



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2^{14} \cdot 7^{10} < 2^{17} \cdot 7^{17} < 2 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Так как $ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$, но abc не меньше $2^{20} \cdot 7^{37}$

Если $ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$, $bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$, но $ab^2c : 2^{31} \cdot 7^{27}$

$$ab^2c : 2^{31}$$

пусть x_a - степень двойки у числа a , x_b - степень двойки у числа b ,
 x_c - степень двойки у числа c .

$$\text{Тогда } x_a + 2x_b + x_c \geq 31.$$

Для наименьшего возможного значения произведения $x_a + 2x_b + x_c = 31$.

Нужно подобрать такие x_a, x_b, x_c так, что

$$x_a + x_b + x_c - \text{минимально.}$$

При этом, так как $ac : 2^{20}$, но $x_a + x_c \geq 20$

Безусловно следующие варианты. $x_a + x_c$ должно быть нечётным,
иначе $x_a + 2x_b + x_c$ - сумма
двух чётных чисел, а 31 -
нечётное число

$x_a + x_c$	x_b	$x_a + x_b + x_c$
21	5	26
23	4	27
25	3	28
27	2	29
29	1	30
31	0	31

Можно заметить, что
минимальная сумма $x_a + x_b + x_c = 26$

Тогда abc не меньше $2^{26} \cdot 7^{37}$

Приведу пример на $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$$a = 2^9 \cdot 7^{20}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{17}$$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



По, что $\frac{a}{b}$ несократима, означает то, что у a и b нет общих множителей.
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$
 Пусть можно сократить

здесь на x . Тогда $(a+b):x$; $(a+b)^2-8ab:x$

Так как $(a+b):x$, то и $(a+b)^2:x$, тогда $8ab:x$

Пусть в x есть какой-то простой множитель p .

Тогда $(a+b):p$, $8ab:p$. Есть 3 варианта:

либо $a:p$, либо $b:p$, либо $8:p$

Первые 2 случая не подходят, так как если $(a+b):p$,
то при $a:p$ $b:p$, а при $b:p$ также $a:p$. Получается,
что a и b имеют общий множитель, противоречие.

Невозможно, $8:p$. Единственный простой делитель числа 8 — это 2. $\Rightarrow p=2$.

Тогда x — это степень двойки ~~какой-то~~ $x=2^n$, $8ab:2^n$

Почему, что ни a , ни b не делится на 2 (доказано ранее),

тогда у $8ab$ максимальная степень двойки 2^3 . Значит,
максимальное число $x=2^3=8$

Пример: $a=3$, $b=5$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{3+5}{3^2-6 \cdot 3 \cdot 5+5^2} = \frac{8}{9-90+25} = \frac{8}{34-90-56} = \frac{8}{-56}$$

$$\frac{8}{-56} \text{ можно сократить на } 8, \frac{8}{-56} = \frac{1}{-7}$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

Пусть $y = \sqrt{2x^2-5x+3}$, $t = \sqrt{2x^2+2x+1}$

Тогда $y^2 - t^2 = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = 2 - 7x$

Тогда $y - t = y^2 - t^2$

$$y - t = (y - t)(y + t)$$

Есть 2 варианта

① $y - t = 0$

② $\begin{cases} y - t \neq 0 \\ y + t = 1 \end{cases}$

вариант ①

$$y = t$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}$$

возведем обе части в квадрат

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = 2 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{2}{7}$$

Есть проверить

$$x = \frac{2}{7} \text{ в } 2x^2 + 5x + 3$$

$$\text{и } 2x^2 + 2x + 1,$$

получимся выражения
 > 0 , корни подходят

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

вариант ②

$$y + t = 1$$

$$y = 1 - t$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1}$$

возведем обе части в квадрат

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1} + 2x^2 + 2x + 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x - 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

