



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1. Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

Решение: $ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc : 7^{37} (1)$. Пусть α - степень

вхождения 2 в a , β - степень вхождения 2 в b ,

γ - степень вхождения 2 в c . Тогда $\alpha + \beta \geq 14$

($ab : 2^{14}$), $\beta + \gamma \geq 17$ ($bc : 2^{17}$), $\alpha + \gamma \geq 20$ ($ac : 2^{20}$).

Следовательно, $2(\alpha + \beta + \gamma) \geq 14 + 17 + 20 = 51 \Rightarrow$

$\alpha + \beta + \gamma \geq 26$. Это есть $abc : 2^{26} (2)$. Из (1) и

(2) имеем, что $abc : 2^{26} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$.

Пример: $a = 2^9 \cdot 7^{20}$, $b = 2^6$, $c = 2^{11} \cdot 7^{17}$. $ab = 2^{15} \cdot 7^{20} : 2^7$,

$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} : 2^{17} \cdot 7^{17}$, $ac = 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} \cdot 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2. Из условия следует, что $(a, b) = 1$. А
нужно найти максимально возможное
значение $(a+b, a^2 - 6ab + b^2)$. Имеем $(a+b,$
 $a^2 - 6ab + b^2) = (a+b, a^2 - 6ab + b^2 - (a+b)^2) = (a+b,$
 $-8ab) = (a+b, 8ab)$. Так как $(a+b, a) = (a, b) = 1$
и $(a+b, b) = (a, b) = 1$, то $(a+b, 8ab) = (a+b, 8)$.
Тогда понятно, что $m \leq (a+b, a^2 - 6ab + b^2) =$
 $= (a+b, 8) \leq 8$. Пример: $a=7, b=1$. Тогда $a+b=8$,
а $a^2 - 6ab + b^2 = 7^2 - 6 \cdot 7 + 1 = 7 + 1 = 8$ — оба числа
делятся на 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

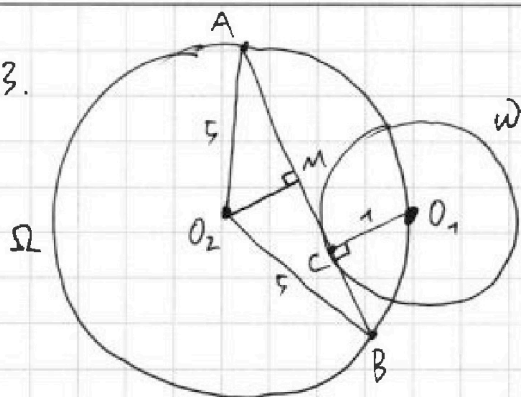
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 3.



Пусть O_1 - центр ω ,
 O_2 - центр Ω , M - середина AB . O_2AB - равнобедренный $\Rightarrow O_2M$ - высота, медиана и биссектриса в нем, Пусть $\angle AO_2M = \angle MO_2B = \alpha$. Ясно, что O_1 и O_2 лежат по разные стороны от $AB \Rightarrow \angle AO_1B = 180 - \alpha$. Кроме этого, $O_1C \perp AB$, т.к. AB касается ω в точке C , а O_1 - центр ω .

Пусть $BC = x$. Тогда $AC = 7x$, $AB = 8x$, $AM = MB = 4x$.

$$AO_1 = \sqrt{AC^2 + CO_1^2} = \sqrt{49x^2 + 1}, \quad O_1B = \sqrt{BC^2 + O_1C^2} = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \cos \angle AO_1C = \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}}, \quad \sin \angle AO_1C = \frac{7x}{\sqrt{49x^2 + 1}}, \quad \cos \angle CO_1B = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \sin \angle CO_1B = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Тогда $\sin \angle AO_1B = \sin(\angle AO_1C + \angle CO_1B) =$

$$\sin \angle AO_1C \cdot \cos \angle CO_1B + \sin \angle CO_1B \cdot \cos \angle AO_1C = \frac{7x}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1}} = \frac{7x + x}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1}} \Rightarrow \sin \alpha = \sin(180 - \alpha) = \frac{8x}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1}}$$

