



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

Оценка: через $D_2(a)$ будем обозначать степень входящие a в b .

1) $D_2(a) = x_1, D_7(a) = y_1$

$D_2(b) = x_2, D_7(b) = y_2$

$D_2(c) = x_3, D_7(c) = y_3$

2) Т.к. $a \mid b \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 14$

Аналогично: $\begin{cases} x_2 + x_3 \geq 14 \\ x_3 + x_1 \geq 20 \\ y_1 + y_2 \geq 10 \\ y_2 + y_3 \geq 14 \\ y_3 + y_1 \geq 37 \end{cases}$

3) (используем неравенство)

3 получим: $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 14 + 14 + 20 = 48$

$\left. \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 \geq 24 \\ \text{т.к. } y_1 + y_2 + y_3 \geq 37 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$

4) очевидно, что если $y_1 + y_3 \geq 37 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq 37$

≥ 37

5) $D_2(abc) = x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$

$D_7(abc) = y_1 + y_2 + y_3 \geq 37$

$\Rightarrow abc \geq \left[2^{26} \cdot 7^{37} \right]$ Пример: $\begin{cases} a = 2^8 \cdot 7^{15} \\ b = 2^6 \cdot 7^{20} \\ c = 2^{12} \cdot 7^{22} \end{cases}$

Не нужно убеждаться, что

Пример удовлетворяет условию.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

② Ответ: 8

1) Пример: $a=1, b=7 \Rightarrow a+b=8$
 $b^2 - 6ab + a^2 = 8 \Rightarrow a^2 - 6ab + b^2 = 8$

2) Оценка: $a, b \in \mathbb{N}$ - несоизмеримы \Rightarrow

$\Rightarrow (a, b) = 1$, где $(x, y) = \text{НОД}(x, y)$.

3) Найдем наименьшее $m \times n \Rightarrow$

наим. число, где найдем $(a+b, a^2 - 6ab + b^2)$
 $= (a+b, (a+b)^2 - 8ab) = (a+b, 8ab) \text{ т.к.}$

НО т.к. $(a, b) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (a+b, a) = 1 \\ (a+b, b) = 1 \end{cases} \text{ т.к. } (a+b)^2 = (a+b)$

если $\begin{cases} (a+b) : d \Rightarrow b : d \\ a : d \end{cases}$, то $(a, b) = 1$ оно не так

где $b \Rightarrow (a+b, 8ab) = (a+b, 8) \Rightarrow$

$\Rightarrow |(a+b, a^2 - 6ab + b^2)| \leq 8$

т.к. g .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

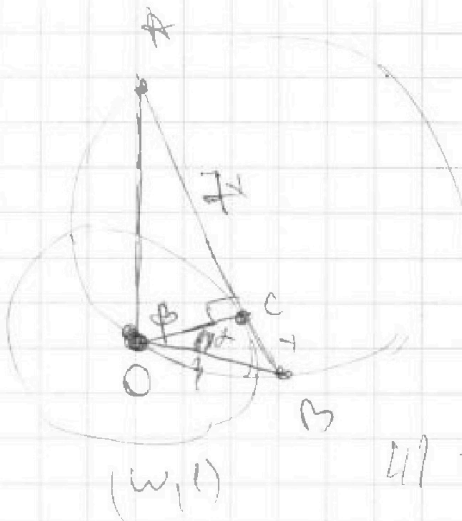
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



1) Пусть центр шара $w = O$.

