



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Рассмотрим наименьшие степени возведения
в разложении на множители числа a b c
у чисел 2 и 7.

Пусть обозначим как a_1, b_1, c_1 степени
возведения числа 2 в числа a, b, c и a_2, b_2, c_2
степени возведения числа 7 в те же числа, все они
натуральные. Так как при перемножении
степеней возведения числа складываются,
то можно составить систему:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 15 \\ b_1 + c_1 \geq 17 \\ a_1 + c_1 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 55 \\ a_1 + b_1 + c_1 \geq 28 \end{cases}$$

Невозможно подобрать решение: $a_1 = 10$
 $b_1 = 5$
 $c_1 = 13$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 11 \\ b_2 + c_2 \geq 18 \\ c_2 + a_2 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 68 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 34 \end{cases}$$

Так как $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N}$, и $c_2 + a_2 \geq 39$, то

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 40$$

Невозможно подобрать решение:

$$a_2 = 11, b_2 = 1, c_2 = 28;$$

Тогда мы знаем, что

$a, b, c : 2^{28} 7^{40}$, а такое минимальное число
равно $2^{28} 7^{40}$

Ответ: $2^{28} 7^{40}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Горча QR-кода недопустима!

Задача №2

a и b - взаимнопросты

$$\begin{cases} a+b : m \\ a^2 - 9ab + b^2 : m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2 - 9ab : m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b : m \\ 9ab : m \end{cases}$$

$$m = \text{НОД}(a+b; 9ab)$$

Поскольку a и b взаимнопросты, то

$$\text{НОД}(a+b; a) = \text{НОД}(a+b; b) = 1, \text{ тогда}$$

$$\text{НОД}(a+b; 9ab) = \text{НОД}(a+b; 9), \quad m \leq 9,$$

пример для $m=9$: $a=4, b=5$

~~Пример~~
Пример подойдет, так как знаменатель равен

$$16 - 140 + 25 = -99 \neq 0, \text{ неопределенности нет.}$$

Ответ: наибольшее значение $m=9$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Перенесём O на вектор DK получив O' , тогда
 $\triangle OO'K$ — ~~равносторонний~~ прямоугольный, $O'H = OD$;
 $DH = OO'$, $(OO')^2 + (O'K)^2 = OK^2$;

$$\left(\frac{5a}{24}\right)^2 + \left(7 + \sqrt{13 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 = 13^2; \quad a \leq 26; \quad b = \frac{a}{4};$$

$$\frac{25a^2}{36} + 49 + 14\sqrt{13 - \frac{a^2}{4}} + 7^2 - 4b^2 = 169$$

$$\frac{25a^2}{36} + 49 + 14\sqrt{13 - 4b^2} + 7^2 - 4b^2 = 169$$

$$\frac{25a^2}{36} - 4b^2 + 49 = -14\sqrt{13 - 4b^2};$$

$$-\frac{77a^2}{36} + 49 = -14\sqrt{13 - 4b^2};$$

$$\frac{17a^2}{36} - 7 = 2\sqrt{13 - 4b^2}; \quad C = \frac{b}{6}; \quad C = \frac{a}{24};$$

$$17a^2 - 7 = 2\sqrt{13 - 24C^2}; \quad C \geq \sqrt{\frac{7}{17}}; \quad \boxed{C^2 \geq \frac{7}{17}} \quad \leftarrow \text{об } 32$$

$$289a^4 - 238a^2 + 49 = 26 - 48C^2;$$

$$289a^4 - 190a^2 + 23 = 0; \quad D = 190^2 - 4 \cdot 289 \cdot 23 = 36100 - 26588 =$$

$$C^2 = \frac{190 \pm \sqrt{9572}}{289}; \quad C^2 = \frac{190 + \sqrt{9572}}{289} = 9572; 4$$

первый случай не удовлетворяет об 32.

$$\text{Поэтому } a = \frac{\sqrt{190 + \sqrt{9572}}}{17} \cdot 24$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{\sqrt{190 + \sqrt{9572}} \cdot 24}{17}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