снова возведем обе части в квадрат

$$\begin{cases} 4(2x^2+2x+1) = 49x^2 - 14x + 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 - 4 \cdot 41 \cdot 3 = 484 - 492$$

$$D < 0, \text{ корней нет.}$$

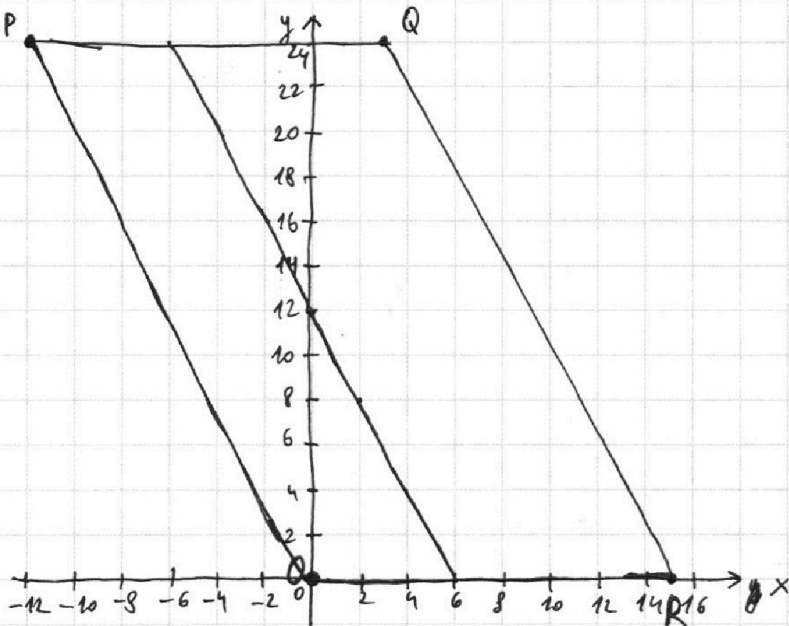
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть мы
зафиксируем
точку A
Тогда из
уравнения
 $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$
можно выразить y_2
через x_2 .

$$y_2 = -2x_2 + 12 + (2x_1 + y_1)$$

Если x_1 и y_1 уже
известны, то $2x_1 + y_1$
 $= \text{const.}$

Тогда для любых
координат точки A
точки B лежат на прямой
с коэффициентом $k = -2$
и сходятся на $12 + (2x_1 + y_1)$.

Такая прямая для $A(0; 0)$
представлена на графике

Пусть прямая PQ и прямая PO опишут функции $y = kx + b$
найдя k , где это зависит от координат точек Q и R

$$\begin{cases} 24 = 3k + b \\ 0 = 15k + b \end{cases} \text{ вычитая из 1 уравнения второе.}$$

$$24 = -12k$$

$$k = -2. \text{ Получается, что } y \text{ прямая для точек B и прямая}$$

PO и RQ одинаковый коэффициент

Тогда если точку A перемещать по оси от точки $(0; 0)$ по отрезку PO,
то количество точек B для этой точки не изменится, так как

эти 2 прямые параллельны. Значит, можно выбрать
любое количество точек A, лежащих на отрезке ^{на отрезке} PO
и для них ~~однозначно~~ найдутся точки B, лежащие на отрезке, параллельном
PO. Всего на отрезке PO ~~25~~ ¹⁰ точек с целочисленными координатами,
значит, столько точек будет на любой отрезке, параллельном PO и равной
ему. Выбрано значение для точек A — ~~40 вариантов (если $x_1 > 10$)~~, но
10 вариантов (если $x_1 > 9$,

но прямая для точек B лежит за пределами параллелограмма)

Получается, правильный ответ — это сколько вариантов выбора отрезков
для точек A умножить на количество точек B на отрезке умножить на
количество точек B на соответствующем отрезке

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Может быть задача 5

Полное общее количество вариантов — это $10 \cdot 25 \cdot 25 = 6250$

Ответ: 6250

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

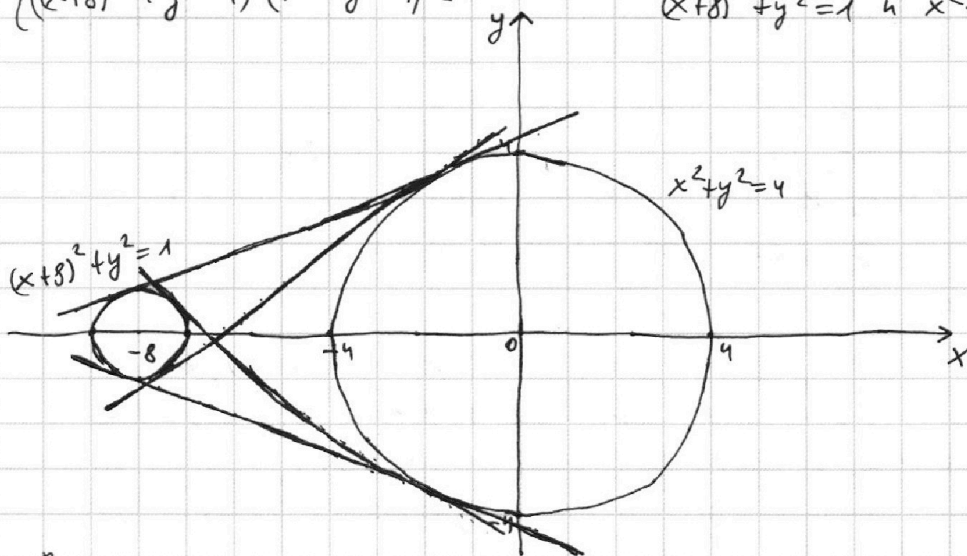
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + by + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Изобразим графики функций уравнений $(x+8)^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$



