МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω.

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\dfrac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B, а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B.

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC, проходящую через вершину C, в точке Y; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω. Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

стр 1

$$\begin{cases} ab \vdots 3^{14}7^{13} \\ bc \vdots 3^{19}7^{17} \\ ac \vdots 3^{23}7^{42} \end{cases}$$

наименьшее возм. значение abc - ?

$ab \cdot bc \cdot ac \vdots 3^{14} \cdot 3^{19} \cdot 3^{23} \cdot 7^{13} \cdot 7^{17} \cdot 7^{42}$

$a^2b^2c^2 \vdots 3^{56} \cdot 7^{72}$, значит, т.к. $a^2b^2c^2 = (abc)^2$, то каждый делитель abc входит в $a^2b^2c^2$ дважды $\Rightarrow$

$\Rightarrow abc \vdots 3^{28} \cdot 7^{36}$

$abc \neq 0$, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow$ минимальное число $\vdots 3^{28} \cdot 7^{36}$ не равное 0 - это само число $3^{28} \cdot 7^{36} \Rightarrow$ Минимальное значение $abc = 3^{28} \cdot 7^{36}$.

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{36}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

стр 2

$\frac{a}{b}$ - несократимая дробь $\Rightarrow$ $(a;b)=1$

$a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$

$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ - дробь, записанная на доске

m - наибольшее число, на которое можно сократить и числитель, и знаменатель записанной дроби. Т.е. $(a+b; a^2-9ab+b^2)=m$

По св-ву НОД $(x;y)=$ НОД$(x;y-kx)$:

$(a+b; a^2-9ab+b^2)=(a+b; a^2-9ab+b^2-(a+b)^2)=(a+b; a^2-9ab+b^2-a^2-b^2-2ab)=$

$=(a+b; -11ab)=(a+b; 11ab)$

$(a+b; 11ab)=m$

Т.к. $(a;b)=1$, то

$\Rightarrow (a+b;b)=1$, $(a+b;a)=1$ значит $a+b$ и b взаимно просты и $a+b$ и a взаимно просты, тогда $a+b$ и ab тоже взаимно просты, т.к. в a и в b не входят никакие общие делители с $a+b$ кроме 1, т.к. значит в их произведение ab не будут входить никакие общие делители с $a+b$ кроме 1. ~~Т.о.~~ При этом $(a+b; 11ab)=m$. Значит, т.к. $(a+b; ab)=1$, то общий делитель m = либо 1, либо 11. В задаче просят найти максимальное, т.к. 11 - простое число.

$(a+b; 11ab)=$ искомое

~~м. тогда~~

кое m, следовательно $m=11$.

Ответ: $m=11$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

стр. 9

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x$$

$$3x^2-5x+6+3x^2+x+1-2\sqrt{3x^2-5x+6}\sqrt{3x^2+x+1}=25+36x^2-60x$$

$$6x^2-4x+7-2\sqrt{3x^2-5x+6}\sqrt{3x^2+x+1}=25+36x^2-60x$$

$$-2\sqrt{3x^2-5x+6}\sqrt{3x^2+x+1}=18+30x^2-56x$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6}\sqrt{3x^2+x+1}=-9-15x^2+28x$$

О.О.:

$$\begin{cases} 3x^2-5x+6\geq 0 & D=25-4\cdot3\cdot6=25-72<0 \Rightarrow \text{значение всегда } >0\text{, парабола не пересек. с } Ox \\ 3x^2+x+1\geq 0 & D=1-4\cdot3=-11<0 \Rightarrow \text{значение всегда } >0\text{, парабола не пересек. с } Ox \\ -9-15x^2+28x\geq 0 & D=28^2-4\cdot15\cdot9=4(7\cdot28-15\cdot9)=4(196-135)=4\cdot61>0 \end{cases}$$

$$28\cdot7=196$$

$$-15\left(x-\frac{28-2\sqrt{61}}{-30}\right)\left(x+\frac{28-2\sqrt{61}}{-30}\right)\geq 0$$

$$\left(\frac{28+2\sqrt{61}}{30}-x\right)\left(x+\frac{28+2\sqrt{61}}{30}\right)\geq 0$$

$$\begin{array}{ccccc} + & - & + & - & \\ & -\frac{\cancel{28}^{14}+2\sqrt{61}}{\cancel{30}\,15} & & \frac{\cancel{28}^{14}+2\sqrt{61}}{\cancel{30}\,15} & \end{array}$$