(R, 5) 2) Пусть $\angle COA = \alpha$
 $\angle COB = \beta$

3) т.к. AB - касательная

\downarrow
 $OC \perp AB$

4) $3) \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{5x}{OC} = \frac{5x}{x}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5x}{OC} = \frac{5x}{x}$

5) $\triangle BOA: \frac{8x}{\sin(\alpha+\beta)} = 10$

(по теореме синусов)

6) $\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = x \\ \operatorname{tg} \beta = 5x \\ \sin(\alpha+\beta) = 8x \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = x = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \sin \alpha = x \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$

$x^2 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{x^2+1}$

т.к. α, β углы в треугольнике $\Rightarrow \alpha + \beta \in [0, \pi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta \geq 0$

$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ аналогично $\left. \begin{array}{l} \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} \\ \sin \beta = \frac{5x}{\sqrt{49x^2+1}} \end{array} \right\}$
 $\sin \alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
 $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} + \frac{5x}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} =$
 $= \frac{4}{5} x \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}} = \frac{4}{5} (x^2 \times 1) (49x^2+1) = 100$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Упростите!!!

$$(x^2+1)(49x^2+1)=100 \quad t=x^2$$

$$(t+1)(49t+1)=100$$

$$49t^2+t+49t+1=100$$

$$49t^2+50t-99=0$$

$$D=2500+4 \cdot 49 \cdot 99=4(4851+625)=$$

$$=4 \cdot 5476=4 \cdot 4 \cdot 1369$$

$$t = \frac{-50 \pm \sqrt{5476}}{98} = \frac{-50 \pm 2\sqrt{1369}}{98} = \frac{-50 \pm 2 \cdot 37}{98}$$

т.к. $t \geq 0$

$$x = \frac{\sqrt{2\sqrt{1369}-25}}{7}$$

$$AB = 8x = \frac{8\sqrt{2\sqrt{1369}-25}}{7}$$

Ответ:

$$5476 = 4 \cdot (1250 + 100 + 99)$$

$$4 \cdot 1369 = 4 \cdot (100 + 25 + 100)$$

$$99 \cdot 49 = 4900 - 49 = 4851$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

ОДЗ: $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$ $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$ $2(x-1)(x-3) \geq 0$

$x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$ $x \in \mathbb{R}$ — все x верно

Докажем обе части на $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

Если $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \neq 0$

1) Если $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 0 \\ \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$x = \frac{3}{2}$ не подходит

1.2) $2x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4} \Rightarrow \text{нет корней в } \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \neq 0 \quad \forall x$$

2) $\sqrt{\dots} = 0$ докажем:

$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3})^2 - (\sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 = (2 - 4x)$$

$$(2 - 4x) = (2 - 4x) (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

2.1) $2 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ удов. условием ОДЗ:

2.2) $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$

$$2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 2(1 + \frac{1}{2})^2 = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ⓢ Прогресс!!!

$$2) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

т.к. обе корни $\geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\sqrt{2x^2 - 5x + 3})^2 + (\sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 +$$

$$+ 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 = 4\left(\sqrt{2x^2 - \frac{3}{2}x + 1}\right) =$$

$$= 4\left(\left(\sqrt{2x^2 - \frac{3}{2}x + 1}\right)^2 + 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) =$$

$$= 4\left(\sqrt{2x^2 - \frac{3}{2}x + 1}\right)^2 + 4\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$$

$$\frac{3}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 > \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) > 2 \Rightarrow$$

$$\text{Умножь обе части на } 2 \Rightarrow 2\sqrt{2x^2 - \frac{3}{2}x + 1} > 0 = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - \frac{3}{2}x + 1} > \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ответ: } \frac{2}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