Выражение ≤ 0 если либо $(x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$ и $(x^2 + y^2 - 4) \geq 0$, либо

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \text{ и } x^2 + y^2 - 4 \leq 0$$

В первом случае на графике $(x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$ — область внутри маленького круга, $(x^2 + y^2 - 4) \geq 0$ — область вне большого круга

Пересечение этих областей — область внутри маленького круга вместе с границами.

Во втором случае на графике $(x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0$ — область вне маленького круга, $(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ — область внутри большого круга. Пересечение этих областей — область внутри большого круга вместе с границами.

Уравнение $y = ax + by + 10b$ имеет график прямой. Чтобы система была равносильна, прямая не должна проходить через окружности (все точки внутри окружностей удовлетворяют неравенству). Значит, прямая должна касаться обеих окружностей, в таком случае будет ровно 2 решения.

Нужно подобрать a , но есть уже наклон прямой.

Максимальный и минимальный углы наклона представлены на графике.

Всего есть 4 варианта, как прямая может касаться

двух окружностей \Rightarrow 4 решения

Две касательных, которые проходят сверху и снизу
двух точек касания: $x_1 + x_2 = 8$ (8 — расстояние между центрами окружностей)

$$\begin{cases} x_1 - y_1 = 3 \\ y_1 - y_2 = 3 \end{cases} \text{ (3 — разность радиусов окружностей)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 (кросс-метод)

$$\text{Итого } \begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 8 - x_1 \end{cases}$$

$$(1 - (x_1 + 8))^2 - (4 - x_2^2) = 3$$

$$1 - x_1^2 - 16x_1 - 64 - 16 + 8x_2 - x_2^2 = 3$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 16x_1 - 8x_2 = -82$$

$$x_1^2 + (8 - x_1)^2 + 16x_1 + 8x_1 - 64 = -82$$

$$x_1^2 + 64 - 16x_1 + x_1^2 + 16x_1 + 8x_1 - 64 = -82$$

$$2x_1^2 + 8x_1 + 82 = 0 \quad | :2$$

$$x_1^2 + 4x_1 + 41 = 0$$

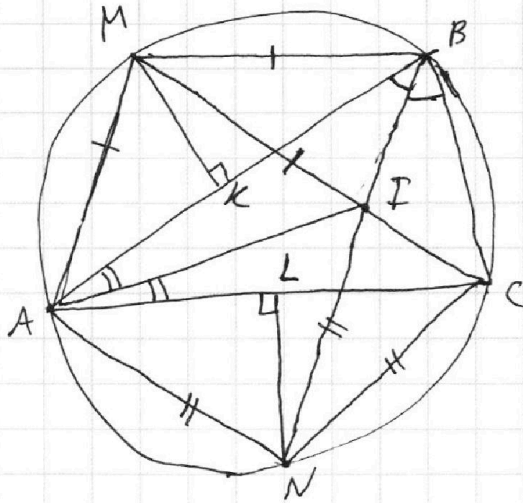
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Точка I — центр вписанной
окружности.

Отрезки, стягивающие
равные дуги, равны

$\Rightarrow AM = MB, AN = NC.$

По теореме о хордах

$AM = MB = MI$

$AN = NC = NI$

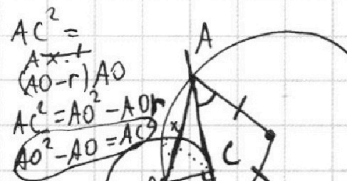
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC^2 = AO^2 - AO^2 = AO^2 - AO^2 = AC^2$$

$$AO^2 = r^2 + AC^2$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = 1 + AC^2$$

$$5 + 3 = 8$$

$$25 + 9 - 90 = 34 - 90 = -56$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 16 - 48 = -32$$

$$a^2 - (6b)a + b^2 = 0$$

$$D = 36b^2 - 4b^2 = 32b^2$$

$$D = 16 \cdot 2b^2$$

$$a_1 = \frac{6b + 4b\sqrt{2}}{2} = 3b + 2\sqrt{2}b$$

$$a_2 = \frac{6b - 4b\sqrt{2}}{2} = 3b - 2\sqrt{2}b$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a - (3 + 2\sqrt{2})b)(a - (3 - 2\sqrt{2})b)$$