$$x\in\left[-\frac{14+\sqrt{61}}{15};\ \frac{14+\sqrt{61}}{15}\right]$$

$$(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)=(-9-15x^2+28x)^2$$

$$9x^4-15x^3+18x^2+3x^3-5x^2+6x+3x^2-5x+6=(-9-15x^2+28x)^2$$

$$9x^4-15x^3+16x^2+3x^3+x+6=(28x-15x^2-9)^2$$

$$9x^4-12x^3+16x^2+x+6=(28x-15x^2-9)^2$$

$$9x^4-12x^3+16x^2+x+6=28^2x^2+(15x^2+9)^2-2\cdot28x(15x^2+9)$$

$$9x^4-12x^3+16x^2+x+6=28^2x^2+15^2x^{16}$$

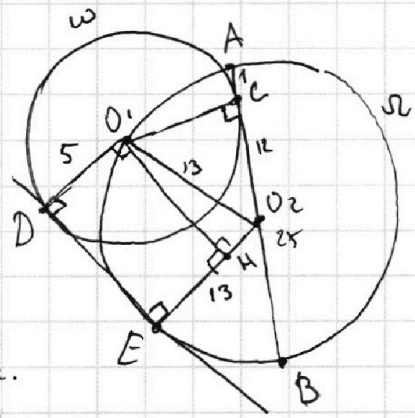
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

стр. 8



DE – длина общ. кас.

D – точка кас. к ω и общ. кас. к ω и Ω

E – точка кас. к ω и Ω и общ. кас. к ω и Ω

т.к. AB кас. ω в т. C

Т.к. т. A, C, B лежат на одной прямой и AB – диаметр, и $AC=1$, $BC=25$, то радиус Ω равен $\frac{25+1}{2}=13$.

O_1 – центр ω

O_2 – центр Ω

$O_1O_2 = 13$, т.к. O_1 лежит на Ω, значит O_1O_2 – радиус.

$O_2C = O_2A - AC$

O_2A – радиус

$O_2C = 13-1=12$

Т.к. $\angle O_1CO_2$ – прямой, то можно записать т. Пифагора для $\triangle O_1CO_2$:

$O_1O_2^2 = O_1C^2 + CO_2^2$ $\quad 13^2 = O_1C^2 + 144$ $\quad O_1C^2 = 169-144$

$\Rightarrow O_1C^2 = 25 \Rightarrow O_1C = 5$, O_1C – радиус ω $\Rightarrow$ радиус ω $= 5$.

Проведём высоту O_1H на O_2E. Т.к. DE – касательные, то $DE \perp DO_1$ и $DE \perp O_2E$. После того, как провели O_1H образовался прямоугольник DO_1HE, т.к. 3 угла прямые, и $O_1D \parallel O_2E$, т.к. $O_1D \perp DE$ и $O_2E \perp DE$, то все 4 угла прямые в этом четырёхугольнике, следовательно он прямоугольник.

Тогда $EH = O_1D$. Тогда $EO_2 = O_2H + EH$, $O_2H = EO_2 - EH = EO_2 - O_1D$,

$O_2H = 13-5 = 8$. Запишем т. Пифагора для прямоуг. $\triangle HO_1O_2$:

$O_1O_2^2 = O_1H^2 + HO_2^2$ $\quad 169 = O_1H^2 + 64$ $\quad O_1H^2 = 105$

$O_1H = \sqrt{105}$

Т.к. O_1DEH – прямоугольник, противоп. сторны равны $\Rightarrow DE = O_1H = \sqrt{105}$.

Ответ: $\sqrt{105}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

стр 4

$$\begin{array}{r} 45 \\ \cdot\ 3 \\ \hline 135 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \cdot\ 3 \\ \hline 84 \end{array}$$

а) $x = 2y$

$z = \frac{5x-y}{3}$

$z = \frac{10y-y}{3} = 3y$

$$\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2} = \frac{25\cdot 4y^2-y^2-9y^2}{y^2+3\cdot 9y^2} = \frac{100y^2-10y^2}{28y^2} = \frac{90}{28} = \frac{45}{14} =$$

$= 3\frac{3}{14}$

б) $x = -0{,}8y$ из $z = \frac{5x-y}{3}$

$z = \frac{-4y-y}{3} = -\frac{5}{3}y$

$$\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2} = \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot 25y^2-y^2-\frac{5\cdot 5}{3\cdot 3}y^2}{y^2+3\cdot\frac{5\cdot 5}{3\cdot 3}y^2} =$$

сократим на y^2

$$= \frac{16y^2-y^2-\frac{25}{9}y^2}{y^2+\frac{25}{3}y^2} = \frac{16-1-\frac{25}{9}}{1+\frac{25}{3}} = \frac{15-\frac{25}{9}}{1+\frac{25}{3}} = \frac{45-\frac{25}{3}}{3+25} =$$

$$= \frac{45-\frac{25}{3}}{28} = \frac{45\cdot 3-25}{28\cdot 3} = \frac{135-25}{28\cdot 3} = \frac{110}{84} = \frac{55}{42} = 1\frac{13}{42}$$

$1\frac{13}{42} < 3\frac{3}{14}$, следовательно наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ равно $1\frac{13}{42}$.