Задача №4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12; \quad D = 9 - 3 \cdot 4 \cdot 1 = -3 < 0 \text{ (значение всегда положительно)}$$

$$x \notin \left(\frac{6 - 2\sqrt{3}}{2 \cdot 3}, \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} \right) \Rightarrow x \notin \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Для тех значений второго корня всегда > 0 , то мы можем домножить обе части на сопряженное, то есть на $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$;

$$(3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9} \quad x_2 = \frac{-6}{2a} = \frac{-3}{1} = -3$$

~~$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$~~
 ~~$3x^2 - 6x + 2 \leq 0$~~
 ~~$3x^2 + 3x + 1 \leq 0$~~
 ~~$x^2 + x \leq 0; x \in (-1; 0)$~~
 ~~$x \in \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$~~
 ~~$1 - \frac{\sqrt{6}}{3} > 0 \Rightarrow x \in \emptyset$~~
~~Остается единственный корень $x = \frac{1}{9}$, так как $-\frac{8}{9} < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, так как $(8)^2 = 64 > 27 = (\sqrt{3} \cdot 3)^2$~~

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 \leq 0 \quad 3x^2 + 3x + 1 \leq 0;$$

$$x \in \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad x^2 + x \leq 0; x \in (-1; 0)$$

$1 - \frac{\sqrt{6}}{3} > 0 \Rightarrow x \in \emptyset$; Остается единственный корень $x = \frac{1}{9}$, так как $-\frac{8}{9} < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, так как $(8)^2 = 64 > 27 = (\sqrt{3} \cdot 3)^2$

Ответ: $x = \frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Возьмем заданную А. Тогда возможные ТМТ точки В имеют вид прямой с наклоном -2 .

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 19$$

Точка А, у которой есть хотя бы одна пара В лежит не выше прямой

$$y = -2x + 19 \quad (\text{подобрали по крайней точке } A \star A(9; 0))$$

Все прямые с наклоном -2 пересекают заданное количество точек В параллелограмме,

т.к. верхняя и нижняя

сторона параллелограмма параллельны оси Ox , а боковые — прямой $y = -2x$, прямые с таким наклоном всегда пересекают

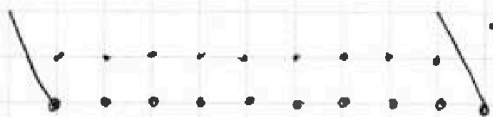
$$\frac{h}{2} + 1 \text{ точек (} h - \text{высота)} = \frac{26}{2} + 1 = 14;$$

Всего параллельных А ~~13~~

А можно считать на прямой yz

На при $y_1 \in [2k; 2k+1]$ (когда, всего параллельных точек А $= 10 + (10-1) = 19$, на $y_1 = 26 \rightarrow 10$ точек;

$$\downarrow 19 \text{ точек} \quad 13 \cdot 19 + 10 = 247 + 10 = 257$$



Для каждой А равно 13 вариантов В \rightarrow

$$\text{ответ равен } 13 \cdot 257 = 3341$$

Ответ: 3341

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

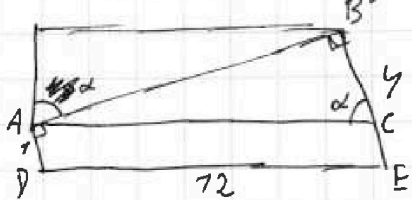


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



и она тоже является ответом системы.

Построим 2 случая (D, E — центры окружностей)

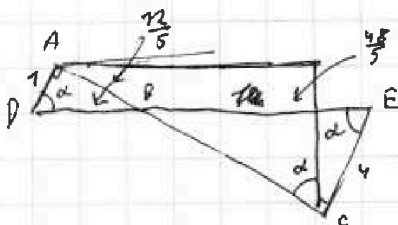


$$\operatorname{tg} \alpha = a$$

$$AB^2 + BC^2 = AC^2; AB^2 + 3^2 = 72^2$$

$$AB = \sqrt{72^2 - 3^2} = 3\sqrt{15}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{15}}{3}$$

$$a = \pm \sqrt{15}$$



$$DB = 72 \cdot \frac{1}{5}; BE = 72 \cdot \frac{4}{5} = \frac{48}{5}$$

$$AB^2 = DB^2 - DA^2 = \frac{144}{25} - 1 = \frac{119}{25}$$

$$AB = \frac{\sqrt{119}}{5}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{9 \cdot 17}}{5}$$

$$\text{Получаем } a = \left\{ \pm \sqrt{15}; \pm \frac{\sqrt{119}}{5} \right\}$$

$$\text{Ответ: } a = \left\{ \sqrt{15}; -\sqrt{15}; \frac{\sqrt{119}}{5}; -\frac{\sqrt{119}}{5} \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

