

Задача 4.

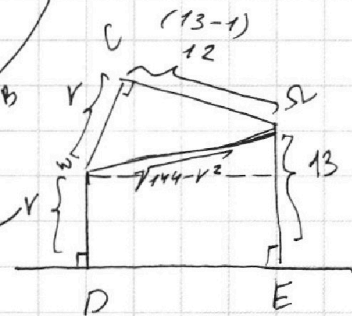
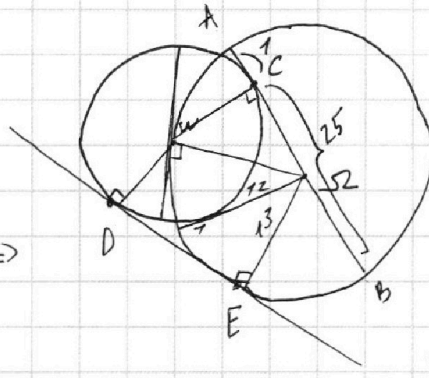
Дано:  $AC=1$   
 $BC=25$   
 $DE$  - ?

Из условия:

$$AB = 1 + 25 = 26 \Rightarrow$$

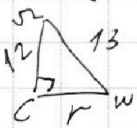
$$\Rightarrow R = \frac{26}{2} = 13$$

радиус  
окружности  $\Omega$



Т.к. в ~~дан~~ лежит  
на контуре окружности  
 $\Omega \Rightarrow$  геру точку  
и мы можем  
известить касательную  
к  $\Omega \Rightarrow$

$\Rightarrow$  рассмотрим  $\triangle WCS$ :



$$r = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ + 26 \\ \hline 5 \\ \hline 130 \\ 130 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 310 \\ - 130 \\ \hline 75 \end{array}$$

По теореме Пифагора:

$$DE = \sqrt{DS^2 - ES^2} =$$

$$= \sqrt{144 - r^2 - (13 - r)^2} =$$

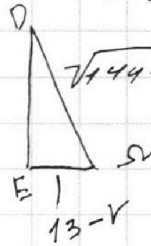
$$= \sqrt{144 - r^2 - 169 + 26r - r^2} = \sqrt{26r - 2r^2 - 25} =$$

$$= \sqrt{26 \cdot 5 - 2 \cdot 25 - 25} = \sqrt{130 - 50 - 25} =$$

$$= \sqrt{130 - 75} = \sqrt{55}$$

Ответ:  $\sqrt{55}$

$\triangle WSE$  - прямоуголь-  
ная трапеция



по  
теореме  
Пифагора

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \frac{x}{z} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$
$$\boxed{x = \frac{2}{3}z}$$
$$5 \cdot \frac{2}{3}z - 3z = y$$
$$\left(\frac{10}{3} - 3\right)z = y$$
$$\boxed{\frac{1}{3}z = y}$$
$$\frac{25 \cdot \frac{4}{9}z^2 - \frac{1}{9}z^2 - z^2}{\frac{1}{9}z^2 + 3z^2} =$$
$$= \frac{\frac{100}{9} - \frac{1}{9} - 1}{\frac{1}{9} + 3} = \frac{100 - 1 - 9}{9} = \frac{90}{9} = 10$$
$$= \frac{90}{28} = 3\frac{6}{28}$$

$$2) \frac{x}{z} = \frac{42}{150} = \frac{12}{25}$$
$$\boxed{x = \frac{12}{25}z}$$
$$5 \cdot \frac{12}{25}z - 3z = y$$
$$\frac{12}{5}z - 3z = y$$
$$2\frac{2}{5}z - 3z = y$$
$$\boxed{y = -\frac{3}{5}z}$$
$$\frac{25 \cdot \frac{144}{25}z^2 - \frac{9}{25}z^2 - z^2}{\frac{9}{25}z^2 + 3z^2} =$$
$$= \frac{\left(\frac{144}{25} - \frac{9}{25} - \frac{25}{25}\right)z^2}{\left(\frac{9}{25} + \frac{75}{25}\right)z^2} =$$
$$= \frac{144 - 9 - 25}{9 + 75} = \frac{110}{84} = 1\frac{26}{84}$$

$$3\frac{6}{28} > 1\frac{26}{84} \Rightarrow \text{наименьшее}$$

возможное значение  
вычитается  $1\frac{26}{84} =$

$$= 1\frac{13}{42}$$

Ответ:  $1\frac{13}{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5.