Ответ: $1\frac{13}{42}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

стр 3

~~5x-8y=3z~~ $x, y, z \neq 0$ ⇒ Мы можем ~~делать~~ сокращать на x, y, z.

$$\begin{cases} 5x - y = 3z \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{5x-y}{3} \\ \frac{8yz + xz - 15xy}{xyz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{5x-y}{3} \\ 8yz + xz - 15xy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{5x-y}{3} \\ z(8y+x) = 15xy \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{5x-y}{3} \\ z = \frac{15xy}{8y+x} \end{cases}$$

$$\frac{5x-y}{3} = \frac{15xy}{8y+x}$$

$$(5x-y)(8y+x) = 45xy$$

$$40xy + 5x^2 - 8y^2 - yx = 45xy$$

$$5x^2 - 8y^2 - 6yx = 0$$

Выразим x через y.

$$D = 36y^2 + 4 \cdot 5 \cdot 8y^2 = 36y^2 + 160y^2 = 196y^2$$

~~то есть такие x, что $D \geq 0$ ⇒ $196y^2 \geq 0$ ⇒ $y \geq 0$~~

1) $y \geq 0$

$$x_1 = \frac{6y + \sqrt{196y^2}}{10} = \frac{6y + 14y}{10} = 2y$$

$$x_2 = \frac{6y - \sqrt{196y^2}}{10} = \frac{6y - 14y}{10} = -0{,}8y$$

2) $y < 0$

$$x_3 = \frac{6y + \sqrt{196y^2}}{10} = \frac{6y + |14y|}{10} = \frac{6y - 14y}{10} = -0{,}8y$$

$$x_4 = \frac{6y - \sqrt{196y^2}}{10} = \frac{6y - |14y|}{10} = \frac{6y + 14y}{10} = 2y$$

Следовательно x через y выражается 2 ~~способа~~ вариантами:

$$\left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = -0{,}8y \end{array}\right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

стр. 6

~~Подставим полученные выражения (1) и (2) во $S_{AB} = \frac{V_A - V_B}{V_A - V_B}$ и получим~~

~~дай то, что получилось~~ во (2):

$$\cancel{S_{AB} = \frac{(49 - V_B)\, V_B}{49 - 2V_B}}$$

Подставим в S_{AB} и во (2):

$$\frac{V_B(49 - V_B)}{(49 - 2V_B)(49 + 7 - V_B)} + \frac{3}{5} = \frac{V_B(49 - V_B)}{(49 - 2V_B)(V_B + 7)}$$

$$\frac{V_B(49 - V_B)}{(49 - 2V_B)}\left(\frac{1}{56 - V_B} - \frac{1}{V_B + 7}\right) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{V_B(49 - V_B)}{49 - 2V_B}\left(\frac{V_B + 7 - 56 + V_B}{(56 - V_B)(V_B + 7)}\right) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{V_B(49 - V_B)(2V_B - 49)}{(49 - 2V_B)(56 - V_B)(V_B + 7)} = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{V_B(49 - V_B)}{(56 - V_B)(V_B + 7)} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{49V_B - V_B^2}{56V_B + 56 \cdot 7 - V_B^2 - 7V_B} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{49V_B - V_B^2}{49V_B + 56 \cdot 7 - V_B^2} = \frac{3}{5}$$

$$5 \cdot 49V_B - 5V_B^2 = 3 \cdot 49V_B + 3 \cdot 56 \cdot 7 - 3V_B^2$$

$$\cancel{2V_B^2 + 3 \cdot 49V_B}$$

$$2V_B^2 - 2 \cdot 49V_B + 3 \cdot 56 \cdot 7 = 0$$

$$V_B^2 - 49V_B + 3 \cdot 28 \cdot 7 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 3 \cdot 28 \cdot 7$$

$$D = 7^2(7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4)$$

$$D = 7^2(49 - 48) = 7^2$$

$$V_{B_1} = \frac{49 + 7}{2} = 28$$

$$V_{B_2} = \frac{49 - 7}{2} = 21$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

стр. 7

1) $V_B = 28$; тогда $V_M = 49 - 28 = 21$

Но $\cancel{S_{AB}\left(\frac{V_M - V_B}{V_A V_B}\right)}$ $S_{AB} = \frac{V_M V_B}{V_M - V_B}$, если

$V_M < V_B$, но при этом $V_M \geq 0$, $V_B > 0$, то

$S_{AB} < 0$, а такого быть не может. Тогда $V_B = 28$ не

подходит, т.к. $V_M > V_B$.

