МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^{15}7^{11}$, $bc$ делится на $2^{17}7^{18}$, $ac$ делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем $m$ могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на $m$?

3. [4 балла] Центр окружности $\omega$ лежит на окружности $\Omega$, хорда $AB$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $C$ так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину $AB$, если известно, что радиусы $\omega$ и $\Omega$ равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник $ABC$ вписан в окружность. Пусть $M$ – середина той дуги $AB$ описанной окружности, которая не содержит точку $C$; $N$ – середина той дуги $AC$ описанной окружности, которая не содержит точку $B$. Найдите расстояние от вершины $A$ до центра окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если расстояния от точек $M$ и $N$ до сторон $AB$ и $AC$ соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11} \\ bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{18} \\ ac \vdots 2^{23}\cdot 7^{39} \end{cases}$$

1) Если в (например в числе $a$) есть мн-тель не равный 2 или 7, то для поиска минимального $abc$, мы возьмём $a$ равное числу „$a$" делённому на этот „лишний" мн-тель; произведение $abc$ уменьшится, а кратность ~~попар~~ парных произведений ~~не~~ на 2 и 7 не изменится.

Тогда выразим $a$; $b$ и $c$:

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$ ; $b = 2^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$ ; $c = 2^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$ ; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \geqslant 0$

Тогда

$$\begin{cases} ab = (2^{\alpha_1+\alpha_2}\cdot 7^{\beta_1+\beta_2}) \vdots 2^{15}\cdot 7^{11} \\ bc = (2^{\alpha_2+\alpha_3}\cdot 7^{\beta_2+\beta_3}) \vdots 2^{17}\cdot 7^{18} \\ ac = (2^{\alpha_1+\alpha_3}\cdot 7^{\beta_1+\beta_3}) \vdots 2^{23}\cdot 7^{39} \end{cases} ; \text{ сл-но}$$

2) $\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geqslant 15 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geqslant 17 \\ \alpha_1+\alpha_3 \geqslant 23 \end{cases}$ $2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \geqslant 55$, т.к. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}$, то $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geqslant 28$. Для минимальности $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 28$. Пример: $\alpha_1 = 11$; $\alpha_2 = 4$; $\alpha_3 = 13$

$\alpha_1+\alpha_2 = 15 \geqslant 15$; $\alpha_2+\alpha_3 = 17 \geqslant 17$; $\alpha_1+\alpha_3 = 24 \geqslant 23$

3) $\begin{cases} \beta_1+\beta_2 \geqslant 11 \\ \beta_2+\beta_3 \geqslant 18 \\ \beta_1+\beta_3 \geqslant 39 \end{cases}$ ; $2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \geqslant 68$; $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant 34$ - а это условие уже выполняется при $\beta_1+\beta_3 = 39$. Пример:

$\beta_1+\beta_2+\beta_3 = \beta_1+\beta_3 = 39$ ; $\beta_1 = 15$ ; $\beta_2 = 0$ ; $\beta_3 = 24$

$abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} = 2^{28}\cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 1) $\frac{a}{b}$ - несократима. Найдем макс. $m$ на которую можно сократить $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$.

Если дробь можно сократить на $m \in \mathbb{N}$, $m>1$, то $(a+b) \vdots m$ и $(a^2-7ab+b^2) \vdots m$. Причём по усл. из выражения $(a+b) \vdots m \Rightarrow a \not\vdots m; b \not\vdots m$

Если у $a$ есть общий простой множитель $p$ с числом $m$, то $(\underbrace{a}_{\vdots p}+b) \vdots \underbrace{m}_{\vdots p}$, то и $b \vdots p$, что невозможно, т.к. $\frac{a}{b}$ - несократима. Сл-но $НОД(a;m)=1$; $НОД(b;m)=1$ (аналогично с $b$).

2) $(a+b) \vdots m$. Рассмотрим $a^2-7ab+b^2 = (\underbrace{(a+b)^2}_{\vdots m} - \underbrace{9ab}_{\vdots m}) \vdots m$, сл-но $9ab$ должно быть кратно $m$. а т.к. $НОД(a;m)=НОД(b;m)=1$, то $9 \vdots m$. Сл-но максимальное $m=9$

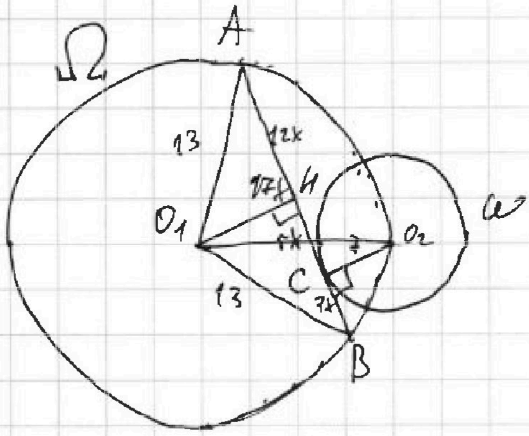
Пример $\frac{4}{5}$ - несокр; $\frac{4+5}{16+25-7\cdot4\cdot5} = \frac{9}{41-140} = -\frac{9}{\underbrace{99}_{\vdots 9}} = -\frac{1}{11}$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!




