



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже ~~велосипедиста~~. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

*МОТОЦИКЛИСТА*

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N1. \quad ab: 3^{14} \cdot 7^{13}; \quad bc: 3^{19} \cdot 7^{17}; \quad ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$abc_{\min} = ?$

$$a = 3^{d_1} \cdot 7^{\beta_1}$$

$$b = 3^{d_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$c = 3^{d_3} \cdot 7^{\beta_3}$$

$d_1, d_2, d_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  — целые неотрицательные числа.

$$abc = 3^{d_1+d_2+d_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$$

$$\begin{cases} d_1+d_2 \geq 14 \\ d_2+d_3 \geq 19 \\ d_1+d_3 \geq 23 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(d_1+d_2+d_3) \geq 56 \Rightarrow d_1+d_2+d_3 \geq 28$$

$$d_1+d_2+d_3 = 28 \text{ при } d_1=9, d_2=5, d_3=14$$

$$abc_{\min} = 3^{28} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$$

$$\begin{cases} \beta_1+\beta_2 \geq 13 \\ \beta_2+\beta_3 \geq 17 \\ \beta_1+\beta_3 \geq 42 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 42, \text{ т.к. } \beta_1+\beta_3 \geq 42$$

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 42 \text{ при } \beta_1=19, \beta_2=0, \beta_3=23$$

$$abc_{\min} = 3^{28} \cdot 7^{42} \text{ при } a = 3^9 \cdot 7^{19}, b = 3^5, c = 3^{14} \cdot 7^{23}$$

$$\text{ответ: } abc_{\min} = 3^{28} \cdot 7^{42}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-11ab} \quad a+b:m \quad (a+b)^2-11ab:m$$

Если  $a:m$  и  $b:m$   $\Rightarrow \frac{a}{b}$  сократима  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a \nmid m \quad b \nmid m$$

$$a+b:m \Rightarrow (a+b)^2:m$$

$$(a+b)^2-11ab:m \Rightarrow 11ab:m$$

$$m_{\max} \nmid 11:m$$

$$m_{\max} = 11, \text{ например при } a=7 \quad b=4$$

$$\text{Ответ: } m_{\max} = 11$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Запишем обе части как  $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$

$$5 - 6x = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1$$

Подставим  $x = \frac{5}{6}$  при подстановке в исходное

уравнение даем

$$\sqrt{\frac{3 \cdot 25 - 6 \cdot 25 + 216}{36}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 25 + 5 \cdot 6 + 36}{36}}$$

$$\text{т.к. } 276 - 6 \cdot 25 = 66 = 5 \cdot 6 + 36 \text{ равенство верно.}$$

Изменим выражение  $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 + x + 1} \geq 0 \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} \geq \sqrt{\frac{3 \cdot 25 - 6 \cdot 25 + 216}{36}} = \sqrt{\frac{141}{36}} > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x^2 + x + 1} + \sqrt{3x^2 - 5x + 6} > 1$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

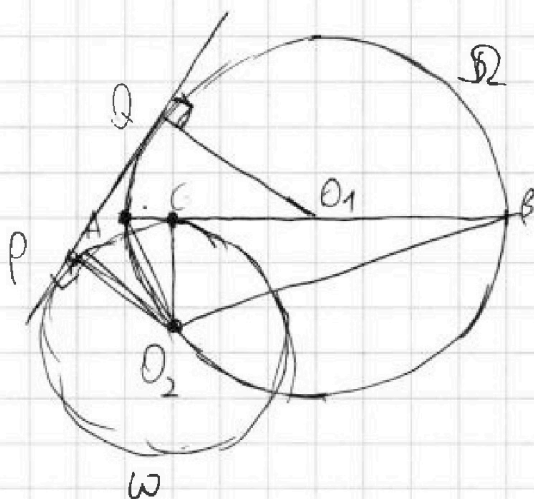
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.