2) $V_B = 21$, тогда $V_M = 49 - 21 = 28$

$S_{AB} = \frac{21 \cdot 28}{28 - 21} = \frac{21 \cdot 28}{7} = 4 \cdot 21 = 84$ => расстояние между пунктами A и B = 84 км

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Пусть V_M — скорость, с которой мотоциклист ехал на самом деле.~~

Пусть скорость, с которой ехал мотоциклист — V_M.
Пусть скорость, с которой ехал велосипедист — V_B.

Пусть S_{AB} — расстояние между пунктами A и B.

Запишем ур-ния, которые следуют из условия (без единиц измерения, мы ~~переведем их~~ заранее переведём то, что нужно, чтобы ответ получился в км, а скорости в км/ч).

П.о. $36\text{ мин} = \frac{36}{60}\text{ ч} = \frac{6}{10}\text{ ч} = \frac{3}{5}\text{ ч}$

$$\begin{cases} \frac{S_{AB}}{V_M} + 1 = \frac{S_{AB}}{V_B} \quad (1) \\ \frac{S_{AB}}{V_M+7} + \frac{3}{5} = \frac{S_{AB}}{V_B+7} \quad (2) \\ \left(\frac{S_{AB}}{V_M} + 1\text{ ч}\right)V_M - \frac{S_{AB}}{V_M}V_B = 49 \quad (3) \end{cases}$$

(1) — т.к. мотоциклист прибыл на 1 ч. раньше

(2) — т.к. если сделать их скорости на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы позже, чем мотоциклист на $\frac{3}{5}$ ч.

(3) — т.к. если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что потребовалось мотоцикл. на дорогу от A к B, а мотоциклист — в течение того времени, что потребовалось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист ~~не~~ проехал на 49 км больше

Выразим S_{AB} из (1):

$$S_{AB}\left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_M}\right) = 1$$

$$S_{AB}\left(\frac{V_M - V_B}{V_M V_B}\right) = 1$$

— другая $V_M - V_B \neq 0$, в выраж. $V_M - V_B$ можно сокр.

$$S_{AB} = \frac{V_M V_B}{V_M - V_B}$$

Теперь подставим получ. выражение в (3)

$$\left(\frac{V_B}{V_M - V_B} + 1\right)V_M - \frac{V_B}{V_M - V_B}\cdot V_B = 49$$

$$\frac{V_B V_M}{V_M - V_B} + V_M - \frac{V_B^2}{V_M - V_B} = 49$$

$$\frac{\cancel{V_B V_M} + V_M^2 - \cancel{V_B V_M} - V_B^2}{V_M - V_B} = 49$$

$$\frac{\cancel{(V_M - V_B)}(V_M + V_B)}{\cancel{V_M - V_B}} = 49$$

$$V_M = 49 - V_B$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

стр. 13

Сумма корней DF должна быть равна и 6(1) и 60(2):

x_1+x_2 $\quad ax^2+bx+c=0$ на трёхчл.

$\cancel{DD_1+DF_2} = -\frac{b}{2a}$ — по т. Виета

~~DD~~ 3. $(\sqrt{5}XY-DY)^2+DF^2-\sqrt{2}(\sqrt{5}XY-DY)DF = 2XY^2+$

$+(\sqrt{\frac{5}{2}}DF-XY)^2-\sqrt{2}EX(\sqrt{\frac{5}{2}}DF-XY)$

$(\sqrt{5}XY-DY)^2+\underline{DF^2}-\sqrt{10}XY+\underline{\sqrt{2}DYDF} = 2XY^2+$

$+\underline{\frac{5}{2}DF^2}-\underline{2\sqrt{\frac{5}{2}}DFXY}+XY^2-\underline{\sqrt{5}EXDF}+\sqrt{2}EXXY$

$-(\sqrt{5}XY-DY)^2+\sqrt{10}XY+2XY^2+XY^2+\sqrt{2}EXXY+$

$+\cancel{\frac{5}{2}DF}+1{,}5DF^2-2\sqrt{\frac{5}{2}}DFXY-\sqrt{2}DYDF-\sqrt{5}EXDF=0$

$-(\sqrt{5}XY-DY)^2+\sqrt{10}XY+2XY^2+XY^2+\sqrt{2}EXXY+$

$+1{,}5DF^2+DF\left(-\left(2\sqrt{\frac{5}{2}}XY+\sqrt{2}DY+\sqrt{5}EX\right)\right)=0$

$-\frac{b}{2a}=\frac{2\sqrt{\frac{5}{2}}XY+\sqrt{2}DY+\sqrt{5}EX}{3}=\frac{2\sqrt{\frac{5}{2}}XY+\sqrt{2}DY+\sqrt{10}XY}{3}=$

$=\frac{2\sqrt{10}XY+\sqrt{2}DY}{3}$

Теперь из (2): $\cancel{-\frac{b}{2a_1}=}$ $\quad 1{,}5DF^2-DY-\sqrt{2}DYDF=0$

$-\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{2}DY}{3}$

$\frac{\sqrt{2}DY}{3}=\frac{2\sqrt{10}XY+\sqrt{2}DY}{3}$ $\quad \sqrt{2}DY=2\sqrt{10}XY+\sqrt{2}DY$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