Дано: $\Omega$; $\omega$ - окр-сть
$\Omega(O_1; 13)$; $\omega(O_2; 7)$
$O_2 \in \Omega$
AB - хорда $\Omega$ и касательная к $\omega$ в т C.
$AC = 17x$; $BC = 7x$

Найти:
AB

Решение:

1) Проведем $O_1H \perp AB$. $H \in AB$. По св-ву высоты, проведенной к радиусу $AH = HB = 12x$. $HC = 12x - 7x = 5x$

Проведем $O_1O_2 = 13$

$169 = 144x^2 + O_1H^2$

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

Замена: $\sqrt{3x^2-6x+2}=a$; $\sqrt{3x^2+3x+1}=b$; $a,b\geq 0$

Заметим, что $a^2-b^2 = 3x^2-6x+2-3x^2-3x-1 =$

$= 1-9x = a-b$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)=a-b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0\\ a+b=1\end{array}\right.$

1) При $a-b=0$; $\cancel{a=b}$

$a-b=1-9x=0$; $x=\frac{1}{9}$. Проверка:

$\sqrt{3\cdot\frac{1}{81}-6\cdot\frac{1}{9}+2} - \sqrt{3\cdot\frac{1}{81}+3\cdot\frac{1}{9}+1} = \sqrt{\frac{1}{27}-\frac{2}{3}+2} - \sqrt{\frac{1}{27}+\frac{1}{3}+1} =$

$=\sqrt{\frac{1}{27}+\frac{4}{3}} - \sqrt{\frac{1}{27}+\frac{4}{3}}=0$, сл-но $\underline{x=\frac{1}{9}}$ - корень

2) $a+b=1$ Обр. замена

$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1\geq 0$

$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1+2\sqrt{(3x^2+3x+1)(3x^2-6x+2)}=1$

$6x^2-3x+3+2\sqrt{(3x^2+3x+1)(3x^2-6x+2)}=1$

~~Рассмо~~

$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$

Рассмотрим $\sqrt{3x^2+3x+1}$.

Найдем минимум подкоренного выражения. $3x^2+3x+1$ - парабола ветви вверх; минимум в вершине

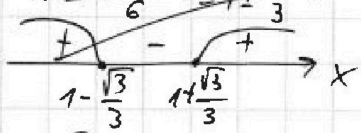
$x_в = -\frac{3}{}$

ОДЗ:

1. $3x^2-6x+2\geq 0$

$D=36-8\cdot 3=12$

$x=\frac{6\pm\sqrt{12}}{6}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$




2. $3x^2+3x+1\geq 0$

$D=9-12=-3<0$

Сл-но $3x^2+3x+1\geq 0$ при $x\in R$

$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

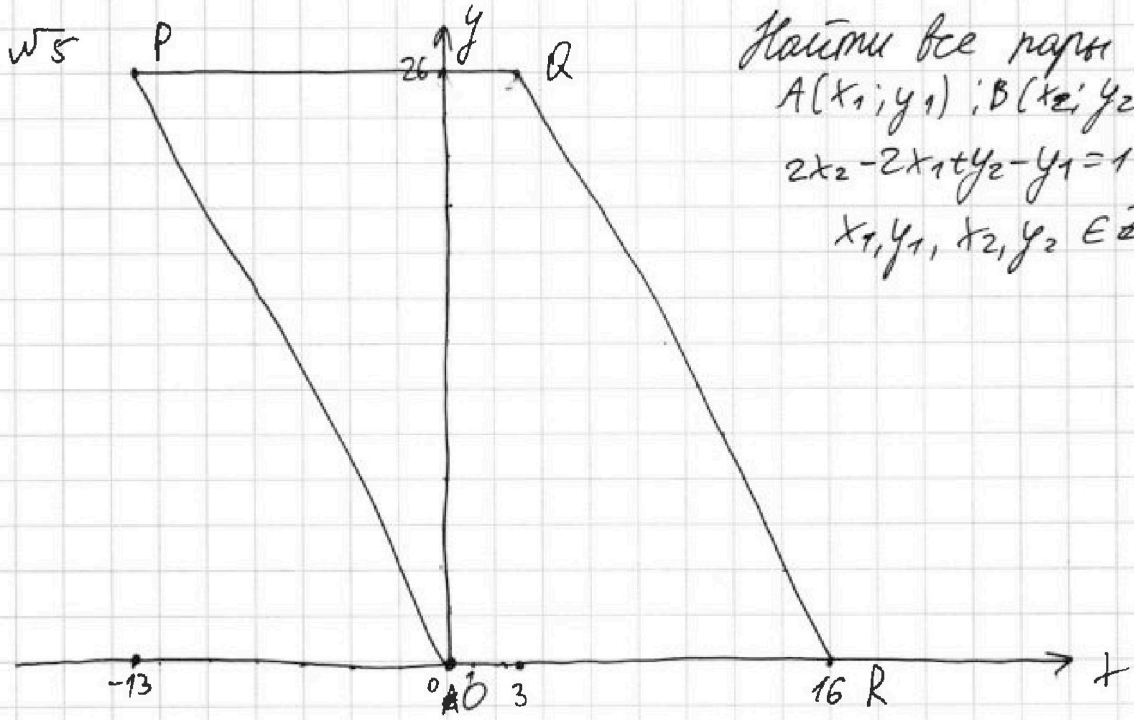
МФТИ

№5

Найти все пары $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$

$x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$




$2x_2+y_2=2x_1+y_1+14=b$, $b$-параметр. $b\in\mathbb{Z}$

$2x_2+y_2-b=0$; $2x_1+y_1-b+14=0$.

$y_2=-2x_2+b$; $y_1=-2x_1+b-14$. Сл-но ~~для~~ ~~мн~~ нужно найти для произвольных $x_2$ и $y_2$ лежащих на прямой $y=-2x+b$ все точки принадл. прямой $y=-2x+b-14$. Пусть у них координаты $(x_1;y_1)$

$y_2-y_1=-2x_2+b+2x_1-b+14$

$y_2-y_1+2(x_2-x_1)=14$ - выполняется условие.

$b\in[0;32]$, т.к. точки внутри пар-ма

при $b\in[0;13]$, для $y_2=-2x_2+b$, не найдётся внутри пар-ма прямая $y_1=-2x_1+b-14$. Для каждого $b\in[14;32]$ найдётся прямая $y=-2x+b-14$. Заметим, что наклоны $OP$; $QR$ и прямых $y=-2x+b$; $y=-2x+b-14$ равн. На паралл. прямой внутри или на стороне пар-ма всего 13 точек. Сл-но всего пар $13^2\cdot(33-14)=$

$=169\cdot19=3211$

Ответ: 3211

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6 1) $\begin{cases} ax+y-8b=0 & (2)\\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 & (1)\end{cases}$

(1): $x^2+y^2=1$ — окр-сть $\omega_1(O_1;R_1)$ $O_1(0;0)$; $R_1=1$

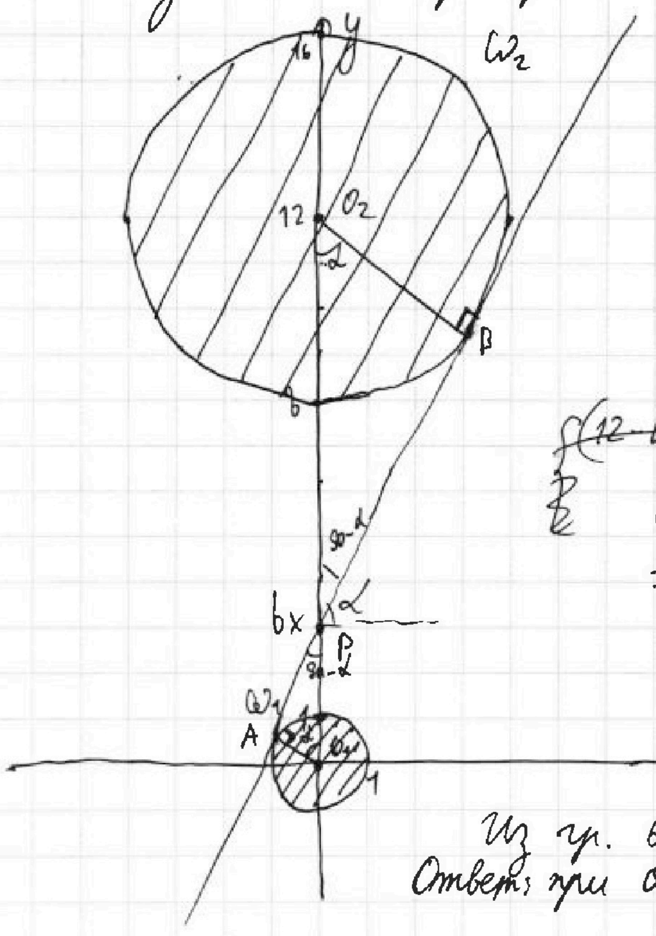
$x^2+(y-12)^2=16$ — окр-сть $\omega_2(O_2;R_2)$; $O_2(0;12)$; $R_2=4$

(1). $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2+y^2<1 \text{ — внутри } \omega_1 \\ x^2+(y-12)^2>4 \text{ — вне } \omega_2\end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2>1 \text{ — вне } \omega_1 \\ x^2+(y-12)^2<4 \text{ — внутри } \omega_2 \end{cases}\end{array}\right.$ или границы $\omega_1$; $\omega_2$

2) $ax+y-8b=0$

$y=-ax+8b$ — гр. прямая.