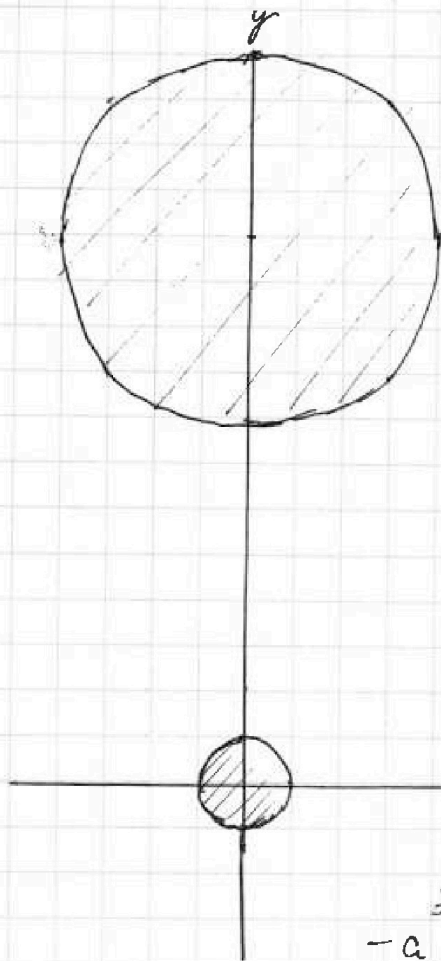
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~№6~~
Задача №6

Рассмотрим выражение $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$,
а точнее фигуры в скобках; первая обе скобки -
формула кругов с координатами $(0; 0)$ и $(0; 12)$
и радиусами $\sqrt{1} = 1$ и $\sqrt{16} = 4$ соответственно.



Круги не пересекаются,
так что мы можем
изобразить началь-
ное выражение
как множество
точек, лежащих
в ~~этих~~ внутри
окружностей и
на окружностях.

Тем временем
 $ax + y - 8b = 0$ -
формула прямой
с углом $y = -ax + 8b$,
с наклоном $-a$.
Пар. b может прини-
мать любые
значения, но

Для заданного a
это любая прямая с углом наклона
 $-a$. Если система имеет 2
решения, то прямая - общая касательная
двух окружностей, ~~где~~ как на рисунке
симметричная, но для ответа a и y ~~каждой~~
касательной с углом наклона $-a$ есть пара -
симметричная касательная с наклоном a ,

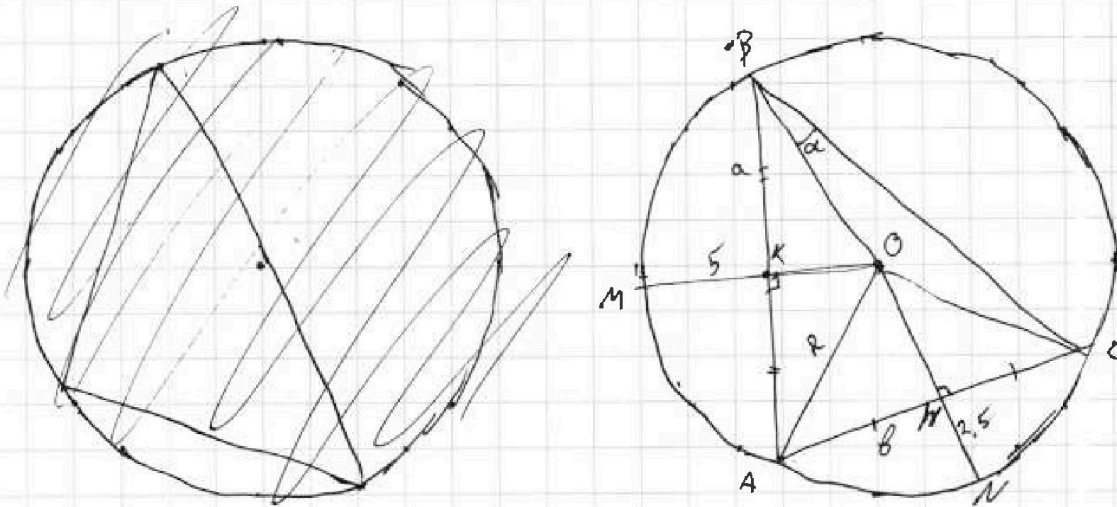
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$BK = AK \cdot AM = HC$$