$O_1$  - центр  $\Omega$ ;  $O_2$  - центр  $\omega$

$AC = 1$   $BC = 25$

$D$  - диаметр  $\Omega$ ,  $d$  - диаметр  $\omega$   $\frac{D}{2} = R$   $\frac{d}{2} = r$

$P$  и  $Q$  - точки касания общей касательной  
 $C$   $\omega$  и  $\Omega$  соответственно  $\angle AO_2B = 90^\circ$  и.к.  $AB = D$

$AO_1B = O_1A = O_1B = O_1O_2 = \frac{AB}{2} = \frac{AC+BC}{2} = \frac{D}{2} = 13$

$O_2C = O_2P = \frac{d}{2} = r$

$O_2C^2 + AC^2 = AO_2^2$   $O_2C^2 + BC^2 = O_2B^2$

$O_2A^2 + O_2B^2 = AB^2$

$O_2C = \frac{AB^2 - AC^2 - BC^2}{2}$

$O_2C = \sqrt{\frac{AB^2 - AC^2 - BC^2}{2}} = \sqrt{\frac{676 - 625 - 1}{2}}$

$O_2C = 5 = O_2P$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

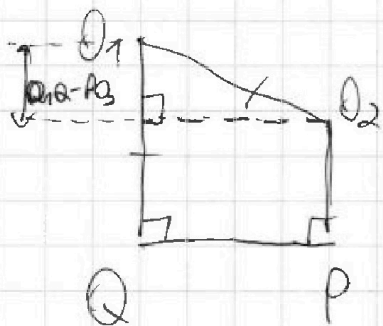
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (упрощение)

$$O_2P \perp PQ \perp O_1Q \Rightarrow O_2P \parallel O_1Q$$



~~$O_2Q^2 = O_2P^2 + PQ^2$~~   
 ~~$O_1Q^2 = O_1P^2 + PQ^2$~~   
 ~~$O_2Q = O_1Q$~~

$$PQ = \sqrt{O_2O_1^2 - (O_1Q - PO_2)^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$5x - y = 32 \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - 2^2}{y^2 + 32^2} \text{ min} \rightarrow \frac{25x^2 - y^2 - 2^2}{y^2 + 32^2} = m$$

$$5x = y + 32$$

$$m = \frac{y^2 + 62y + 92^2 - y^2 - 2^2}{y^2 + 32^2} = \frac{82^2 + 62y}{y^2 + 32^2}$$

$$y = 5x - 32 \quad y = \frac{xz}{15x - 82}$$
$$5x - 32 = \frac{xz}{15x - 82}$$

$$75x^2 - 90xz - 45x2 + xz + 24z^2 = 0$$

$$75x^2 - 86xz + 24z^2 = 0$$

$$x = \frac{86z \pm 14z}{170} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{3} \\ x = \frac{122}{25} \end{cases}$$

$$m = \frac{25x^2 - (5x - 32)^2 - 2^2}{(5x - 32)^2 + 32^2} = \frac{30xz - 10z^2}{25x^2 - 90xz + 18z^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \frac{30 \cdot \frac{2z}{3} \cdot z - 10z^2}{25 \cdot \frac{4z^2}{9} - 30 \cdot \frac{2z}{3} \cdot z + 12z^2} = \frac{10z^2}{\left(\frac{100}{9} - 20 + 12\right)z^2} \\
 & \frac{9 \cdot 10}{100 - 20 \cdot 9 + 12 \cdot 9} = \frac{90}{100 - 72} = \frac{90}{28} = \frac{45}{14}
 \end{aligned}$$

№5 (упрощение 1)

Подставим  $v = \frac{30kz - 10z^2}{29k^2 - 30kz + 12z^2}$

$x = \frac{2z}{3}$

$$\frac{30 \cdot \frac{2z}{3} \cdot z - 10z^2}{25 \cdot \frac{4z^2}{9} - 30 \cdot \frac{2z}{3} \cdot z + 12z^2} = \frac{10z^2}{\left(\frac{100}{9} - 20 + 12\right)z^2} =$$

$$= \frac{90}{28} = \frac{45}{14} = m_1$$

Подставим  $x = \frac{12z}{25}$

$$\frac{30 \cdot \frac{12z}{25} \cdot z - 10z^2}{25 \cdot \frac{144z^2}{625} - 30 \cdot \frac{12z}{25} \cdot z + 12z^2} = m_2$$