г) Проверим „граничную" прямую, угловой коэффициент $k$ которой явл. мин. возможным для 2 решений системы.
У нее будет угловой коэффициент $a_x$. При $a\in[0;a_x)$ система имеет $\le 1$ реш.

Для $a_x$ найдется $b_x$.

~~$(12-b_x)^2=R_2^2+$~~ $a_x=tg\alpha$

$tg\alpha=\frac{BP}{R_2}=\frac{AP}{R_1}$; $\begin{cases} BP\cdot R_1=AP\cdot R_2 \\ AP+BP= \end{cases}$

$=(R_1+R_2)\cos\alpha+AP\sin\alpha+BP\cdot\sin\alpha$

$BP=4AP$. $5AP=5\cos\alpha+5AP\sin\alpha$

$AP(1-\sin\alpha)=\cos\alpha$

$AP=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$

$tg\alpha=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$ ; $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$

~~$\sin\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$~~

Из гр. $b_x=3$, $a_x\approx 2$. Сл-но

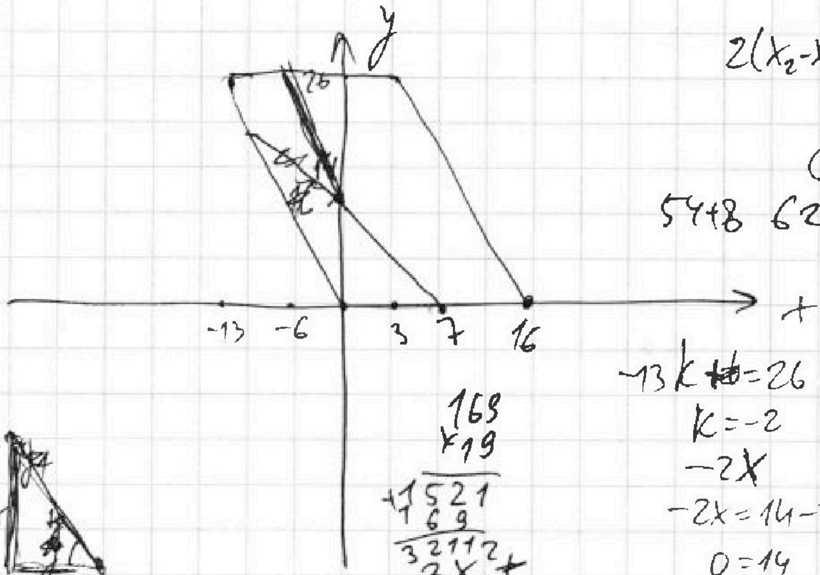
Ответ: при $a\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ




$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=14$

$y=14-2x$

$54+8\ \ 62$

$14-2x=0$

$x=7$

$+\ 1521$
$169$
$3271$

$-13k+b=26$

$k=-2\qquad 13\cdot13$

$-2x$

$-2x=14-2x$

$0=14$

$14-2x=26$

$2x=-12$

$x=-6$

$y=14+12=$

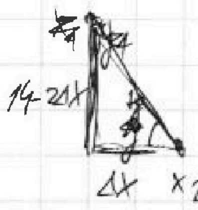
$14+y_1+2x_1=0$

$169$
$\times19$
$+1521$
$169$
$32111$
$3x^2+$

$-6x+2=3x+1$

$9x=1$

$x=\frac{1}{9}$




$\frac{14}{\Delta x}-2=k$

$14-2\Delta x=k\Delta x$


$x_2-x_1$

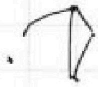
$14-2(x_2-x_1)=y_2-y_1$

$x_2-x_1\ x_2;y_2$

$2\Delta x+\Delta y=14$

$(x_2-x_1;\ 14-2(x_2-x_1))$

$\frac{13^2}{2}$



$x_1\ y_1$
$0;7$
$-6;26$
$x_2\ y_2$

$\cancel{14x_1}\ 14-2x_1=y_1$

$14-2x_2=y_2$

$14+2x_2$

$3-6+2$

$y_1+2x_1+7=y_2+2x_2-7$

$3x^2-6x+2$

$\frac{6}{6}$

$12\quad -12+19-14=-7$

$33-14$
$33$
$-14$
$19$

$y_1=k_1x_1+b_1$
$y_2=k_2x_2+b_2$

$y_1=kx_1+b_1$
$y_2=kx_2+b_2$

$\cancel{y_1-y_2}$

$y_2-y_1=k(x_2-x_1)+b_2-b_1$

$y_2-y_1=-2(x_2-x_1)+(b_2-b_1)$

$14$

$1\quad 75$
$75$
$75$
$+\ 15$
$2,25$

$3\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{2}+1$

$\frac{3}{4}+1{,}5=$

$3x^2+3x+1$

$\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$

$3x(x+1)$

$\cancel{3-16+2-11}\quad 3\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{2}+1$

