



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода недопустим!

Задача №1 (:-кратно; / - не кратно)

Пусть $a = k_1 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$ (где $k_1/2$ и $k_1/7$)
 $b = k_2 \cdot 2^{\beta_2} \cdot 7^{\delta_2}$ (где $k_2/2$ и $k_2/7$)
 $c = k_3 \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$ (где $k_3/2$ и $k_3/7$)

где $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \alpha_i, \beta_i, \delta_i \in \mathbb{Z}$
 $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \alpha_2, \beta_2, \delta_2 \geq 0$
 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$

Тогда $ab = k_1 \cdot k_2 \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\beta_2 + \delta_2}$
 $bc = k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{\beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\beta_2 + \delta_2}$
 $ac = k_1 \cdot k_3 \cdot 2^{\alpha_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2}$

Заметим, что т.к. 2 и 7 - простые числа, то: $k_1 \cdot k_2/2$ и $/7$; $k_2 \cdot k_3/2$ и $/7$; $k_1 \cdot k_3/2$ и $/7$; $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3/2$ и $/7$

Тогда из условия следует, что:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 & (11) \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 & (21) \\ \beta_1 + \delta_1 \geq 17 & (12) \\ \beta_2 + \delta_2 \geq 17 & (22) \\ \alpha_1 + \delta_1 \geq 20 & (13) \\ \alpha_2 + \delta_2 \geq 37 & (23) \end{cases}$$

$$a \cdot b \cdot c = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2}$$

(*) Сложим: (11) + (12) + (13): $2(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1) \geq 51 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 \geq \frac{51}{2} \geq 26$ (т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \alpha_2, \beta_2, \delta_2, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$); $(k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N})$

Приведем пример $\alpha_1, \beta_1, \delta_1$ при которых $\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 = 26$ и условия (11), (12) и (13) выполняются: $\alpha_1 = 9, \beta_1 = 6, \delta_1 = 11$.

(**) Сложим: (21) + (22) + (23): $2(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) \geq 64 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq \frac{64}{2} = 32$.

Приведем пример $\alpha_2, \beta_2, \delta_2$ при которых $\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 = 32$ и условия (21), (22) и (23) выполняются. Но из того, что $\beta_2 \geq 0$ и условия (23) следует, что $\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq \alpha_2 + \delta_2 \geq 37$

Приведем пример $\alpha_2, \beta_2, \delta_2$ при которых $\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 = 37$ и условия (21), (22) и (23) выполняются. $\alpha_2 = 20, \beta_2 = 0, \delta_2 = 17$.

Заметим, что т.к. k_1, k_2, k_3 никак не влияют на делимость, то $\min abc \in \{2^{\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2} \text{ (при } k_1 = k_2 = k_3 = 1)\}$.

Из (*) и (**) видно, что мин. $\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 = 26$, а мин. $\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 = 37$.

$$\Rightarrow \min abc = 2^{26} \cdot 7^{37} \quad (a = 2^9 \cdot 7^{20}, b = 2^6 \cdot 7^0, c = 2^{11} \cdot 7^{17})$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$\frac{a}{b}$ - несократима, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$.

$$\text{Рассмотрим дробь } \frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{(a+b)}{(a^2+2ab+b^2)-8ab} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2-8ab}.$$

Пусть $(a+b) = km$. Тогда, во-первых $(a+b) \perp (\text{вращено к } c) k$, во-вторых

$(a+b)^2 = k^2 m^2 : m$. Так как если наша дробь сократима на m , то её чис-

литель и знаменатель оба кратны m . Это есть $(a+b)^2 - 8ab = k^2 m^2 - 8ab$ - кратно

m . Это возможно только если $8ab : m$. Пусть $8ab = l \cdot m$ ($8ab \perp l$).

И.к. $(a+b) = km$, то $b = km - a \Rightarrow 8ab = 8a \cdot (km - a) = 8aktm - 8a^2 = l \cdot m$.

Это возможно только если $8a^2 : m$. Пусть $8a^2 = n \cdot m$ ($8a^2 \perp n$). Тогда

посмотрим на дробь $\frac{8ab}{8a^2} = \frac{8 \cdot a \cdot b}{8 \cdot a \cdot a} = \frac{a}{a} = \frac{n \cdot m}{l \cdot m}$.

При $m > 1$ получаем, что дробь $\frac{a}{b} = \frac{n \cdot m}{l \cdot m}$ сократима, это противоре-
чит условию.