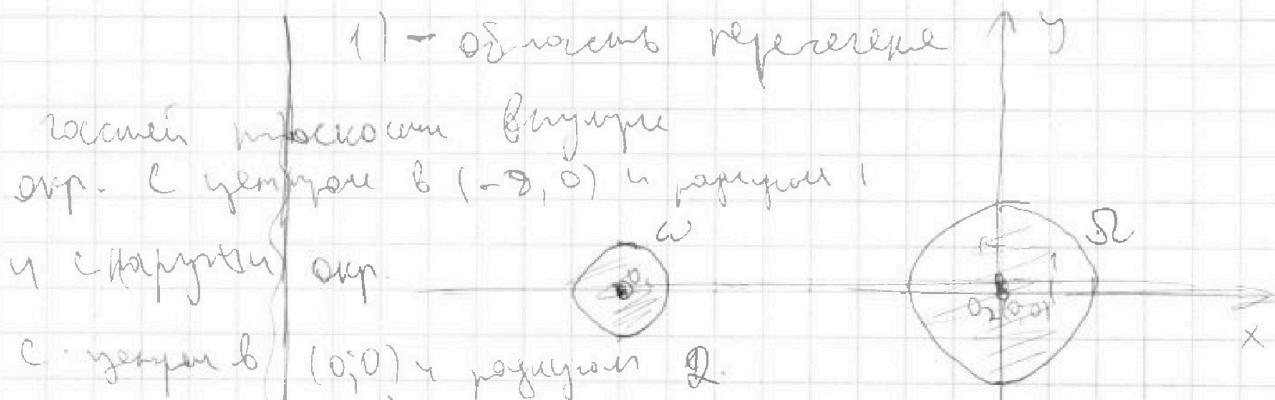
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

⇓

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 & 1) \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 & 2) \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

Пусть ω - окр с центром в $(-8, 0)$ и радиусом 1,
 Ω - окр. с центром в $(0, 0)$ и радиусом 2.



это граница области фигуры ω .

аналогично 2) - это граница фигуры Ω .

ТМТ \forall точек принадлежащих внутренней поверхности - это область фигуры ω и Ω .

$ax - y + 10b = 0$ - прямая. Если прямая

пересекает зону Ω или ω окр. то точка

в Ω или ω точка x - то систем решение

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

этого решен, т.к. Будем решать все
поки на сфере введем координаты на
сферической $\Rightarrow ax - y + zb = 0$ равные
~~для~~ для каждой из двух окр. либо
полностью либо не включая других точек.
Значит с каждой окр. не более одного
решения \Rightarrow всего не более 2,
а чтобы было ровно 2 точек равные
касательные их обеих $\Rightarrow ax - y + zb = 0$ -
одно из уравнений общих касательных
плоск. кривизны.

Таким образом задача сводится к
поиску, чтобы найти координаты
при x для y и z искомых.

1) Пусть центры ω и Ω O_1 и O_2
соответственно.

2) Найдем 2 центра взаимности
пересекая эти плоскости окружностей
в плоскости.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. Продолжение!!!

Два дуги окружностей имеют на оси Ox и Oy точки O_1 и O_2 соответственно, что если O - центр

окружностей, то $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{1}{2}$ (отношение радиусов)

Но если $OO_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ось $y \Rightarrow$

$\Rightarrow O(x, 0)$ $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{1}{2}$

$O_1(-8, 0)$

$O_2(0, 0)$

$\Rightarrow 2(x=0) = x^2$

~~$2x + 32y + 128 = 0$~~
 ~~$2x + 32y + 128 = 0$~~

Порядок $O(-16, 0)$
 ~~$O(-16, 0)$~~
 $O(-\frac{16}{3}, 0)$

Проверка: $\frac{-16 - (-8)}{-16 - 0} = \frac{1}{2}$

~~$\frac{-8 - (-\frac{16}{3})}{-\frac{16}{3} - 0} = \frac{16}{3} - 8 = \frac{16-24}{3} = \frac{-8}{3} = -\frac{8}{3}$~~
 $\frac{-8 - (-\frac{16}{3})}{-\frac{16}{3} - 0} = \frac{16}{3} - 8 = \frac{16-24}{3} = \frac{-8}{3} = -\frac{8}{3}$

Важно $O(-16, 0)$ - центр окружности

переведем O_1 и O_2 в формулу \Rightarrow

и исходных координат - это

координаты $O_1(-16, 0)$ и $O_2(-\frac{16}{3}, 0)$ относятся к O т.е. это центры окружностей,

то O_1 - O - O_2 - O - O_1 и O_2 .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) Преобразование!!!