$$5x - y = 3z \quad ; \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{\frac{8}{x}}{75} + \frac{\frac{1}{y}}{45} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} \quad \text{min-?}$$

$$5x - 3z = y$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{5x - 3z} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{8(5x - 3z) + x}{x(5x - 3z)} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{40x - 24z + x}{5x^2 - 3zx} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{41x - 24z}{5x^2 - 3zx} = \frac{15}{z}$$

$$41xz - 24z^2 = 15 \cdot 5x^2 - 15 \cdot 3zx$$

$$(41 + 45)zx - 24z^2 - 75x^2 = 0$$

$$75x^2 - 86zx + 24z^2 = 0 \quad | : z^2$$

$$75\left(\frac{x}{z}\right)^2 - 86\frac{x}{z} + 24 = 0$$

$$D = 86^2 - 4 \cdot 75 \cdot 24 = 7396 - 7200 = 196 = 14^2$$

$$\frac{x}{z} = \frac{86 \pm 14}{2 \cdot 75}$$

$$\frac{8 \cdot 8}{25} = \frac{12}{25}$$

$$\begin{array}{r} 86 \\ + 86 \\ \hline 172 \\ + 172 \\ \hline 344 \\ + 344 \\ \hline 688 \\ + 688 \\ \hline 1376 \\ + 1376 \\ \hline 2752 \\ + 2752 \\ \hline 5504 \\ + 5504 \\ \hline 11008 \end{array}$$

$$\frac{28}{84} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{r} 145 \\ - 14 \\ \hline 131 \end{array}$$

$$\frac{25}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{100}{150}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{42}{150}$$

$$\begin{array}{r} 110 \\ - 84 \\ \hline 26 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(490 - 336 + 42) v_m + (6 - 10) v_m^2 - 2352 = 0$$

$$-4v_m^2 + 196v_m - 2352 = 0 \quad | : (-4)$$

$$v_m^2 - 49v_m + 588 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 588 =$$

$$= 2401 - 2352 = 49$$

$$v_m = \frac{49 \pm 7}{2}$$

$$v_{m1} = \frac{49 - 7}{2} = \frac{42}{2} = 21 \left( \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$$

$$v_{m2} = \frac{56}{2} = 28 \left( \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$$

Для  $v_{m1}$ :  $v_B = 49 - 21 = 28 \left( \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right) \Rightarrow v_B > v_m$  — противно условию

Для  $v_{m2}$ :  $v_B = 49 - 28 = 21 \left( \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right) \Rightarrow v_m > v_B$ .

$$\begin{array}{r} 21 \\ + 4 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$S = \frac{v_B v_m}{v_m - v_B} = \frac{28 \cdot 21}{28 - 21} = \frac{28 \cdot 21}{7} = 4 \cdot 21 = 84 \text{ (км)}$$

Ответ: 84 км.

$$\begin{array}{r} 49 \\ + 49 \\ \hline 98 \\ + 198 \\ \hline 296 \\ + 2401 \\ \hline 2697 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 196 \overline{) 49} \\ -16 \\ \hline 38 \\ -36 \\ \hline 20 \\ + 36 \\ \hline 56 \\ -55 \\ \hline 10 \\ + 8 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2352 \overline{) 4} \\ -20 \\ \hline 35 \\ -32 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \\ - 2352 \\ \hline 0049 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

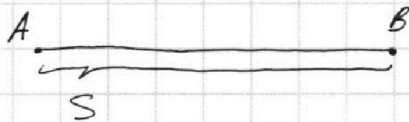
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6.