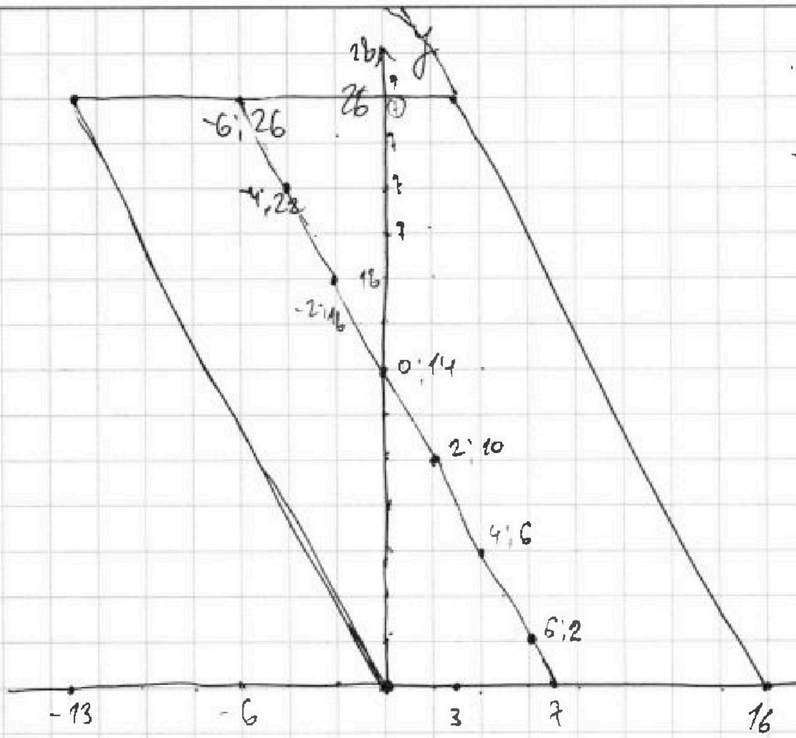
$=\frac{3}{4}-1{,}5+1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ




$y_2 - y_1 = 14 - 2(x_2 - x_1)$

$-13;26 \quad -6;26$

$0 = 14 - 2(7)$

~~$y = kx + 6$~~

$-13 \ 26 \quad 0;16$

$\cancel{40}\ -10 = 14 - 2(13)$

$-10 = 14 - 26$

$0;0 \quad 0,16$

$0 = 14 - 2 \cdot 16$

$16+13$

$29$

$y_1 = y_2 \quad 2(x_2 - x_1) = 14$

$x_2 - x_1 = 7$

$26$

$2\Delta x = -12$

$\Delta x = -6$

$-13-16$

$y_1 + 2x_1 + 14 = 2x_2 + y_2 = b$

~~$2(\Delta)$~~ $2\Delta x = 14 - \Delta y$

$\Delta x \in [-25; 25]$

$\begin{cases} y_1 + 2x_1 + 14 + b = 0 \\ y_2 + 2x_2 + b = 0 \end{cases}$

$y_2 + 2x_2 - 7 = y_1 + 2x_1 + 7$

$y \quad k_2 x_2 + b_2 + 2x_2 - 7 = k_1 x_1 + b_1 + 2x_1 + 7$

$y_1 = -2x_1 + 14 - b$

$-13 \ 26 \quad 3 \ 26$

$y_2 = -2x_2 - b$

$0 = 14 - 2(3+13)$

$x_1 y_1 \quad y = (-2x - b) + 14$

$x_2 y_2 \quad y = (-2x - b) + 14$

$y_2 - y_1 = -2x_2 - b + 2x_1 - 14 + b$

$-2x_1$

$14 + \quad y_2 - y_1 =$

$y_1 + 2x_1 + 14 = 2x_2 + y_2$

$y_2 - y_1 + 2(x_2 - x_1) = 14$

$y_1 = -2x_1 - 14 - b$

$y_2 = -2x_2 - b$

$y_2 - y_1 + 2(x_2 - x_1) = 14$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ax+y-86=0$