Плюс проверим $y(-16, 0)$ и $(-\frac{16}{3}, 0)$
касательные к Ω .

1) Пусть кас. $- y = kx + b$. $(-16, 0) \in y = kx + b$.

Тогда пересечение Ω и $y = kx + b$.
 $b - 16k = 0$

$$\begin{cases} y = kx + b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad x^2 + (kx + b)^2 = 4$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2kbx + b^2 - 4 = 0$$

$$x^2(k^2 + 1) + x \cdot 2kb + b^2 - 4 = 0$$

$$\Gamma - k. \Rightarrow \text{то кас.} \Rightarrow D = 0 = (2kb)^2 - 4(k^2 + 1)(b^2 - 4)$$

$$\begin{cases} b = 16k \\ 4k^2 b^2 - 4(k^2 b^2 - 4k^2 + b^2 - 4) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 16k \\ 4k^2 b^2 - 4kb^2 + 16k^2 - 4b^2 + 16 = 0. \end{cases}$$

$$16k^2 - 4(16k)^2 + 16 = 0.$$

$$4k^2 - (16k)^2 + 4 = 0.$$

$$k^2 - 16 \cdot 4k^2 + 1 = 0 \quad k^2 = \frac{1}{63} \quad \left| k = \pm \frac{1}{\sqrt{63}} \right|$$

$$2) \left(-\frac{16}{3}, 0\right) \in y = kx + b \quad b = -\frac{16}{3}k$$

Аналогично $16k^2 - 4b^2 + 4 = 0 \quad 4k^2 - b^2 + 4 = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. Азартные!!!

$$\begin{cases} ck^2 - b^2 + c = 0 \\ b = \frac{16}{3}k \end{cases}$$

$$b = \frac{16}{3}k$$

$$ck^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2 k^2 + c = 0$$

$$k^2 - \frac{16 \cdot 4}{3} k^2 + c = 0$$

$$3k^2 - 64k^2 + 3 = 0$$

$$61k^2 = 3 \quad k^2 = \frac{3}{61} \quad k = \pm \sqrt{\frac{3}{61}}$$

Но если мы найдем коэффициенты при
об этих коэффициентах, но если это
найдем θ который нам нужен. $\theta = k$.
в качестве b в формулу b в уравнении
находим b ^{переносим} b в уравнении.)

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}, \pm \sqrt{\frac{3}{61}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

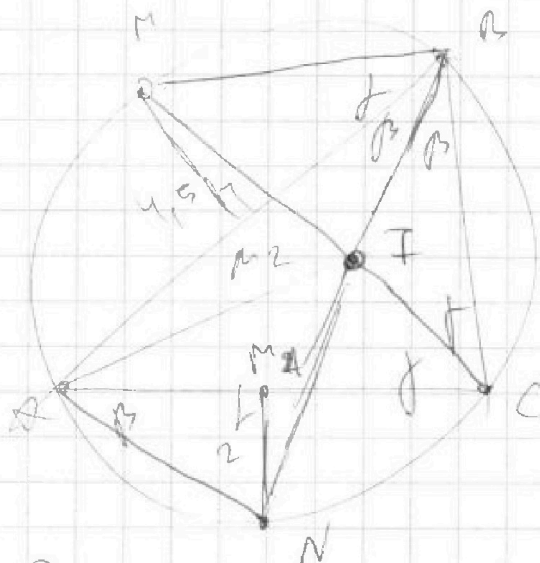
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



7



1) $\angle C = 2\gamma$
 $\angle B = 2\beta$

2) I -к. M и N -
 середины BC и AC .

$MI \parallel BC \Rightarrow CM \parallel BN$ -
 параллельно.

3) $BN \cap CM = I$, $AI \perp ?$

4) $\angle C$ перпендикулярен BN на $AC - M_1$, а
 CM на $AB \perp M_2$

5) M_1 и M_2 - середины AC и AB соответственно.

они середины BC .