$$\frac{30 \cdot \frac{12z}{25} \cdot z - 10z^2}{25 \cdot \frac{144z^2}{625} - 30 \cdot \frac{12z}{25} \cdot z + 12z^2} = m_2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 (продолжение 2)

$$m_2 = \frac{6 \cdot 12}{5} - 10 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 12 - 250}{144 - 30 \cdot 12 + 25 \cdot 12} =$$

$$= \frac{360 - 250}{144 - 60} = \frac{55}{42}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - 2^2}{y^2 - 3z^2} \quad \min = \frac{55}{42}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6  $AB=S$   $v_B$  - скорость велосипедиста  $v_M$  - скорость мотоцикла

$$\frac{S}{v_B} - \frac{S}{v_M} \stackrel{\text{def}}{=} 12 \Rightarrow S = \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} \cdot 12 \quad (1)$$

$$v_M \cdot \frac{S}{v_B} - v_B - \frac{S}{v_M} \stackrel{\text{def}}{=} 49 \text{ км} \quad S = \frac{49 v_B v_M}{v_M^2 - v_B^2} \quad (2)$$

$$\frac{S}{v_B + 7} - \frac{S}{v_M + 7} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3}{5} \text{ ч} \quad S = \frac{3(v_B + 7)(v_M + 7)}{5(v_M - v_B)} \quad (3)$$

$$S = \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} = \frac{49 v_B v_M}{v_M^2 - v_B^2} = \frac{3(v_B + 7)(v_M + 7)}{5(v_M - v_B)}$$