$y=-ax+86$

$\begin{cases} 25x^2+y^2+14y=120 \\ 144x^2+y^2=169 \end{cases}$

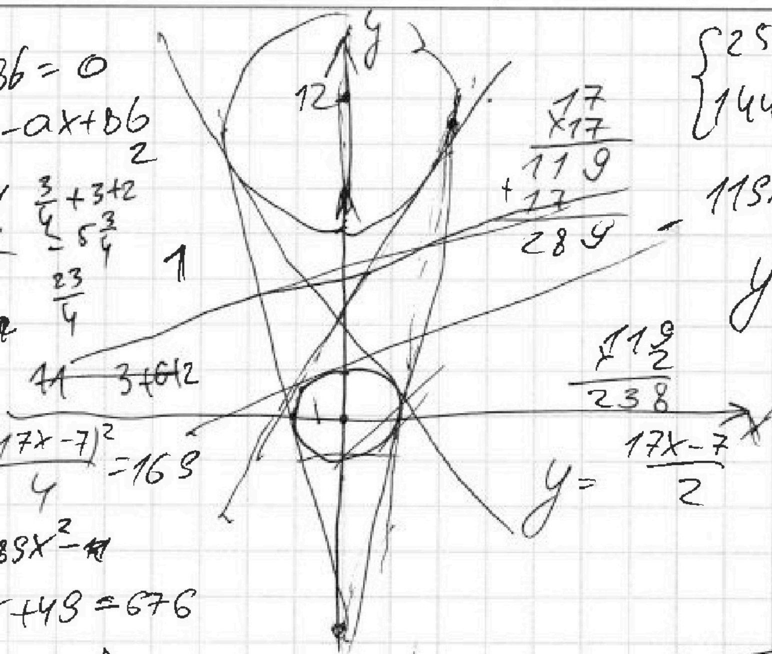
$144 \cdot 4 = 576$

$\frac{3}{4}+3+2 = 5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$

$17 \cdot 17 = 289$

$119x^2+14y=49$

$y=\frac{119x^2-49}{14}$




$119 \cdot 2 = 238$

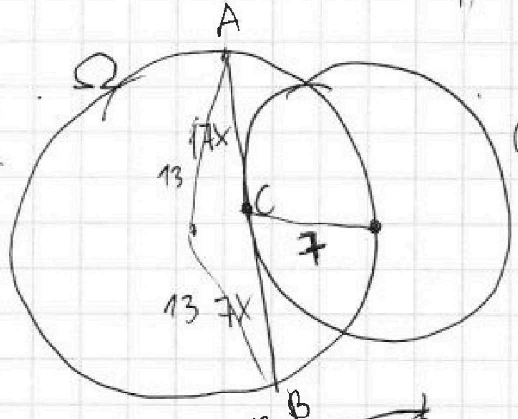
$11-18=-7$

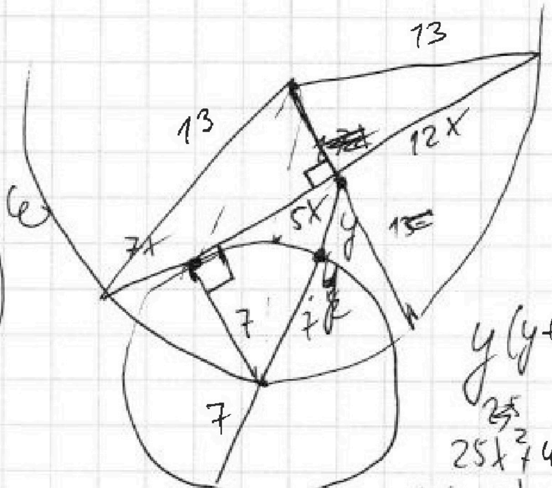
$144x^2+\frac{(17x-7)^2}{4}=169$

$y=\frac{17x-7}{2}$

$576x^2+289x^2-238x+49=676$

$169 \cdot 4 = 676$



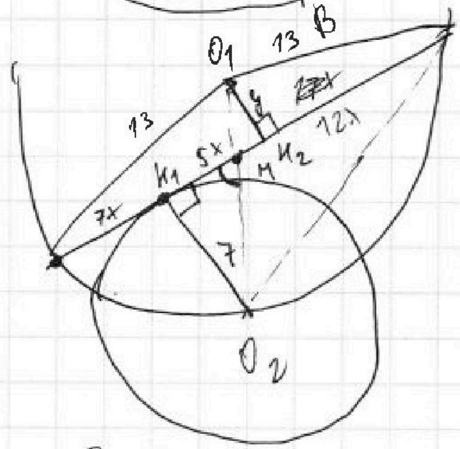

$y(y+14)=25x^2$

$25x^2+49=(7+y)^2$

$y(y+7)+49=(y+7)^2$

$y^2+14y+49=y^2+7y+49$

$y^2+14y=\cancel{y^2+14y+49}$




$\sqrt{y^2+MH_2^2}+\sqrt{49+MH_1^2}=13$

$MH_1+MH_2=5x$

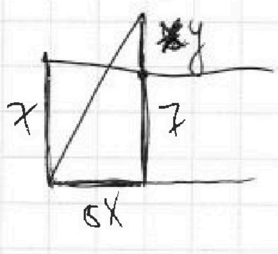
$17^2x^2-49$

$(5x)^2+(y+7)^2=169$

$144x^2+y^2=169$

$25x^2+y^2+14y+49=169$

$144x^2+y^2=169$




~~$169x^2+2y^2+14y+49$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

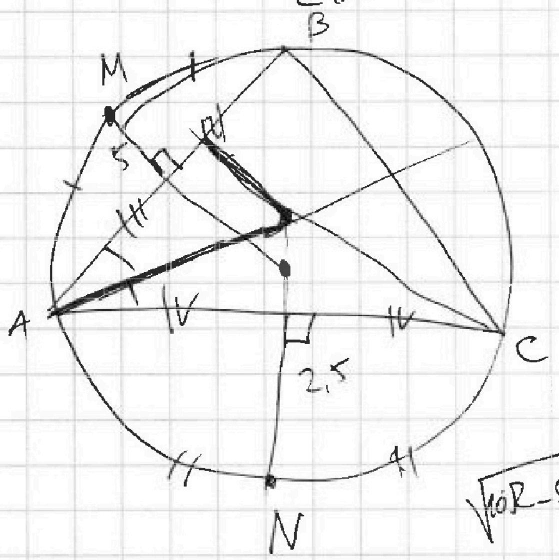
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$576x^2+289x^2-238x+49-676=0$

$865x^2-238x-627=0$

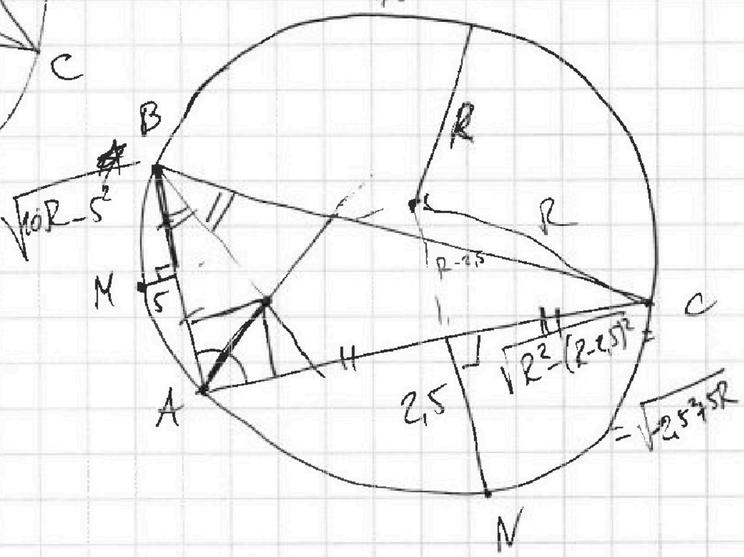
$24x-?$




$576+289=865$

$676-49=627$

$17-6=11$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-6x+2}=a$

$a^2=3x^2-6x+2$

$b^2=3x^2+3x+1$