6) $\angle M_1 B A = \angle M_2 C A = \gamma$, следовательно $\angle CAN = \gamma$

7) $\frac{AM_1}{AM} = \frac{AN}{AC} = \frac{2NM_2}{AC}$

Аналогично $\frac{AN}{AB} = \frac{2NM_1}{AB}$

8) $\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta}$
 $\frac{2NM_1}{\sin \beta} = \frac{2NM_2}{\sin \alpha}$

$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{NM_1}{NM_2} = \frac{2}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



① $a, b, c \in \mathbb{N} : ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{14}$
 $ac : 2^{20} \cdot 7^7$ $\min abc = ?$

$ab = (14, 10)$ $abc = (20, 37)$
 $bc = (17, 14)$
 $ac = (20, 27)$

$\vec{a}(a) = x_1$
 $\vec{a}(b) = x_2$
 $\vec{a}(c) = x_3$

$b = (x_1, x_2)$
 $c = (x_3, x_4)$
 $x_1 + x_3 + x_5 =$

$x_1 + x_2 \geq 14$
 $x_2 + x_3 \geq 17$
 $x_3 + x_4 \geq 20$
 $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 51$
 $x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$

$x_1 + x_3 = 14 \Rightarrow x_5 = 6$
 $x_3 + x_4 = 17 \Rightarrow x_3 = 11$
 $x_1 + x_5 = 14 \Rightarrow x_1 = 8$
 $x_2 = 6$

$\vec{a}(a) = y_1$
 $\vec{a}(b) = y_2$
 $\vec{a}(c) = y_3$
 $y_1 + y_2 \geq 10$
 $y_2 + y_3 \geq 17$
 $y_3 + y_1 \geq 27$

$x_1 + x_2 + x_3 = 26$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 32$

$x_1 + x_2 \geq 14$

$y_1 + y_2 + y_3 = 32$

$x_3 \leq 12$

$x_3 = 12$
 $x_1 = 2$
 $x_2 = 15$

$y_2 \geq 0$
 y_1

$y_1 = 15$

$y_2 = 0$

$y_3 = 22$

$x_3 = 12$

$x_1 + x_2 = 14$

$y_1 = 8$
 $y_2 = 6$
 $y_3 = 12$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 32$

$y_1 + y_2 = 10$

$y_2 + y_3 = 17$

$y_3 + y_1 = 27$

$x_1 = 2$

$x_2 = 15$

\Rightarrow

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(a, b) = 1, a, b \in \mathbb{N}$$

$$(*) (a+b, a^2 - 3ab + b^2)$$

$$(a+b, (a+b)^2 - 3ab) =$$
$$= (a+b, -3ab)$$

$$\frac{8}{1-4+4} =$$

$$\frac{8}{8-8}$$

$$\frac{8}{1-4+4} = \frac{8}{8} = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

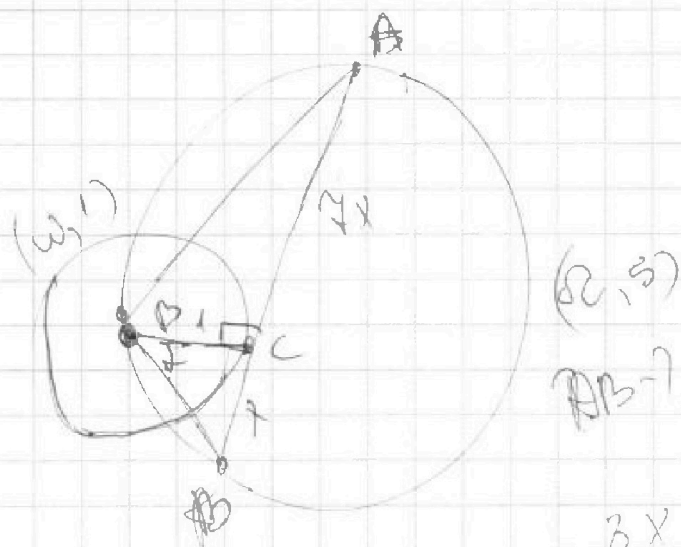
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



$$\operatorname{tg} \alpha = x$$

$$\operatorname{tg} \beta = 2x$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = x$$

$$\sin 2 = x \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - (x^2 + 1) \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$
$$\cos \beta = \frac{1}{4x^2 + 1}$$

$$\frac{2x}{\sin(\alpha + \beta)} = \text{AB}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4)

