



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1

$$ab: (3^{11} \cdot 4^{11})$$

$$bc: (3^{18} \cdot 4^{16})$$

$$ac: (3^{21} \cdot 4^{38})$$

}  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = ab \cdot bc \cdot ac : (3^{50} \cdot 4^{65})$$

$$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}$$

}  $\Rightarrow abc : 3^{25} \cdot 4^{33} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 4^{33}$

Ответ:  $3^{25} \cdot 4^{33}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

~~$2x^2 - 3x + 4 - 2x^2 - x - 3 = 1 - 4x(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3})$~~

$$1 - 4x = 1 - 4x(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3})$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1$$

~~$y = 2x^2 - 3x + 4$~~

$$x_{\text{вып}} = \frac{3}{4}$$

$$y_{\text{вып}} = 2 \cdot \frac{9}{16} - 3 \cdot \frac{3}{4} + 4 = \frac{18 - 36 + 64}{16} = \frac{46}{16}$$

$$2x^2 - 3x + 4 \geq \frac{46}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{2x^2 - 3x + 4} > 1 \\ \sqrt{2x^2 + x + 3} \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} > 1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x - \text{решений нет}$$

Ответ: решений нет

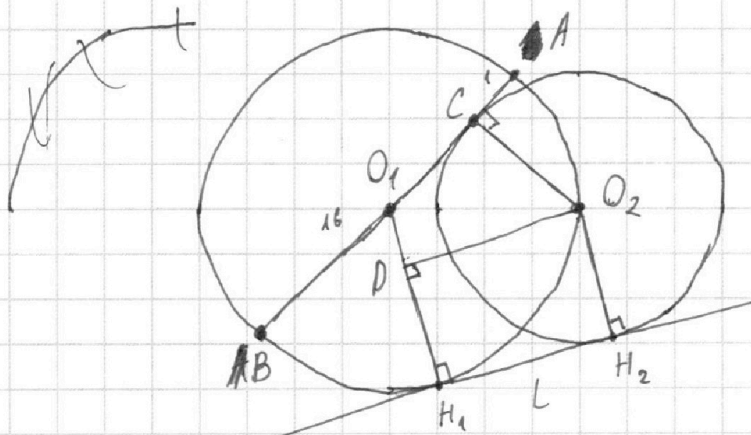
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$l = AB = AC + BC = 16$~~   $l$  - длина касательной  
 $H_1, H_2$  - точки касания общ. кас. с  
 окружностями  $\Omega$  и  $\omega$   
 соответственно

$r_1$  - радиус окружности  $\Omega$

$r_2$  - радиус окружности  $\omega$

$$r_1 = \frac{AB}{2} = \frac{AC + CB}{2} = 8,5$$

~~$O_1, O_2$~~   $O_1, O_2$  - центры окружностей  $\Omega, \omega$  соответственно.

$$O_1 O_2 = r_1 - r_2$$

$$~~AC = AB - BC = r_2 - r_1~~$$

$$O_1 C = BC - r_1 = 16 - 8,5 = 7,5$$

$$r_2^2 = O_1 C^2 + O_1 O_2^2 = 7,5^2 + 8,5^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 42,25 - 56,25 = 16$$

<del>8,5</del>	8,5	3	2
	8,5		7,5
	4,25		7,5
	6		3,75
	8,0		5,25
	<del>72,25</del>		<del>56,25</del>
			56,25

$$r_2 = 4$$

~~$O_2 D \perp O_1 H_1$~~   $O_2 D \perp O_1 H_1$  построение,  $D \in O_1 H_1$

$DH_1 = O_2 H_2, DO_2 = H_1 H_2$  ~~прямоугольник~~ по построению

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1    2    3    4    5    6    7  
                 

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} L^2 &= O_2^2 = O_1 O_2^2 - O_1^2 O_2 = 8,5^2 - (4,5 - 4,5)^2 = \\ &= 8,5^2 - 4,5^2 = 42,25 - 20,25 = \\ &= 32 \end{aligned}$$

$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \\ 45 \\ 45 \\ 225 \\ 180 \\ 2025 \end{array}$

$$L = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Ответ:  $L = 4\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$$a^2 - 8ab + b^2 = 0$$
$$a^2 = 8ab - b^2 = 64b^2 - 4b^2 = 60b^2$$
$$a = \frac{8b \pm \sqrt{60b^2}}{2} = 4b \pm \sqrt{15}b$$~~

~~$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2} = \frac{a+b}{(a - 4b - \sqrt{15}b)(a - 4b + \sqrt{15}b)}$$~~

~~$$(a+b) : m \Rightarrow a \equiv -b \pmod{m}$$
$$b^2 + a^2 \equiv 8ab \pmod{m}$$~~

5

$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} = \frac{2}{3x+2y}$$

$$3(3x+2y)y + (3x+2y)x = 2xy$$

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy = 2xy$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$D = 9y^2 - 8y^2 = y^2$$

$$x = \frac{-3y \pm y}{2}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ x = -2y \end{cases}$$

~~$$(x+y)(x+y) = 0$$~~

$$\begin{cases} z = -y \\ z = -4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z = -y \\ z = 2x = -4y \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н/м  $x = z = -y$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4x^2 - x^2}{x^2 - 6x^2} = \frac{-2x^2}{-5x^2} = \frac{2}{5}$$