$$MK = 5; NH = 2,5; \angle BOC = \alpha; BK = a; AH = b; \angle OBC = \alpha;$$

Решение:

$$\left\{ \begin{array}{l} AO^2 = OM^2 + AM^2 \Rightarrow R^2 = (R - 5)^2 + a^2 \\ AO^2 = AK^2 + KO^2 \Rightarrow R^2 = (R - 2,5)^2 + b^2 \end{array} \right. \begin{array}{l} * \angle B = \alpha + \arccos\left(\frac{a}{R}\right) \\ * \angle C = \alpha + \arccos\left(\frac{b}{R}\right) \end{array}$$

$$\frac{AC}{2 \sin B} = R; \quad * \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\frac{BA}{2 \sin C} = R$$

Система из 4 неизвестных (α, R, a, b)
с 4 уравнениями решается

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



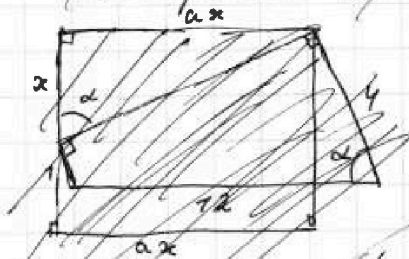
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и она тоже является ответом системы.

Построим 2 случая

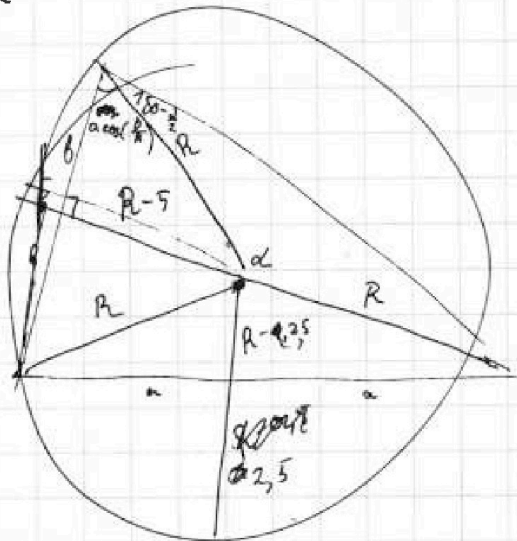


tg α = x/a; sin α = x/√(x²+a²) = a/√(x²+a²); cos α = a/√(x²+a²)

ax = 4 sin α - 7 sin α = 3 sin α = 3a/√(x²+a²);
ax = 72 - 4 cos α + 7 cos α = 72 - 3 cos α = 72 - 3a/√(x²+a²);

ax · a = ax

3a²/√(x²+a²)



152.225
16² = 256
13² = 289

99² = 12177.81
2 1217
+ 968
9801

98
+ 98

(100² - 99²) = 199.7

100 2 · 198 = 496

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~2570 +~~

$48 + 200 = h$

$48 - h + 200$

$a = 4h + 200$

$y = -2x$

2570 +

+ 257 · 3 =

= 2570 + 771 =

= 3341

13 · 20 - 13 = 260

78

248

$\frac{2r + \sqrt{a^2 + b^2} + 200}{4r} = 24$

$\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2} + 200} \right) \cdot 2 = \frac{a}{2r}$