стр. 11

$\angle EXY = 180^\circ - \angle EXF = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Запишем т. кос. для $\triangle EXY$:

$EX = \sqrt{2}XY$

$EY^2 = EX^2 + XY^2 - 2\cos 135^\circ \cdot EX \cdot XY$

$EY^2 = EX^2 + XY^2 + 2\cos 45^\circ \cdot EX \cdot XY$

$EY^2 = \cancel{EX^2} + 2XY^2 + XY^2 + \cancel{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}\, XY \cdot XY}\ 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}\, XY \cdot XY$

$EY^2 = 2XY^2 + XY^2 + 2XY^2 = 5XY^2$

$EY^2 = 5XY^2$

$EY = \sqrt{5}\, XY$

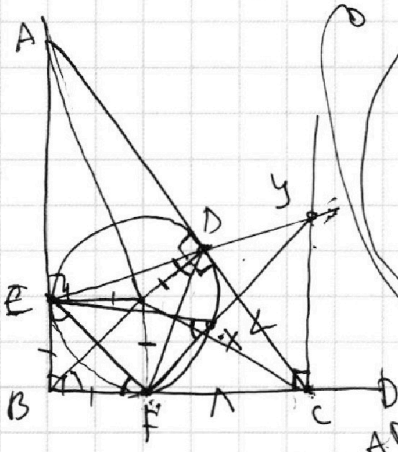
$EA \parallel YC$, $\angle ADE = \angle CDY \Rightarrow \triangle EDA \sim \triangle YDC$ по 3 углам, т.к. $EA \parallel YC$, то $\angle DYC = \angle DEA$ и $\angle EAD = \angle DCY$.

Т.о. $\frac{ED}{DY} = \frac{AD}{DC}$, т.е. чтобы найти $\frac{AD}{DC}$ нужно найти $\frac{ED}{DY}$.

$ED + DY = EY$

$ED + DY = \sqrt{5}\, XY$

$\triangle EYX \sim \triangle FYD$ по 3 углам, $\angle DEX = \angle DFX$, т.к. опт вмис. и смотрят на одну дугу



Т.о.

$\frac{AD}{DC} = \frac{EA}{FC}$.

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$(x + EA)^2 +$

$DC = FC$

$AD = AE$,

т.к. центр на биссектрисе в стороне AD, DC, AC - окр.

$\angle EYF$ - общий. Т.к.о. $\frac{EY}{FY} = \frac{EX}{DF}$ $\frac{ED + DY}{FY} = \frac{\sqrt{5}\, XY}{FY} = \frac{\sqrt{2}\, XY}{DF}$

$\frac{FY}{DF} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

Т.к. кос. для $\triangle EFX$:

$EF^2 = EX^2 + FX^2 - 2\cos 45^\circ \cdot EX \cdot FX$

$EF^2 = 2XY^2 + FX^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}\, XY \cdot FX$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

стр. 12

Т. кос. для $\triangle FDY$: $FY^2 = DF^2 + DY^2 - 2\cos 135^\circ \cdot DY DF$

$$FY^2 = DF^2 + DY^2 + \sqrt{2}\, DY DF$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} DF\right)^2 = DF^2 + DY^2 + \sqrt{2}\, DY DF$$

$$2{,}5\, DF^2 = DF^2 + DY^2 + \sqrt{2}\, DY DF$$

$$1{,}5\, DF^2 = DY^2 + \sqrt{2}\, DY DF$$

Т. кос. для $\triangle EDF$:

$$EF^2 = ED^2 + DF^2 - 2\cos 45^\circ \cdot ED DF$$

Т. кос. для $\triangle EXF$:

$$EF^2 = EX^2 + FX^2 - 2\cos 45^\circ \cdot EX \cdot FX$$

$$\begin{cases} ED^2 + DF^2 - 2\cos 45^\circ \cdot ED DF = EX^2 + FX^2 - 2\cos 45^\circ EX FX \\ 1{,}5\, DF^2 = DY + \sqrt{2}\, DY DF \\ ED + DY = \sqrt{5}\, XY \end{cases}$$

$$ED^2 + DF^2 - 2\sqrt{2}\, ED DF = 2\, XY^2 + (FY - XY)^2 - 2\cos 45^\circ EX \cdot (FY - XY)$$

$$\begin{cases} ED^2 + DF^2 - \sqrt{2}\, ED DF = 2XY^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}} DF - XY\right)^2 - 2\cos 45^\circ \cdot EX \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2}} DF - XY\right) \\ 1{,}5\, DF^2 = DY + \sqrt{2}\, DY DF \end{cases}$$