Если a - цел и b - цел, но $a+b$ - цел
 $a^2 - 6ab + b^2$ - цел - не равно нулю \Rightarrow $a+b$ - не цел

$$AC:CB = 7$$

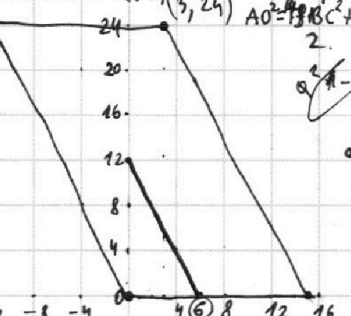
$$AC^2 = \frac{a+b}{(ab)^2 - 8ab}$$

$$AX(Ax+2r) \text{ см } a: x$$

$$AX^2 + 2AXr = (a+b):x, \text{ но } b: x$$

$$AX^2 + 2AXr = a^2 + b^2$$

$$AO^2 = AC^2 + 1$$



$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$\frac{13 \cdot 00}{URCENT}$$

$$y_2 = -2x_2 + 12$$

Если угол наклона задан, то по формуле $\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$a^2 - 6ab + b^2 = 20$$

$$a + b^2 + 2ab = 0$$

$$2 + 3 = 5$$

$$4 + 9 - 36 = -23$$

$$3 + 9 = 12$$

$$9 + 9 - 126 = -108$$

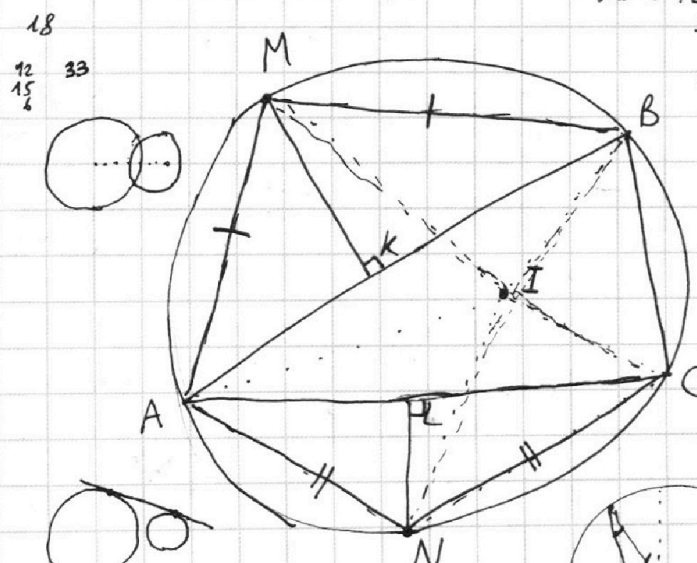
$$5 \cdot AC + 5 \cdot BC = (A+BC)$$

$$24 = 3k + b$$

$$0 = 15k + b$$

$$24 = -12k$$

$$k = -2 \quad b = 30$$



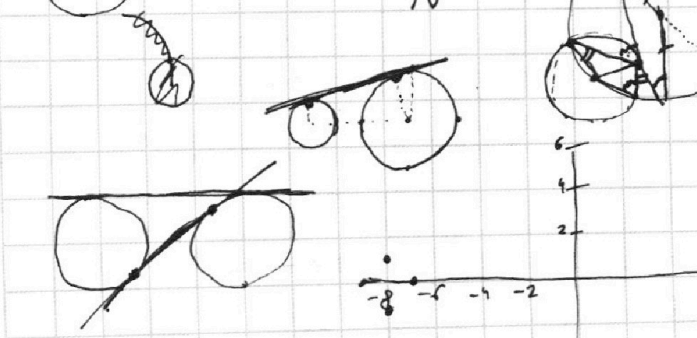
$$15 - 5 = 10$$

$$12 - 10 = 2$$

$$12 - 10 = 2$$

найти расстояние от A до центра окружности, вписанной в $\triangle ABC$

расстояние от M - 4,5
 от N - 2
 $MK = 4,5$
 $NL = 2$



Итого AI

делаю треугольник

$$\frac{AB \cdot MK}{2} = \frac{1}{2} AM \cdot AB \cdot \sin \angle MAK$$

$$\frac{AB \cdot MK}{2} + \frac{AB \cdot r}{2} = \frac{1}{2} AM \cdot AI \cdot \sin \angle MAK +$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad y = ax + 10b$$