$v_B$  - скорость велосипедиста  
 $v_M$  - скорость мотоциклиста  
 $S = ?$

По условию!

$$\left. \begin{aligned} \frac{S}{v_M} + 1 &= \frac{S}{v_B} \quad (1) \\ \frac{S}{v_M} \cdot v_B + 49 &= \frac{S}{v_B} \cdot v_M \quad (2) \\ \frac{S}{v_M + 7} + \frac{36}{60} &= \frac{S}{v_B + 7} \quad (3) \end{aligned} \right\}$$

*1 час*  
*49 км*  
*7 км/ч*  
*36 мин*

Из (1):

$$S \left( \frac{1}{v_M} - \frac{1}{v_B} \right) = -1$$

$$S = \frac{1}{\frac{1}{v_B} - \frac{1}{v_M}}$$

$$S = \frac{1}{\frac{v_M - v_B}{v_B v_M}}$$

$$S = \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} \quad (4)$$

Из (2) и (4):

$$\frac{v_B}{v_M} \cdot \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} + 49 = \frac{v_M}{v_B} \cdot \frac{v_B v_M}{v_M - v_B}$$

$$\frac{v_B^2}{v_M - v_B} + 49 = \frac{v_M^2}{v_M - v_B} \quad | \cdot (v_M - v_B)$$

$$v_B^2 + 49(v_M - v_B) = v_M^2$$

$$v_B^2 + 49(v_M - v_B) - v_M^2 = 0$$

$$(v_B - v_M)(v_B + v_M) + 49(v_M - v_B) = 0$$

$$(v_B - v_M)(v_B + v_M) - 49(v_B - v_M) = 0$$

$$(v_B - v_M)(v_B + v_M - 49) = 0$$

$$v_B = v_M \quad \text{не удовл. усл.} \quad \text{или} \quad v_B = 49 - v_M \quad (5)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МОФИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ (3), (4), (5):

$$\frac{S}{\sqrt{m+7}} + \frac{36}{60} = \frac{S}{\sqrt{8+7}}$$

$$\frac{\sqrt{8}\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{m}+7)} + \frac{36}{60} = \frac{\sqrt{8}\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{8}+7)}$$

$$\frac{\sqrt{8}\sqrt{m}}{(\sqrt{m}-\sqrt{8})(\sqrt{m}+7)} - \frac{\sqrt{8}\sqrt{m}}{(\sqrt{m}-\sqrt{8})(\sqrt{8}+7)} = -\frac{36}{60}$$

$$\frac{\sqrt{8}\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{8}} \left( \frac{1}{\sqrt{m}+7} - \frac{1}{\sqrt{8}+7} \right) = -\frac{36}{60}$$

$$\frac{\sqrt{8}\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{8}} \left( \frac{\sqrt{8}+7 - \sqrt{m}-7}{(\sqrt{m}+7)(\sqrt{8}+7)} \right) = -\frac{36}{60}$$

$$\frac{\sqrt{8}\sqrt{m}(\sqrt{8}-\sqrt{m})}{(\sqrt{m}-\sqrt{8})(\sqrt{m}+7)(\sqrt{8}+7)} = -\frac{36}{60}$$

$$\frac{-\sqrt{8}\sqrt{m}}{(\sqrt{m}+7)(\sqrt{8}+7)} = -\frac{6}{10}$$

$$10\sqrt{8}\sqrt{m} = 6(\sqrt{m}+7)(\sqrt{8}+7)$$

$$10(49-\sqrt{m})\sqrt{m} = 6(\sqrt{m}+7)(49-\sqrt{m}+7)$$

$$10 \cdot (49\sqrt{m} - \sqrt{m}^2) = (6\sqrt{m} + 42)(56 - \sqrt{m})$$

$$490\sqrt{m} - 10\sqrt{m}^2 = 6 \cdot 56\sqrt{m} - 6\sqrt{m}^2 + 42 \cdot 56 - 42\sqrt{m}$$