$a^2-b^2=-9x+1$

$y_1=kx_1+b$

$y_2=kx_2+b$

$k(x_2-x_1)=y_2-y_1$

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=(3x^2-6x+2-3x^2-3x-1=$

$=1-9x$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=a-b=\boxed{\sqrt{a}-\sqrt{b}}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$

$a-b=a^2-b^2$

$3\cdot\frac{1}{9}-6\cdot\frac{1}{9}+2=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+2=\frac{5}{3}$

$S=B+\frac{\Gamma}{2}-1$

$3\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{9}+1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+1=\frac{5}{3}$

$57 \cdot 16$: $342+57=912$, $912+144=1056$

$1056 \,|\, 2$; $528 \,|\, 2$; $264 \,|\, 4$; $66 \,|\, 2$; $33 \,|\, 3$; $11$

$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1+2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}=1$

$6x^2-3x+1+2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}=1$

$2\sqrt{\cancel{6x^2-3x}}$

$2\sqrt{\dots\dots}=3x-6x^2$

$3x-6x^2\geq 0$

$x-2x^2\geq 0$

$x(1-2x)\geq 0$

$x(\frac{1}{2}-x)\geq 0$

$x(x-\frac{1}{2})\leq 0$

$+\quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad +$

$4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)=9x^2-36x^3+36x^4$

$4(\cancel{9x^4}+\cancel{9x^3}+3x^2-\cancel{18x^3}-18x^2-6x+\cancel{2x}3x^2+3x+1)=$