Кроме этого, $\sin \alpha = \sin \angle AO_2M = \frac{AM}{O_2A} = \frac{4x}{5}$. Следовательно

$$\text{но, } \frac{4x}{5} = \frac{8x}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1}} \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1} = 10 \Rightarrow (x^2 + 1)$$

$$(49x^2 + 1) = 100 \Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1) \cdot$$

$$(x^2 + \frac{99}{49}) = 0 \stackrel{x^2 + \frac{99}{49} > 0}{\Rightarrow} x^2 = 1 \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} x = 1. \text{ Тогда } AB = 8x = 8. \text{ Ответ: } 8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sim 4. \text{ OДЗ: } \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-\frac{3}{2}) \geq 0 \\ x^2 + (x+1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x-\frac{3}{2}) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty).$$

Решение: денотим обе части уравнения на

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$. Получим:

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x) (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2 - 7x = (2 - 7x) (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$2 - 7x = 0 \Rightarrow 2 = 7x \Rightarrow x = \frac{2}{7}. \quad \frac{2}{7} < 1 - \text{подходит по ОДЗ}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 = 1$$

$$4x^2 - 7x + 4 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = -4x^2 + 3x - 3$$

При условии, что $-4x^2 + 3x - 3 \geq 0$ (1) возводим
обе части в квадрат:

$$4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = 16x^4 + 9x^2 + 9 - 24x^3 + 24x^2 - 18x$$

$$4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3) = 16x^4 - 24x^3 + 33x^2 - 18x + 9$$

$$4(4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) = 16x^4 - 24x^3 + 33x^2 - 18x + 9$$

$$16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12 = 16x^4 - 24x^3 + 33x^2 - 18x + 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 484 + 492 = 976 = 16 \cdot 61$$

$$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

Условие (1) равносильно, $x \in \left[\frac{-3 + \sqrt{57}}{-8}; \frac{-3 - \sqrt{57}}{-8} \right]$.

$$\frac{22 + 4\sqrt{61}}{82} < \frac{22 + 4\sqrt{64}}{82} = \frac{54}{82} < 1 = \frac{3+5}{8} = \frac{3 + \sqrt{25}}{8} < \frac{3 + \sqrt{57}}{8}$$

$$\frac{22 + 4\sqrt{61}}{82} > 0 = \frac{-3+3}{-8} > \frac{-3 + \sqrt{57}}{-8}$$

корень $\frac{22 + 4\sqrt{61}}{82}$ подходит и по ODZ и по условию 1.

$$\frac{22 - 4\sqrt{61}}{82} < \frac{22 + 4\sqrt{61}}{82} < 1 < \frac{3 + \sqrt{57}}{8}$$

$$\frac{22 - 4\sqrt{61}}{82} > \frac{22 - 4\sqrt{64}}{82} = \frac{22 - 32}{82} = \frac{-10}{82} > \frac{-10}{80} = -\frac{1}{8} > -\frac{4}{8} =$$

$$= \frac{3-7}{8} > \frac{3 - \sqrt{57}}{8}$$

корень $\frac{22 - 4\sqrt{61}}{82}$ также подходит по ODZ и условию,

Ответ: $\frac{2}{7}, \frac{22 + 4\sqrt{61}}{82}, \frac{22 - 4\sqrt{61}}{82}$

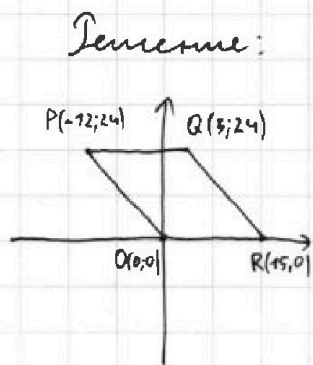
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение: Зафиксируем точку A с координатами $(x_1; y_1)$ (x_1, y_1 - целые) внутри параллелограмма.

Рассмотрим одну из точек $B(x_2; y_2)$, которая образует с A искомого пару.

Тогда $y_2 = -2x_2 + (12 + 2x_1 + y_1)$, т.е.

B лежит на прямой, заданной уравнением

$y = -2x + (12 + 2x_1 + y_1)$. Пусть $t = 12 + 2x_1 + y_1$ ($t \in \mathbb{Z}$)

Заметим, что уравнение прямой PO : $y = -2x$,

уравнение прямой QR : $y = -2x + 30$. Поэтому,

t - целое от 0 до 30. При этом, если t - четно,

то пару с A образуют 13 точек (с ординатами

$0, 2, \dots, 24$), иначе 12 точек (с ординатами $1, 3, \dots, 23$).