$d = 5$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} 7^{39}$$

$$a_1 + b_1 \geq 15$$

$$b_1 + c_1 \geq 17$$

$$a_1 + c_1 \geq 23$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = ?$$

$$\frac{23+17+23+7}{2} = 28$$

$$a+b+c = 27,5$$

$$a_1 - b_1 = 6; \quad b_1 = 4; \quad a_1 = 10,5$$

$$a_1 + b_1 = 15; \quad c_1 =$$

$$a_2 - b_2 = 21$$

$$a_2 + b_2 \geq 11$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 34$$

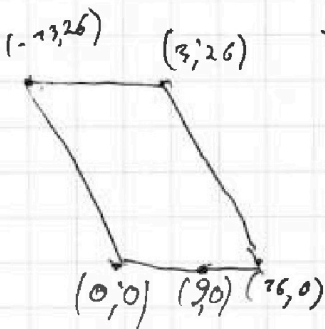
$$a_2 + 2b_2 + c_2 \geq 29$$

$$c_2 + a_2 \geq 39$$

$$3x^2$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2$$

$$2(b_2 - x_1) + y_2 = 184$$



$$\frac{4+5}{16+25=7 \cdot 20} = \frac{7+5}{41-140} = \frac{4+5}{-99}$$

$$4756 = 2378 \cdot 2 =$$

$$\begin{array}{r} 361 \\ + 712 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 98 \\ 9 \overline{) 874} \\ \underline{81} \\ 64 \\ \underline{54} \\ 104 \\ \underline{98} \\ 60 \\ \underline{54} \\ 60 \\ \underline{54} \\ 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 92 \\ 78 \overline{) 7168} \\ \underline{72} \\ 81 \\ \underline{81} \\ 00 \\ 81 \\ \underline{81} \\ 00 \\ 81 \\ \underline{81} \\ 00 \end{array}$$

Handwritten signature or mark.

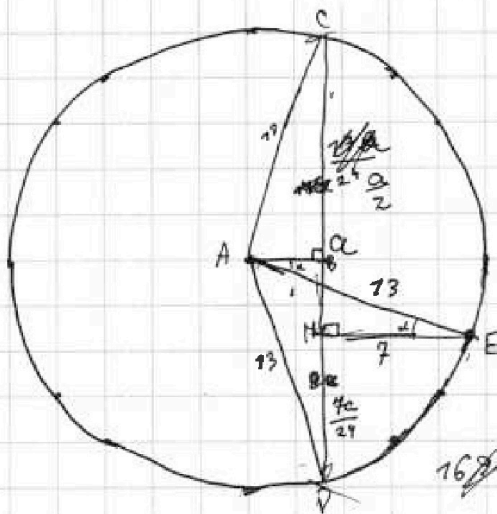
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB^2 = 13^2 - \left(\frac{17a}{24}\right)^2$$

$$BH = \frac{5}{24}a$$

$$7 + \sqrt{120}$$

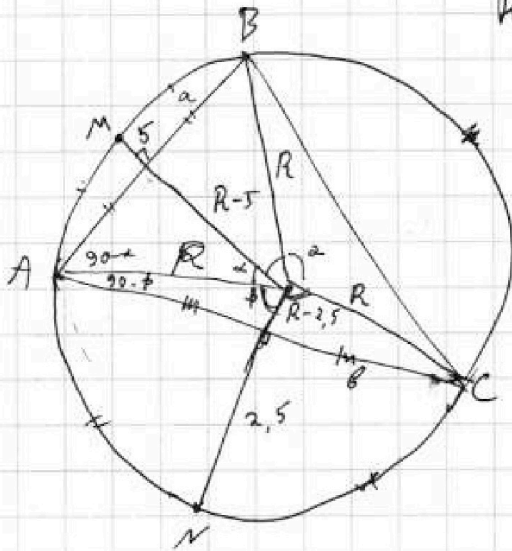
$$36 \cdot 4 = 120 + 27 = 147$$

$$25 - 147$$

$$\frac{36 \cdot 4}{17}$$

$$OD =$$

$$\left(\sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 + \left(\frac{a}{7}\right)^2 = 13$$



$$R = \frac{4abc}{S}$$

$$(R-5)^2 + a^2 = R^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