$$\Downarrow \\ v_M + v_B = 49$$

$$5 v_B v_M = 3 v_B v_M + 21 v_B + 21 v_M + 147$$

$$2 v_B v_M = (21 + 3) 49$$

$$v_B v_M = 12 \cdot 49 \quad v_B = \frac{12 \cdot 49}{v_M}$$

$$v_M^2 - 49 v_M + 12 \cdot 49 = 0$$

$$v_M = \frac{49 \pm \sqrt{49^2}}{2} = 28; 21$$

$$v_M \geq 25 \Rightarrow v_M = 28, v_B = 21$$

$$S = \frac{28 \cdot 21}{28 - 21} = 84 \text{ км}$$

Ответ:  $d(A; B) = 84 \text{ км}$



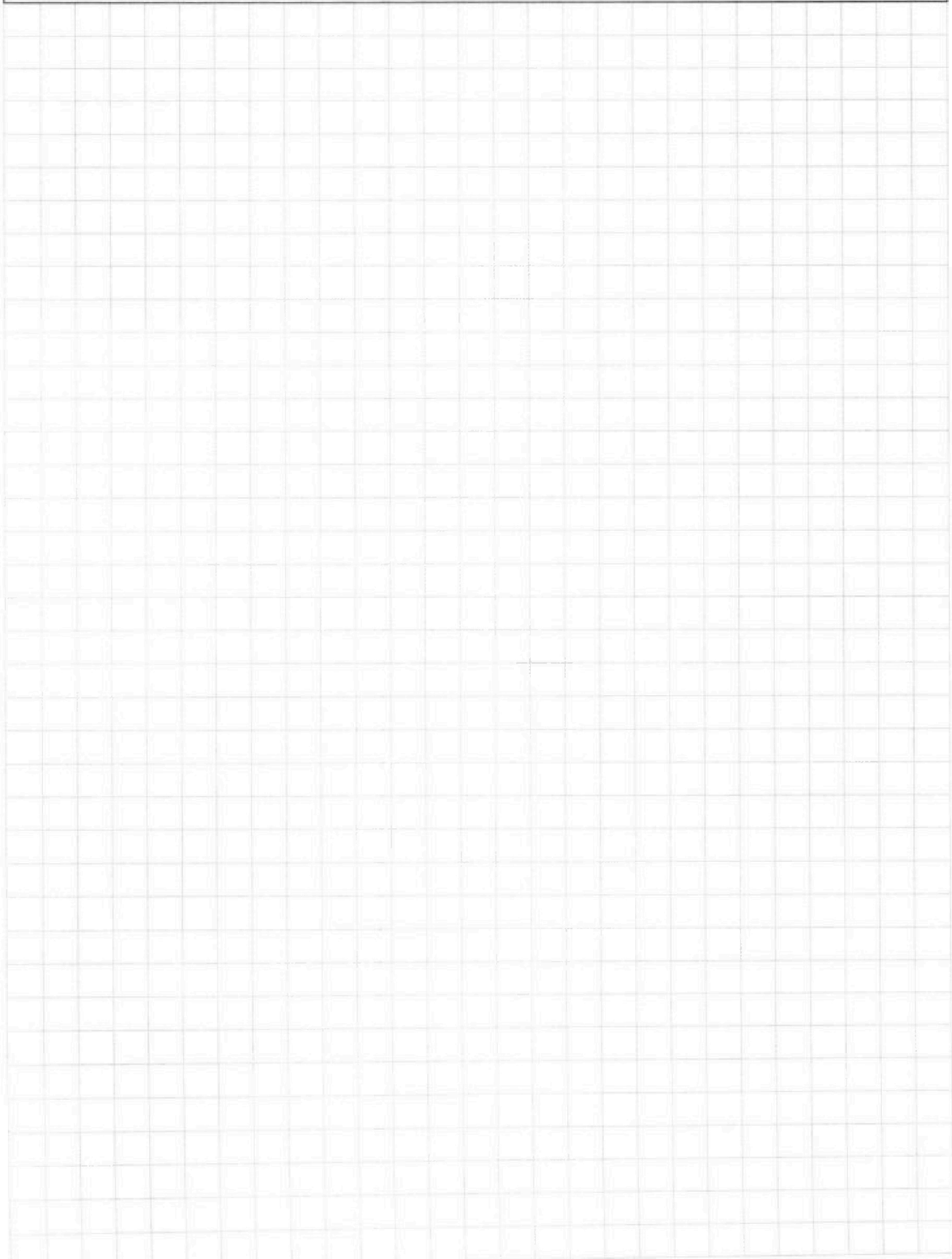
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1  
  2  
  3  
  4  
  5  
  6  
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{\frac{3 \cdot 25}{36} - \frac{25}{6} + 6} = \sqrt{\frac{3 \cdot 25}{36} + \frac{5}{6} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{3 \cdot 25 - 6 \cdot 25 + 216}{36}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 25 - 5 \cdot 6 + 36}{36}}$$

$$216 - 6 \cdot 25 = 36 + 5 \cdot 6$$

$$216 - 150 = 36 + 30$$

$$66 = 66$$

$$0 = 0$$

$$\begin{array}{r} +66 \\ 75 \\ \hline 141 \end{array}$$

$$\frac{25}{9} - 4 \cdot 2 = \frac{25 - 4 \cdot 2 \cdot 9}{9} = \frac{5}{6}$$

$$3x^2 - 5x + 6$$

$$3 \cdot \frac{25}{9} - 4 \cdot 2$$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 6 - 5^2}{4 \cdot 3} =$$

$$\begin{array}{r} 87 \\ 47 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 86 \\ 86 \\ \hline 516 \\ 688 \\ \hline 7396 \end{array}$$

$$ax^2 + bx + c \quad - \frac{b}{2a}$$

$$\frac{a b^2}{4 a^2} - \frac{b^2}{2 a} + c$$

$$\frac{b^2}{4 a} - \frac{2 b^2}{4 a} + \frac{4 a c}{4 a}$$

$$\frac{4 a c - b^2}{4 a}$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 14 \\ \hline 56 \\ 14 \end{array}$$

$$24 \cdot 300 = 7200$$

$$196$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$$\frac{a+c}{b+d} = k$$~~

~~$$\frac{2}{2} + \frac{3}{8} = \frac{2+3}{4+8} = \frac{1}{3}$$~~

~~$$\frac{a+c}{b+d} = k$$~~

~~$$\frac{2 \cdot 8 + 3 \cdot 7}{7 \cdot 8} = \frac{37}{56}$$~~

~~$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+d}{b+d} + \frac{bc}{bd}$$~~