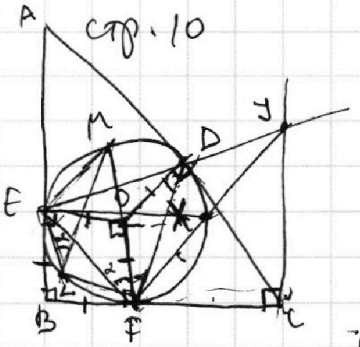
$$\begin{cases} \left(\sqrt{5}\, XY - DY\right)^2 + DF^2 - \sqrt{2}\left(\sqrt{5}\, XY - DY\right) DF = 2XY^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}} DF - XY\right)^2 - \sqrt{2} \cdot EX \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2}} DF - XY\right) \\ 1{,}5\, DF^2 = DY + \sqrt{2}\, DY DF \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$EX = \sqrt{2}\,XY$

O – центр впис. окр.

$\angle FDY + \angle EDF = 180°$, т.к. они смежные.

$\angle EDF$ – вписанный, ~~смотрит на дугу меньшую дуги EF.~~

~~Смотрит на EF (с $\angle EFC = 180° - \angle EDF$, т.к.~~

Выберем на меньшей дуге EF точку L так, чтобы $\angle ELF$ опирался на большую дугу EF.

Проведём FO до пересеч. с окружностью в точке M.

$\angle FLM = 90°$, т.к. смотрит на диаметр MF. $\angle ELM = \angle LFM = \alpha$, т.к. они опираются на одну дугу. $\angle EFC = \alpha + 90°$, т.к. $OF \perp BC$, т.к. BC кас. окр. в точке F. $\angle ELF = \alpha + 90°$, т.к. $\angle ELF = \angle ELM + \angle MLF$. Т.о. $\angle EFC = \angle ELF$, при этом $\angle ELF = 180° - \angle EDF$, т.к. ELFD – впис. четырёхугольник. Получается, что

$\angle FDY = \angle EFC$, значит $\angle EFB = \angle EDF$.

Т.к. $OE \perp AB$, $OF \perp BC$, $\angle ABC = 90°$, то EOFB – прямоугольник. Т.к. $EO = OF$, то EOFB – квадрат. Тогда $EB = BF$. Тогда

$\angle EFB = 90 - \frac{180-90}{2} = 45°$. Тогда $\angle EDF = 45°$.

$\angle EXF$ опирается на ту же дугу, что и $\angle EDF$ – впис. и $\Rightarrow$ $\angle EXF = \angle EDF = 45°$.

~~$\angle EXF = \angle DEX + \angle DFX$~~ $\angle DEX = \angle DFX$, т.к. они впис. и опираются на одну дугу

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} =$

Черновик

$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$

$\begin{cases} 8zy + xz - 15xy = 0 \\ 5x - y = 3z \end{cases}$

$z(8y+x) = 15xy$

$z = \frac{5x-y}{3}$

$\frac{5x-y}{3} = \frac{15xy}{8y+x}$

$(8y+x)(5x-y) = 45xy$

$\cancel{40xy} - 8y^2 + 5x^2 \cancel{-5xy} = \cancel{38}\,xy$

$5x^2 - 8y^2 = 6xy$

$5x^2 - 8y^2 - 6xy = 0$

$D = 36y^2 + 4\cdot 5\cdot 8y^2 = 196y^2$

$x_1 = \frac{6y - 14y}{10} = -0{,}8y$

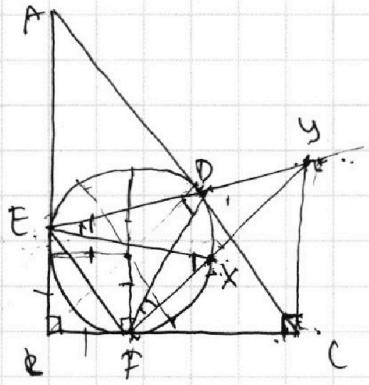
$x_2 = \frac{6y + 14y}{10} = 2y$

1) $x = 2y$

$10y - y = 3z$

$9y = 3z \quad z = 3y$

$\cancel{\frac{8}{2y} + \frac{1}{y}} = \frac{8}{2y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{3y}$



$EX = \sqrt{2}xy$

$EY = \cancel{2x^2} + 2xy^2 + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}xy$

$y \geq 0$

$EY^2 = 5xy^2$

$EY = \sqrt{5}xy$

$\frac{25x^2 - y^2 - \cancel{z}}{y^2 + 3z^2} =$

$= \frac{25\cdot 4y^2 - y^2 - 9y^2}{y^2 + 3\cdot 9y^2} =$

$= \frac{100y^2 - 10y^2}{28y^2} = \frac{90}{28} = \frac{45}{14}$

$\frac{8}{2} + 1 = 5$

$4 + 1 = 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$$

О.О.: $\begin{cases} 3x^2-5x+6 \geq 0 \\ 3x^2+x+1 \geq 0 \end{cases}$, т.к. выражения стоят под корнем