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ 336 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ 42 \\ \hline + 112 \\ 224 \\ \hline + 112 \\ 224 \\ \hline 2352 \end{array}$$

$$\underline{490\sqrt{m} - 10\sqrt{m}^2} = \underline{336\sqrt{m} - 6\sqrt{m}^2} + \underline{2352 - 42\sqrt{m}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



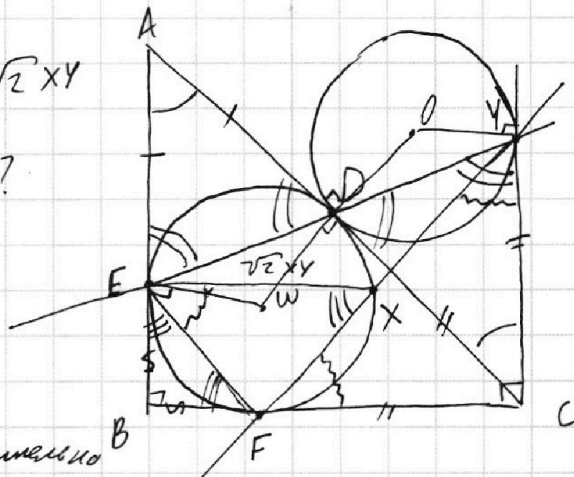
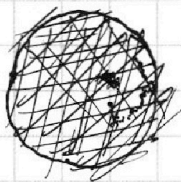
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7.

Доказано:  $EX = \sqrt{2} XY$

$AD:DC = ?$



Степень точки Y относительно окружности ω в точке B:  $DY \cdot YE = YX \cdot YF$  (1)

т.к. окружность ω вписана в  $\angle B$ :  $\angle DAE; \angle DCF; \angle EBF \Rightarrow$

$\Rightarrow AE = AD; DC = FC; BE = EF.$

$AB \parallel YC$ , т.к.  $AB \perp BC; YC \perp BC \Rightarrow \angle DAE = \angle ACY$ , как внутренние накрест лежащие, при  $AB \parallel YC$   
 $\angle ADE = \angle YDC$ , как вертикальные

$\Rightarrow \triangle EAD \sim \triangle DCY$  (по двум углам)  $\Rightarrow DC = CY$

т.к.  $DC = CY \Rightarrow$  окружность, вписанная в  $\angle DCY$  будет касаться сторон угла в точках D и Y.

~~Каждая из двух окружностей с центрами в точке O может встретиться с окружностью ω в какой-либо точке, которая будет вписана  $\Rightarrow$  т.к. окружности ω и ...~~

из (1):  $DY(DY + DE) = XY(XY + XF)$ , где  $\frac{DE}{DY} = \frac{AD}{DC}$

~~$XF = XE = \sqrt{2} XY$   
 $DY + DY + DE = XY + \sqrt{2} XY + \sqrt{2} XY$~~

$\angle XEF = \angle XFC$  (углы между хордой и касательной)

т.к.  $\triangle BEF$  - к/б  $\Rightarrow \angle FEB = \angle EFB = \angle EXF$  (из суммы углов  $\triangle$ )

$\frac{AD}{DC} = 1$   
 Ответ: 1

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

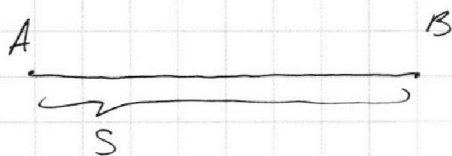
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6.