$$269 - 54 = 105$$

~~$$abcd + bcda = a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab$$~~

$$3 \cdot 7 \cdot 5$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

$$a \neq b : m$$

$$d = mn \quad b = mk$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = m$$

$$(a, b) = 1$$

$$a, b \in m(a, b, k)$$

$$25x^2 - y^2 - z^2 = my^2 + 3mz^2$$

25

$$5x = 3z + y$$

$$9z^2 + 6zy + y^2 - y^2 - z^2 : 3z^2 + y^2$$

$$\frac{2z^2 + 6zy}{3z^2 + y^2} \text{ м.ч. ?}$$

$$x = \frac{3z + y}{5}$$

$$\frac{y}{3z+y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$5x - y = 32$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$y = 5x - 32$$

$$\frac{7}{y} = \frac{75}{z} - \frac{8}{x} = \frac{15x - 8z}{xz}$$

$$7z = \frac{36}{25} \frac{12}{150} - 75 \frac{12}{25}$$

$$y = \frac{xz}{15x - 8z}$$

$$\frac{xz}{15x - 8z} = 5x - 32$$

$$xz = 75x^2 - 40xz - 45xz + 24z^2$$

$$75x^2 - 86xz + 24z^2 = 0$$

$$x = \frac{86z \pm \sqrt{86^2 z^2 - 4 \cdot 24z^2 \cdot 75}}{150} = \frac{86z \pm 14z}{150}$$

$$\frac{25x^2 - (5x - 32)^2 - 2^2}{(5x - 32)^2 + 32^2} = \frac{25x^2 - 25x^2 + 30xz - 92^2 - 2^2}{25x^2 - 30xz + 12z^2}$$
$$= \frac{30xz - 10z^2}{25x^2 - 30xz + 12z^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

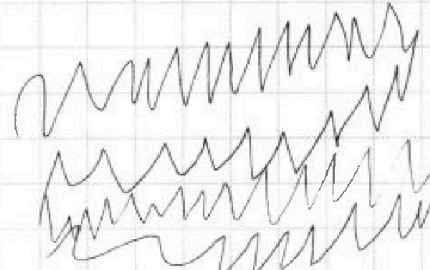
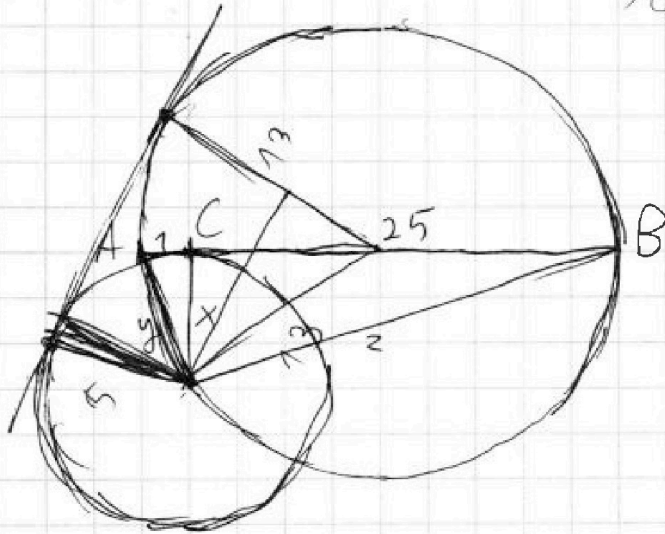
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$$(a+b) \cdot m$$



$$1+x^2=y^2$$

$$25^2+x^2=z^2$$

$$y^2+z^2=26^2$$

$$1+25+2x^2=26^2$$

$$x=5$$

$$\frac{25}{55} = \frac{13}{110} = \frac{13}{220}$$

$$\frac{25 \cdot \frac{13}{220} - 3 \cdot \frac{13}{220} + 13^2}{12 \cdot \frac{25}{220} - 13^2}$$

$$\frac{30 \cdot \frac{25}{220} - 13^2}{12 \cdot \frac{25}{220} - 13^2}$$

$$x = \frac{29}{122}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l} \text{№1. } 3^{14} 7^{13} \mid ab \\ 3^{19} 7^{14} \mid bc \\ 3^{23} 7^{42} \mid ac \end{array}$$