~~Решение~~ Ответ. Найдем сколько точек A удо-

влетают $12 + 2x_1 + y_1 = t$. Тогда эти точки

лежат на прямой $y = -2x + t - 12$. Как ранее

$t - 12 \in [0; 30]$. Поэтому t на самом деле прини-

мает целые значения от 12 до ³⁰ 24. Из них

¹⁰ четных и ⁹ нечетных. При этом $t - 12$

удовлетворяют 13 точек (с ординатами $0, 2,$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

..., 24). При этом тогда ~~каждый~~ t -ично и y
них в паре по 13 точек. Всего: $10 \cdot 13 \cdot 13$ пар.

При нечетном $t - 12$ удовлетворяют 12 точек (с
ординатами 1, 3, ..., 23). При этом тогда t -
ично и y них в паре по 12 точек: Всего
пар: $9 \cdot 12 \cdot 12$. Тогда ~~еще~~ удвоенное число пар:

(пара A, B считается как A, B так и как B, A)

$$10 \cdot 13 \cdot 13 + 9 \cdot 12 \cdot 12. \text{ А искомое: } \frac{10 \cdot 13^2 + 9 \cdot 12^2}{2} =$$

$$= 5 \cdot 13^2 + 9 \cdot 12 \cdot 6 = 5 \cdot 169 + 108 \cdot 6 = 1493.$$

Ответ: 1493.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

УЧ №6. На самом деле требуется найти
угловые коэффициенты уравнений касатель-
ных к окружностям с центром $(-8, 0)$ и
радиуса 2 и центром $(0, 0)$ радиуса 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = (-4x^2 + 3x - 3)^2$$

$$4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3) = 16x^4 + 9x^2 + 9 - 24x^3 - 18x + 24x^2$$

$$4(4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) =$$

$$16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12 = 16x^4 - 24x^3 + 33x^2 - 18x + 9$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$22^2 - 4 \cdot 41 \cdot 6 = 22^2 - 41 \cdot 24 < 0$$

$$22^2 + 12 \cdot 41$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 484 \\ \hline 484 \\ + 492 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 520 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 488 \cdot 2 \\ 244 \cdot 4 \\ 122 \cdot 8 \\ 61 \cdot 16 \\ \hline 22 \pm 4\sqrt{61} \\ 81 \end{array}$$

x_1, y_1

$$y_2 = 2x_2 + \text{const}$$

$$30 \geq 12 - 2x + y \geq 0$$

$$2x \geq y - 18$$

$$2x \leq 12 + y$$

x_1, y_1, y_2

$$\begin{aligned} 2x_2 + y_2 &= 12 + 2x_1 + y_1 \\ y_2 &= -2x_2 + (12 + 2x_1 + y_1) \end{aligned}$$

от 0 до 30

$$12 + 2x + y = b \quad b \in [0; 30]$$

$$y = -2x + (b - 12)$$

$$\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3 = \frac{8}{49} - \frac{70}{49} + \frac{147}{49} > 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$22 + 4\sqrt{61} \leq 81$$

$$4\sqrt{61} \leq 59$$

$$61 \cdot 16 \leq 59 \cdot 59$$

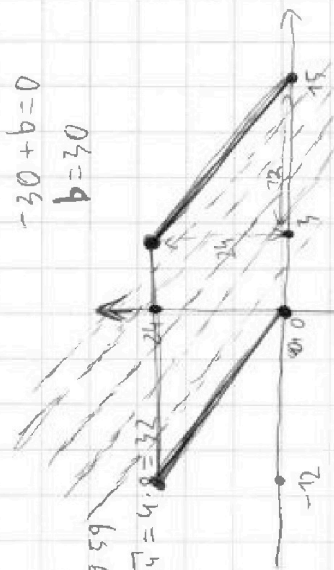
$$4\sqrt{61} < 4\sqrt{64} = 4 \cdot 4 = 16$$

$0 \leq b - 12 \leq 30$ по условию
 $12 \leq b \leq 30$
19 значений

$$-2x + b = 0$$

$$-30 + b = 0$$

$$b = 30$$



на картинке 25 точек