$v_m$  - скорость мотоциклиста  
 $v_B$  - скорость велосипедиста

$S = ?$

Условие:

$$\frac{S}{v_m} + 1 \text{ ч} = \frac{S}{v_B}$$

Получим систему из 3-х уравнений с тремя неизвестными:

$$\frac{S}{v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} + \frac{36}{60} \text{ ч} = \frac{S}{v_B + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}}$$

$$49 \text{ км} + \frac{S}{v_m} \cdot v_B = \frac{S}{v_B} \cdot v_m$$

$$\frac{S}{v_m} + 1 = \frac{S}{v_B} \quad (1)$$

$$\frac{S}{v_m + 7} + \frac{36}{60} = \frac{S}{v_B + 7} \quad (2)$$

$$\frac{S}{v_m} \cdot v_B + 49 = \frac{S}{v_B} \cdot v_m \quad (3)$$

Уг (1):

$$\frac{S}{v_m} - \frac{S}{v_B} = -1$$

$$S \left( \frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_B} \right) = -1$$

Уг (4) и (3)

$$\left( \frac{v_B v_m}{v_B - v_m} \right) \cdot \frac{v_B}{v_m} + 49 = \left( \frac{v_B v_m}{v_B - v_m} \right) \cdot \frac{v_m}{v_B}$$

$$S = \frac{1}{\frac{1}{v_B} - \frac{1}{v_m}}$$

$$S = \frac{1}{\frac{v_m - v_B}{v_B v_m}}$$

$$\frac{v_B^2}{v_B - v_m} + 49 = \frac{v_m^2}{v_B - v_m} \quad | \cdot (v_B - v_m)$$

$$S = \frac{v_B v_m}{v_B - v_m} \quad (4)$$

$$v_B^2 + 49v_B - 49v_m - v_m^2 = 0$$

$$(v_B - v_m)(v_B + v_m) + 49(v_B - v_m) = 0$$

$$(v_B - v_m)(v_B + v_m + 49) = 0$$

$$v_B = v_m \quad \text{или}$$



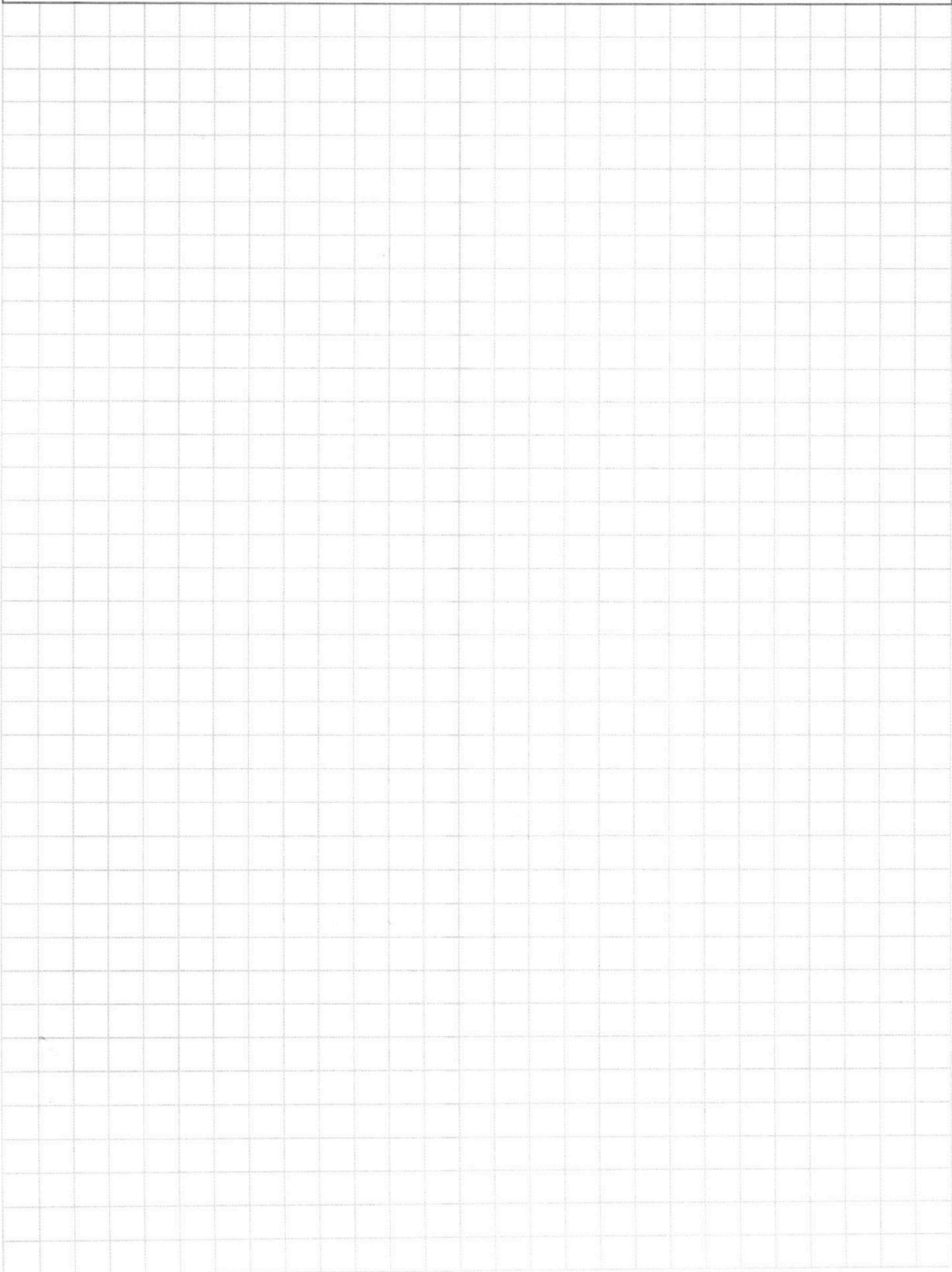
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \quad (\text{введем обе части в квадрат})$$