$abc_{\min}$ ?  $abc$

$$\begin{cases} a = 3^{\alpha_1} 7^{\beta_1} \\ b = 3^{\alpha_2} 7^{\beta_2} \\ c = 3^{\alpha_3} 7^{\beta_3} \end{cases} \Rightarrow abc = 3^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 14$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 14$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 19$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 19$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 23$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 23$$

$$\alpha_1 = 9 \quad \alpha_2 = 5 \quad \alpha_3 = 14$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 14 + 19 + 23 = 56$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 13$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 17$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 42$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 72$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 36$$

$$abc = 3^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \geq 3^{28} 7^{42}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

**МФТИ**



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Горча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Умножим на сопряженные

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} \text{ обе части}$$

$$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$5 - 6x = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

~~делю~~

$$\left[ \begin{array}{l} 5 - 6x = 0 \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = \cancel{\neq} \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} \cancel{x \neq \frac{5}{6}} \\ \sqrt{a} \geq 0, \text{ где } a \geq 0 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{5}{6} \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} = 0 \\ \sqrt{3x^2 + x + 1} = 0 \end{array} \right]$$

$\frac{5}{6}$   
1 2 3 4 5 6 7  
✓     ✓✓     ✓

$$3x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x + 2 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 < 0$$

~~нет~~ значений корней у системы уравнений

Остается проверить  $x = \frac{5}{6}$

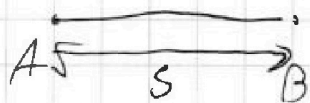
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

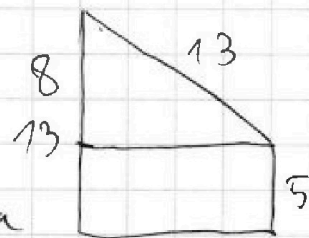
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$v_B$  - скорость велосипедиста

$v_M$  - скорость мотоциклиста



$$\frac{S}{v_B} - \frac{S}{v_M} = 1 \text{ ч}$$

$$v_M \cdot \frac{S}{v_B} - v_B \cdot \frac{S}{v_M} = 49 \text{ км}$$

$$\frac{S}{v_B + 7} - \frac{S}{v_M + 7} = 0,6 \text{ ч}$$

$$\frac{S \cdot v_M - S \cdot v_B}{v_B \cdot v_M} = 1$$

$$S = \frac{v_B \cdot v_M}{v_M - v_B}$$

$$\frac{S(v_M + 7) - S(v_B + 7)}{(v_B + 7)(v_M + 7)} = \frac{6}{10}$$

$$S = \frac{6(v_B + 7)(v_M + 7)}{(v_M - v_B) \cdot 10}$$

$$\frac{S(v_M^2 - v_B^2)}{v_B \cdot v_M} = 49 \quad S = \frac{49 v_B v_M}{v_M^2 - v_B^2}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 25 \\ \hline 125 \\ 500 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 520 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 676 \\ 526 \\ \hline 50 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S = \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} - \frac{49 v_B v_M}{v_M^2 - v_B^2} - \frac{3(v_M + 7)(v_B + 7)}{5(v_M - v_B)}$$

$$1 = \frac{49}{v_M + v_B}$$

$$v_M + v_B = 49$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ - 6 \\ \hline 294 \end{array}$$

$$\frac{6 v_M \cdot v_B + 42 v_M + 42 v_B + 294}{10 (v_M - v_B)}$$

$$\frac{3 v_M v_B + 21 v_M + 21 v_B + 147}{5 (v_M - v_B)}$$

~~$$2 v_B \cdot v_M = 6 v_B v_M + 42 v_M + 42 v_B + 294$$~~

$$5 v_B v_M = 3 v_B v_M + 21 v_M + 21 v_B + 147$$

$$2 v_B \cdot v_M = 21 \cdot 49 + 147 = 49 \cdot 24$$

$$v_B \cdot v_M = 49 \cdot 12 \quad v_B = \frac{49 \cdot 12}{v_M}$$

$$v_M + v_B = 49$$

$$v_M + \frac{49 \cdot 12}{v_M} = 49$$

$$v_M^2 + 49 \cdot 12 - 49 v_M = 0$$

$$49^2 - 49 \cdot 12 \cdot 4 = 49$$

$$v_M = \frac{49 \pm 7}{2} = 21; 28$$

$$v_M \neq v_B$$