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 - 2x - 1} = 2 - \sqrt{x}$$

~~ОАБ~~: $2x^2 - 5x + 3$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)(x-\frac{3}{2})$$

$$2x^2 + 7x + 1 = \text{ОАБ}$$

$$x^2 + 7x + 1 = 0$$

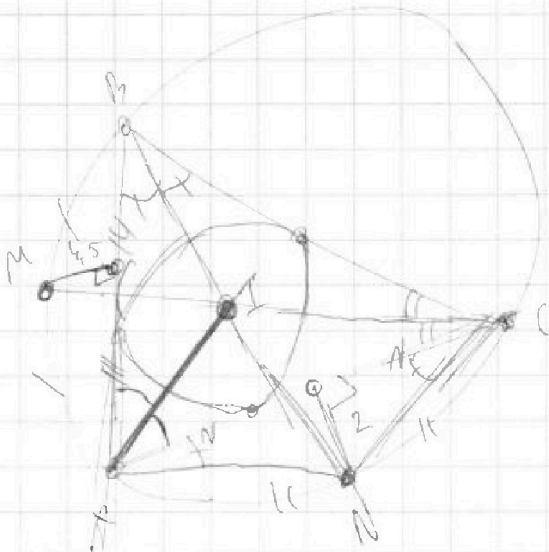
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\forall a: \exists b$: ровно 2 решения.

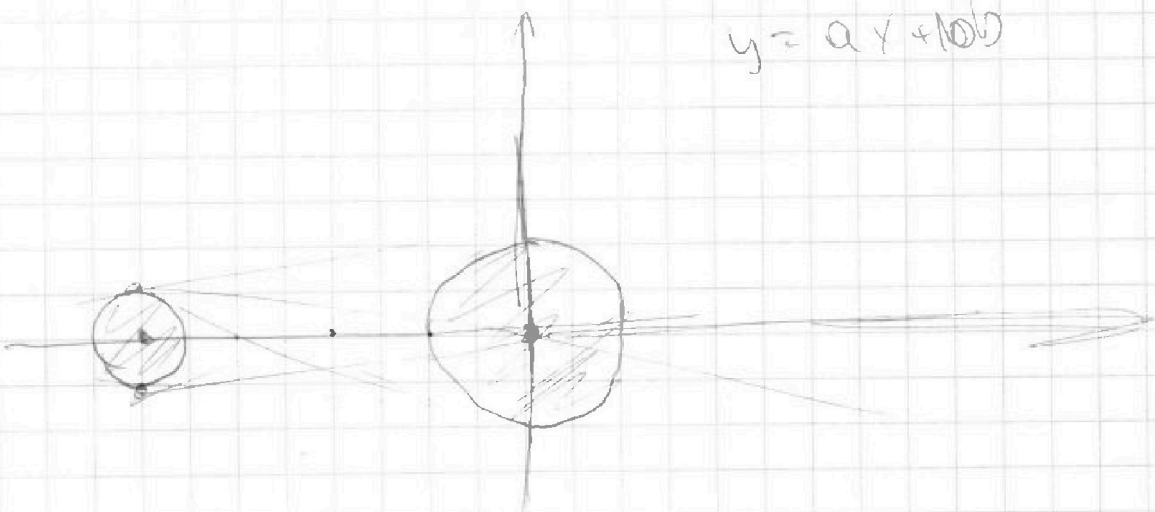
$$ax - y + 10b = 0$$

$$\left((x+8)^2 + y^2 - 1 \right) \left(x^2 + y^2 - 4 \right) \leq 0$$

$$\left((x+8)^2 + y^2 - 1 \right) \left(x^2 + y^2 - 4 \right) \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ (x^2 + y^2 - 4) \geq 0 \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{l} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{array} \right]$$