$$\text{РДЗ: } 3x^2 - 5x + 6 \geq 0 \quad 3x^2 + x + 1 \geq 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 6 < 0 \quad D = 1 - 4 \cdot 3 < 0$$

$$3x^2 - 5x + 6 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} + 3x^2 + x + 1 = 25 - 60x + 36x^2$$

$$+ 3x^2 + x + 1 = 25 - 60x + 36x^2$$

$$\underline{3x^2 - 5x + 6} + \underline{3x^2 + x + 1} - \underline{25 + 60x - 36x^2} =$$

$$= 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$-30x^2 + 56x - 18 = 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} \quad | :2$$

$$-15x^2 + 28x - 9 = \sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0}$$

введем обе части в квадрат

$$(-15x^2 + 28x - 9)^2 = (3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)$$

$$(-15x^2 + 28x - 9)(-15x^2 + 28x - 9) = 9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 15x^3 - 5x^2 - 5x +$$

$$+ 18x^2 + 6x + 6$$

$$15^2 x^4 - 15 \cdot 28 x^3 + 15 \cdot 9 x^2 - 15 \cdot 28 x^3 + 28^2 x^2 - 9 \cdot 28 x + 9 \cdot 15 x^2 -$$

$$- 9 \cdot 28 x + 81 = 9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$$

$$225x^4 - 840x^3 + (135 + 784 + 135)x^2 -$$

$$- 504x + 81 = 9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$$

$$\begin{array}{r} .10 \\ -225 \\ 9 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} .10 \\ -840 \\ 12 \\ \hline 828 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ +135 \\ 135 \\ +784 \\ \hline 1054 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} .10 \\ -1054 \\ 16 \\ \hline 1038 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ +28 \\ \times 15 \\ \hline +140 \\ 28 \\ \hline 4201 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ +15 \\ \times 28 \\ \hline +145 \\ 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ +15 \\ \times 28 \\ \hline +135 \\ 9 \\ \hline 13561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ +28 \\ \times 28 \\ \hline +224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1054 \\ -1038 \\ \hline 16 \end{array}$$