$=9x^2-36x^3+36x^4$

$\cancel{36x^4}-36x^3-48x^2-12x+4=\cancel{36x^4}-36x^3+9x^2$

$-48x^2-12x+4=9x^2$

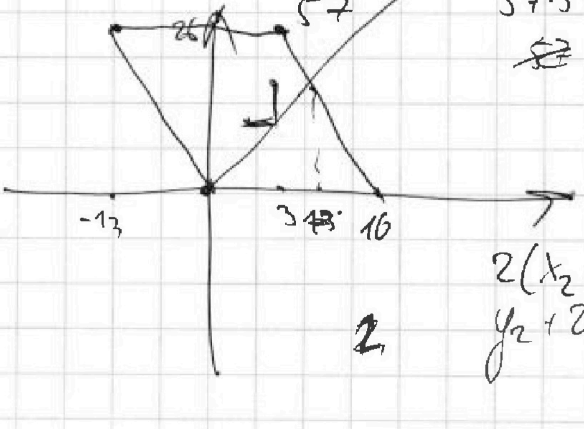
$57x^2+12x-4=0$

$D=144+16\cdot 57=144+912=$

$=1056=8^2\cdot 66$

$x=\frac{-12\pm 8\sqrt{66}}{57}$

$\frac{8\sqrt{66}-12}{57}$ $\quad \frac{64\cdot 66-144}{57\cdot 57}$ $\quad \frac{1}{2}$




$2x_2+y_2-(2x_1+y_1)=14$

$76\cdot 26$

$76\cdot 26$: $26\cdot 16$: $216+26=476$

$2(x_2-x_1)+y_2-y_1=14$

$y_2+2x_2=14+y_1+2x_1$

2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a; b; c$ $ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$ ; $bc \vdots 2^{17}\, 7^{18}$ $16+25-7\cdot 4\cdot 5$

$ac \vdots 2^{23}\, 7^{39}$ $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ $(km+r)^2 = k^2m^2+2kmr+r^2$ $17+23+15=56$

$\alpha_1=11$ $\alpha_3=13$ $\alpha_2=4$ 7 49

$ab \geq 2^{15}\cdot 7^{11}$; $bc \geq 2^{17}\, 7^{18}$; $ac \geq 2^{23}\cdot 7^{39}$

$a^2b^2c^2 \geq 2^{55}\cdot 7^{68}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{9}{}$

$abc \geq 2^{28}\cdot 7^{34}$

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}\cdot k_1$

$b = 2^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}\cdot k_2$

$c = 2^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}\cdot k_3$

$abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}\cdot k_1k_2k_3$

$a+b \equiv 0 \pmod m$

$(a+b)^2 \equiv 0 \pmod m$

$\to 9ab \equiv 0 \pmod m$

$9ab \vdots m$

$C = 2^{13}\cdot 7^{23}$

$a = 2^{11}\cdot 7^{16}$

$b = 2^5\cdot 7$

$9(k_1m+r_1)(k_2m+r_2) \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$

$\alpha_1+\alpha_2 \geq 15$

$\alpha_2+\alpha_3 \geq 17$

$\alpha_3+\alpha_1 \geq 23$

$2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \geq 55$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 28$

$\beta_1+\beta_2 \geq 11$

$\beta_2+\beta_3 \geq 18$

$\beta_3+\beta_1 \geq 39$

$2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \geq 68$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 34$

$\beta_1 = 15$

$\beta_3 = 24$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geq 15 \\ \beta_1+\beta_2 = 11 \\ \alpha_2+\alpha_3 = 17 \\ \alpha_3+\alpha_1 = 23 \\ a = 2^{11}\cdot 7^{15} \\ b = 2^4\cdot 7 \\ c = 2^{13}\cdot 7^{24} \end{cases}$$

$\frac{a+b}{9ab}$ $\frac{1}{9b}+\frac{1}{9a}$

$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b}$ $\frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b-\frac{9ab}{a+b}$

$a^2-7ab+b^2$ $9ab \vdots (a+b)$

$D = 49b^2-4b^2 = 45b^2$

$a = \frac{7b \pm 3b\sqrt5}{2}$

$\frac{4}{5}$ $\frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99}$

$a+b \vdots m \vdots p^\alpha$

$a \not\vdots m = p^\alpha$

$b \not\vdots m$

$a+b=45$

$\frac{22}{23}$ $23$ $\frac{12}{}$ $\frac{3}{4}$ 7

$22^2+23^2 = 484+529$

$\sqrt{3x^2-6x+2}+9x = 1+\sqrt{3x^2+3x+1}$

$3x^2-6x+2+81x^2+18x\sqrt{3x^2-6x+2} = 2+3x^2+3x+2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$84x^2-6x+2+18x\sqrt{3x^2-6x+2} = 3x^2+3x+2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$81x^2-9x+2+18x\sqrt{3x^2-6x+2} = 2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$D = 81-4\cdot 2\cdot 81$

$-3x-6x^2=2$ $D = 9-4\cdot 2\cdot 6$