$$x^2 + 16x + 64 + y^2 = 1$$

① < ② $16x + 67$ касательная

② > ① $-16x - 67$ касательная

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (x+8)^2 + y^2 = 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- 1 ✓
2
3
4 ✓
5
6
7

ab: $2^{14} \cdot 7^{10}$
bc: $2^{17} \cdot 7^{17}$
ac: $2^{20} \cdot 7^{37}$

$2^{14} \cdot 7^{10} < 2^{17} \cdot 7^{17} < 2^{20} \cdot 7^{37}$
abc → $2^{20} \cdot 7^{37}$
abc не меньше

10:50! 11:20 12:00

$abc^2: 2^{31} \cdot 7^{27}$
ac: 2^{20}

2. $\frac{a+b}{a^2+6ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$

$2^{31} = 2^x \cdot 2^{2y}$
 $x+2y=31$
 $x+y = \text{min}$
21 5
23 4 min
15 6

a:b gub взятно кресты.

$m \leq \min(a+b, a^2-6ab+b^2)$

8ab: a+b?

умень:
 $d = 2^{19} \cdot 7^{20}$
 $b = 2^5 \cdot 7^{17}$
 $c = 2^{10} \cdot 7^{17}$

4. $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$ | 6 баллов

$x_1+x_2 = \frac{5}{2}$
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2}$
 $x_1=1; x_2 = \frac{3}{2}$

$x_1+x_2 = -1$
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$
 $D = 4-8 < 0$

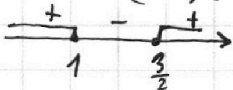
$2(x-1)(x-\frac{3}{2})$

$2x^2+2x+1$
 $2x(x+1)+1$

$2x^2-5x+3 + 2x^2+2x+1$
 $-2\sqrt{2x^2-5x+3} \sqrt{2x^2+2x+1} = 4+49x^2-24x$
 $4x^2-3x+4 - \dots = 4+49x^2-24x$
 $-2 \dots = 45x^2-24x$ | 2 балла

$2x^2-2x+1$
 $+ -3x+3$
 $(x-1)(2x-3)$

$4(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1) = 45^2 x^4 + 24^2 x^2 - 45 \cdot 2 \cdot 24 x^3$



$x=1, \sqrt{2-5+3} - \sqrt{2+2+1} \neq 2-7$
 $x=0$ ~~не подходит~~

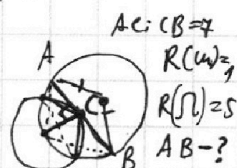
$(2x^2-5x+3) - (2x^2+2x+1) = 2-7x$

$x_1 = \sqrt{2x^2-5x+3}$
 $y_1 = \sqrt{2x^2+2x+1}$

$x_1 - y_1 = x_1^2 - y_1^2$
 $x_1 - y_1 = (x_1 - y_1)(x_1 + y_1)$

$-5x+3=1-2x+1$
 $-7x+3=2-2x+1$
 $-7x+1=-2x+1$
 $\bullet = 7x-1$

① $x_1 - y_1 = 0$
② $x_1 + y_1 = 1$



① $2x^2-5x+3=2x^2+2x+1$
 $7x=2; x = \frac{2}{7}$

② $x_1 + y_1 = 1$
 $2x^2-5x+3 = 1 + (2x^2+2x+1) - 2\sqrt{2x^2+2x+1}$
 $-5x+3 = 2+2x$
 $3x-1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$\frac{22}{22}$
 $\times \frac{22}{22}$
 $\hline 44$
 $+ 44$
 $\hline 484$

$\frac{12}{41}$
 $\times \frac{12}{41}$
 $\hline 144$
 $+ 12$
 $\hline 482$

6. $y = ax + 10b$

$49x^2+1-14x = 4(2x^2+2x+1)$
 $49x^2+1-14x = 8x^2+8x+4$
 $41x^2-22x-3=0$
 $x_1+x_2 = \frac{22}{41}$
 $x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{41}$