н/м  $z = 2x = -4y$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3 \cdot 4y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{12 - 4 - 16}{-2} = 4$$

Ответ: 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6

$S$  - расстояние между А и В

$v$  - скорость мотоцикла

$u$  - скорость велосипедиста

$$\begin{cases} \frac{S}{u} - \frac{S}{v} = 2 \\ v\left(\frac{S}{u}\right) - u\left(\frac{S}{v}\right) = 96 \\ \frac{S}{u+6} - \frac{S}{v+6} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(v-u) = 2uv \\ S(v^2 - u^2) = 96uv \end{cases} \Rightarrow v+u = 48$$

$$S(v+6 - u-6) = \frac{5}{4}(v+6)(u+6)$$

$$2uv = \frac{5}{4}(v+6)(u+6)$$

$$8uv = 5vu + 30v + 30u + 180$$

$$\begin{cases} 10v - 10u - 60 = 0 \\ v+u = 48 \end{cases}$$

$$v(48-v) - 10v - 10(48-v) - 60 = 0$$

$$48v - v^2 - 10v - 480 + 10v - 60 = 0$$

$$v^2 - 48v + 540 = 0$$

$$D = 48^2 - 2160 = 2304 - 2160 = 12^2$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ \hline 6 \\ \times 48 \\ \hline 48 \\ 384 \\ \hline 192 \\ \hline 2304 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$v = \frac{18 \pm \cancel{12}}{2}$$

Система симметрична относительно  $v$  и  $u$ ,

$$v > u \Rightarrow$$

$$v = \frac{48 + 12}{2} = 30$$

$$u = \frac{48 - 12}{2} = 18$$

$$\cancel{S} \quad S(v - u) = 2uv$$

$$S = \frac{2 \cdot 18 \cdot 30}{(30 - 18)} = \frac{2 \cdot 18}{12} \cdot 30 = 3 \cdot 30 = 90 \text{ (км)}$$

Ответ:  $S = 90 \text{ км}$

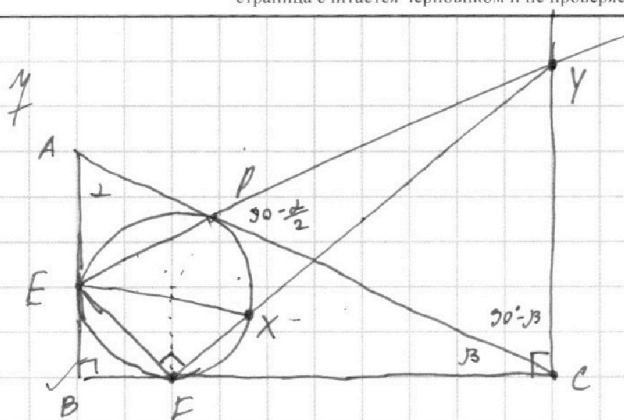
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EX = 2\sqrt{2}XY$$

$$\frac{AD}{BC} = ?$$

$\triangle ADE \sim \triangle CDY$  по 2 углам

$$\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY} = \frac{AE}{YC}$$

$$\angle A = \alpha \quad \angle ACB = \beta$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

~~$AE = AD$  (точки касания)~~

$AE = AD$  тк  $E$  и  $D$  - точки касания

$$\angle YDC = \angle ADE = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \text{ как кр. смеж. углы}$$

$$\angle DCY = 90^\circ - \beta$$

$$180^\circ = \angle PYC + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \beta$$

$$\angle PYC = \beta + \frac{\alpha}{2} = (90^\circ - \alpha) + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle YDC \Rightarrow$$

$YC = DC$  равноб.  $\triangle$

$YC = DC = FC$  (впис. окр.)  $\Rightarrow \angle CYF = \angle CFY = 45^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle BFE = \angle BEF = 45^\circ \text{ (впис. окр.)} \Rightarrow$$

$$\angle EFX = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow$$

~~EX~~ EX — диаметр  $\omega$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~2~~

$\angle BFE = \angle BEF = 45^\circ$  (впис. окр.)  $\Rightarrow$

~~$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{6ab}$~~   $\angle FX = 90^\circ \Rightarrow$

~~$a^2 - 8ab + 6a^2$~~

~~$S = vt$   
 $S = ut$~~

~~$3x + 2y = z$   
 $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$~~

~~$\frac{S}{u} - \frac{S}{v} = 2$   
 $\frac{S}{u+b} - \frac{S}{v+b} = \frac{5}{4}$   
 $v \frac{S}{u} - u \frac{S}{v} = 96$~~

~~$3x + 2y = z$~~

~~$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$~~

~~$3x^2 - 4y^2 = z^2$   
 $3x^2 - 4y^2 = z^2$   
 $x^2 - 6y^2 = \frac{\sqrt{3}x + \sqrt{4}y}{(x - \sqrt{6}y)(x + \sqrt{6}y)}$~~

~~$x = \frac{2\sqrt{3}(4y^2 + z^2) \cdot 3}{6}$~~

~~$S \left( \frac{v}{u} - \frac{u}{v} \right) =$~~

~~$S(v^2 - u^2) = 96uv$   
 $S(v - u) = 2uv$~~   $\Rightarrow v + u = 48$

~~$2uv = \frac{5}{4}$~~

~~$S(v+b - u+b) = \frac{5}{4}(u+b)(v+b)$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} =$$