область определения

~~Возведём обе части в квадрат, при этом запишем~~

Возведём обе части в квадрат.

$$3x^2-5x+6+3x^2+x+1-2\sqrt{3x^2-5x+6}\cdot\sqrt{3x^2+x+1}=(5-6x)^2$$

$$6x^2-4x+7-2\sqrt{3x^2-5x+6}\cdot\sqrt{3x^2+x+1}=25+36x^2-60x$$

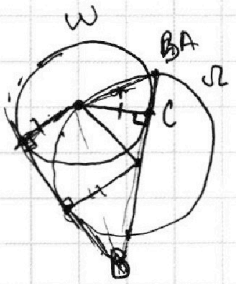
$$-2\sqrt{3x^2-5x+6}\sqrt{3x^2+x+1}=18+30x^2-56x$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6}\sqrt{3x^2+x+1}=28x-15x^2-9$$

О.О.: $28x-15x^2-9 \geq 0$

Черновик

велосипедист
приехал позже мотоциклиста



$AC=1$

$BC=25$

$$\begin{cases} 5x-y=3z \\ \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z} \end{cases}$$

$$\frac{15zx+3zy-z^2}{y^2+3z^2}$$

$$\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$$

$$\frac{3z(5x+y)-z^2}{y^2+3z^2}$$

$$\frac{(5x-y)(5x+y)-z^2}{y^2+3z^2}$$

$$\frac{8y+x}{xy}=\frac{15}{z} \qquad \frac{8yz+xz-15xy}{xyz}=0$$

$$2(8y+x)=15xy$$

$$\frac{8yz+xz-15xy}{xyz}=0$$

$$8yz+xz=15xy; \quad z=\frac{15xy}{8y+x}$$

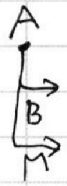
$$15\,\frac{15xy}{8y+x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



B

$t_M + 14 = t_B$

$(t_M + 14)V_M - t_M \cdot V_B = 49$ км

$V_M + 7$

$V_B + 7$

$$\frac{S_{AB}}{(V_M+7)} + \frac{36}{60} = \frac{S_{AB}}{V_B+7}$$

$$\begin{cases} \frac{S_{AB}}{V_M} + 14 = \frac{S_{AB}}{V_B} \\ \frac{S_{AB}}{V_M+7} + \frac{36}{60}4 = \frac{S_{AB}}{V_B+7} \\ \left(\frac{S_{AB}}{V_M} + 14\right)V_M - \frac{S_{AB}}{V_M} \cdot V_B = 49 \text{ км} \end{cases}$$

Черновик

S_{AB} – ?

$$S_{AB}\left(\frac{1}{V_M} - \frac{1}{V_B}\right) = -14$$

$$S_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_M}} = \frac{V_B V_M}{V_M - V_B}$$

$$\frac{V_B V_M}{V_M - V_B} + V_M - \frac{V_B^2}{V_M - V_B} = 49$$

$$\frac{V_B V_M - V_B^2 + V_M^2 - V_B V_M}{V_M - V_B} = 49$$

$$\frac{(V_B V_M)(V_M - V_B)}{V_M + 7} + \frac{36}{60} = \frac{V_B V_M}{(V_M - V_B)(V_B + 7)}$$

$$\frac{(V_M - V_B)(V_M + V_B)}{V_M - V_B} = 49$$

$V_B V_M$

$$\left(\frac{V_B}{V_M - V_B} + 14\right)V_M - \frac{V_B V_B}{V_M - V_B}$$

$V_M + V_B = 49$

$V_M = V_B - 49$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{t} - \sqrt{t-a} = a$