$$y = ax + 10b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{b}{\sin 2\beta} = 2R$$

$$\text{tg } \beta = \frac{4}{5}$$

$$\frac{c}{\sin 2\alpha} = 2R$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{\sin 2\alpha + \text{tg } \beta} = 2R = \frac{9}{\sin 2\beta + \text{tg } \alpha}$$

$$\frac{4}{2\sin^2 \alpha} = \frac{9}{2\sin^2 \beta}$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2}{3}$$

$$3\sin x = 2\sin y$$

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin \beta = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1.5}{1}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 (1 - \cos^2 x) + \cos^2 y = 1$$

$$\frac{9}{4} - \frac{9}{4} \cos^2 x + \cos^2 y = 1$$

$$\sin x = 2y$$

$$y = 1.5x$$

$$2\cos^2 y + \cos^2 x - \cos^2 y = \frac{5}{4}$$

$$4\cos^2 x - 4\cos^2 y = 5$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{9}{2x}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

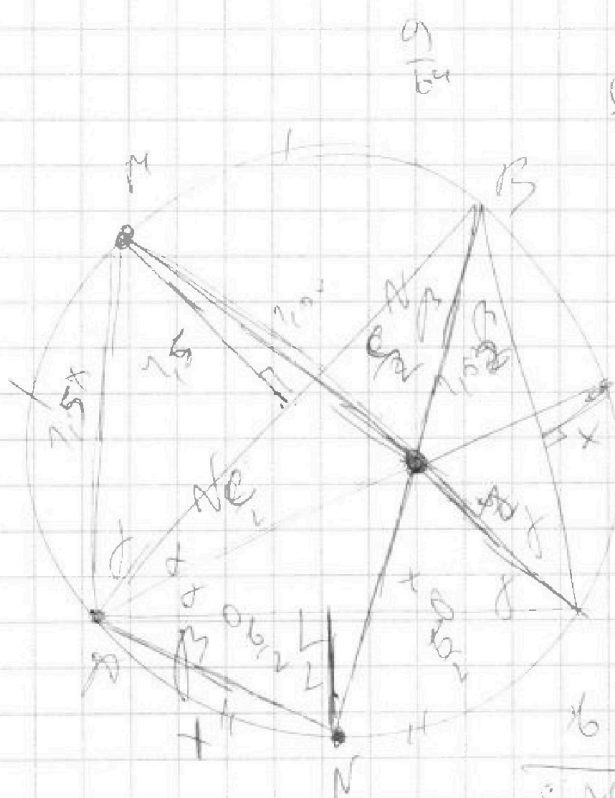


$$\sqrt{2x^2 - 3x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(x^2 - 3x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 = 4\left(x^2 - \frac{3}{4}x + 1\right) =$$

$$= 4\left(x^2 - \frac{3}{8}\right)^2 + 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2$$



$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \beta = \frac{4}{6}$$

$$\frac{9}{\cos \beta} - 9 \cos \beta = \frac{4 \cos \alpha}{\cos \beta \cos \alpha}$$

$$\frac{9}{\sin \beta} = 2R$$

$$\tan \beta = \frac{4}{6}$$

$$\frac{\sin \alpha \tan \beta}{9} = 2R$$

$$\frac{\sin \alpha \tan \beta}{9} = 2R$$

$$9 \sin \alpha \tan \beta$$

$$9 \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} = 4 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$9 \sin^2 \beta \cos \alpha = 4 \sin^2 \alpha \cos \beta$$

$$\frac{9 \cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{4 \cos^2 \alpha}{\cos \beta}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