$t + t - a - 2\sqrt{t^2 - ta} = a$

$-2\sqrt{t^2 - ta} = 2a - 2t$

$\sqrt{t^2 - ta} = t - a$

$t^2 - ta = t^2 - 2ta + a^2 - ta$

$a^2 = ta$

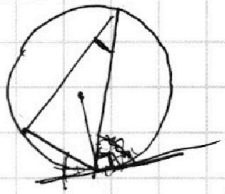
$a = t$

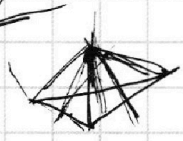
~~В ~~17 + 5 + 9 + 6~~

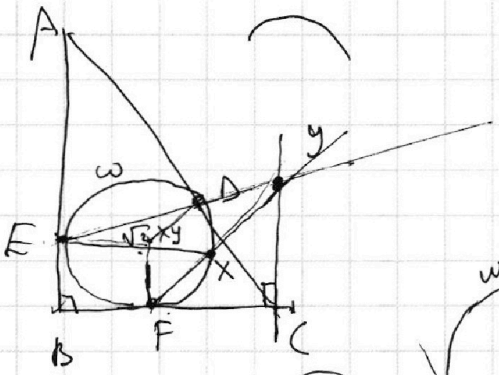
~~17 + 15~~

~~15 ~~32~~~

~~плохо~~



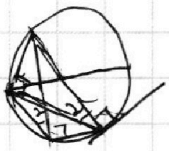


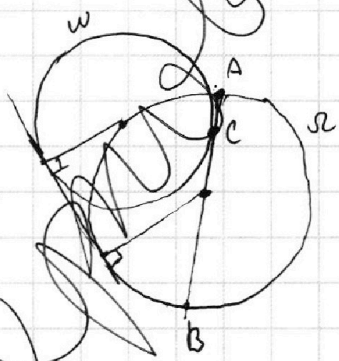


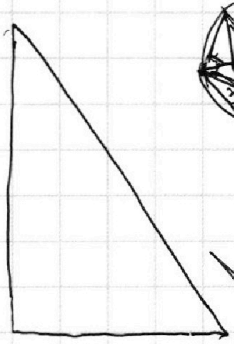
AB-диаметр

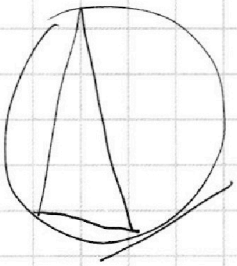
AC=1

BC=2T

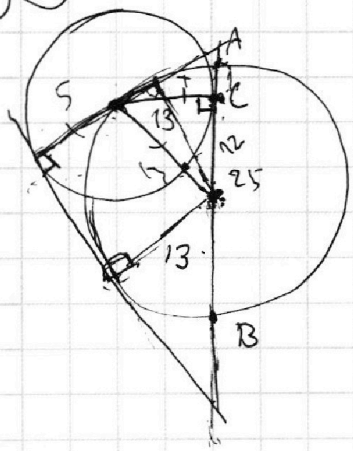






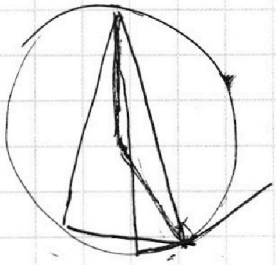


$\sqrt{}$



X =

169-144



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

ЧЕРНОВИК в этой странице

$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$

$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2-5x+6+6x-5} = 5-6x$

$3x^2-5x+6+3x^2-5x+6+6x-5 = (5-6x)^2 + 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2-5x+6+6x-5)}$

$6x^2 - 10x + 12 + 6x - 5 = (6x-5)^2 + 2\sqrt{\ldots}$

$6x^2 - 4x + 7 = 36x^2 + 25 - 60x + 2\sqrt{\ldots}$

$-56x + 7 - 25 = -30x^2 = 2\sqrt{\ldots}$

$3x^2-5x+6+3x^2+x+1 - 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)} = (5-6x)^2$

$6x^2-4x+7 - 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)} = 25+36x^2-60x$

$18+30x^2-56x =$

$-2\sqrt{\ldots}$

$28x-15x^2-9 = 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)}$

$28x-15x^2-9 = \sqrt{9x^4+3x^3+3x^2-15x^3-5x^2-5x+18x^2+6x+6}$

$28x-15x^2-9 = \sqrt{-10x^2-12x^3+9x^4+x+6}$

$28x-15x^2-9 = \sqrt{-3x^3(3x-4)+x(1-10x)+6}$

$(28x-15x^2-9)^2 = -10x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$

Произведём 2 замены:

Пусть $3x^2-5x+6=t$, $t \geq 0$, ~~[illegible]~~

. Пусть $5-6x=a$, ~~[illegible]~~

Тогда: т.к. $\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2-5x+6+6x-5} = 5-6x$, зам то

$\sqrt{t} - \sqrt{t-a} = a$

Возведём обе части в квадрат, при этом нужно помнить, что

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t-a \geq 0 \end{cases}$$

Таким образом $t+t-a-2\sqrt{t}\sqrt{t-a} = a^2$

$-2\sqrt{t}\sqrt{t-a} = a^2+a-2t$

$2\sqrt{t}\sqrt{t-a} = 2t-a^2-a$ $\quad 2t-a^2-a \geq 0$

$4t(t-a) = (2t-a^2-a)^2$

$4t^2-4ta = 4t^2+(a^2+a)^2-2\cdot 2t\cdot(a^2+a)$

$\cancel{4t^2} - 4t^2 + \cancel{4ta} + a^4+a^2+2a^2a - 4ta^2 - \cancel{4at} = 0$

$4t^2+a^4+a^2+2a^3-4ta^2=0$

с этой стороны

Черновик