При $m = 1$ получаем $\frac{a}{b} = \frac{n}{l}$. И.к. $m = 1$ - максимальное значение m .

~~Пример, когда $m = 1$ подходит, это, например $a = 2, b = 3$. Но очевидно~~

Ответ: $m = 1$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + (4x^2 - 3x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = (4x^2 - 3x + 3) \quad (*)$$

$$\nexists 4x^2 - 3x + 3 = 0$$

$D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0$. Значит $(4x^2 - 3x + 3) > 0$ при любых x .

Но $-2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} \leq 0$ при любых x .

Значит у ур-я $(*)$ нет решений.

Ответ: $x = \emptyset$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$. Пусть $\sqrt{2x^2-5x+3} = a$ ($a \geq 0$) и $\sqrt{2x^2+2x+1} = b$ ($b \geq 0$). Тогда заметим, что $a^2 - b^2 = 2-7x$.

$$\text{Т.е. } a-b = a^2 - b^2 \Rightarrow (a-b) = (a-b)(a+b)$$

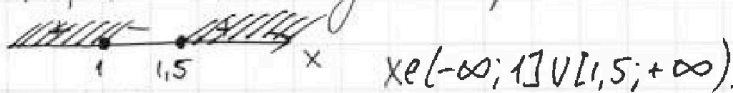
1. ОДЗ: а) $\sqrt{2x^2-5x+3} \Rightarrow 2x^2-5x+3 \geq 0$

д) (рассмотрим) $2x^2-5x+3=0$

$$D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{2} = 1,5. \text{ Методом интервалов:}$$



б) $\sqrt{2x^2+2x+1} \Rightarrow 2x^2+2x+1 \geq 0$

$$\text{д) } 2x^2+2x+1=0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0$$

$$\Rightarrow 2x^2+2x+1 > 0 \text{ при любом } x.$$

2. $(a-b) = (a-b)(a+b)$.

Случай 1. $(a-b) = 0$.

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1$$

$$5x+2x = 3-1=2$$

$$7x=2$$

$$x = \frac{2}{7} \text{ — подходит под ОДЗ}$$

Случай 2. $(a-b) \neq 0$

$$(a-b) = (a-b)(a+b) \quad | : (a-b)$$

$$1 = a+b$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1. \text{ Возведем обе части в квадрат:}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поня QR-кода недопустима!

Задача №6

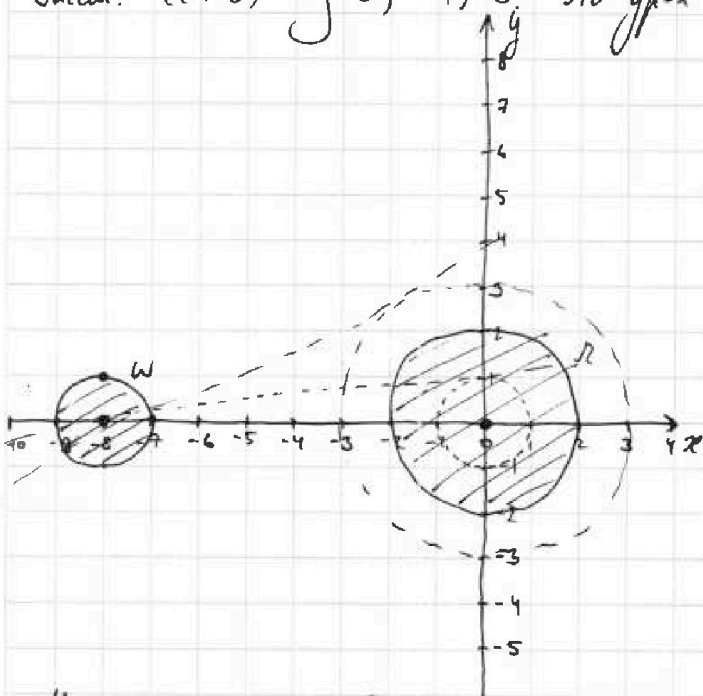
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (\neq) \end{cases}$$

Рассм. $((x+8)^2 + (y-0)^2 - 1) = 0$. Это ур-е окр. с центром $(-8; 0)$ и радиусом 1.

Рассм. $((x-0)^2 + (y-0)^2 - 4) = 0$. Это ур-е окр. с центром $(0; 0)$ и радиусом 2.

Области внутри и границы окружностей соответствуют неравенству (\neq) .

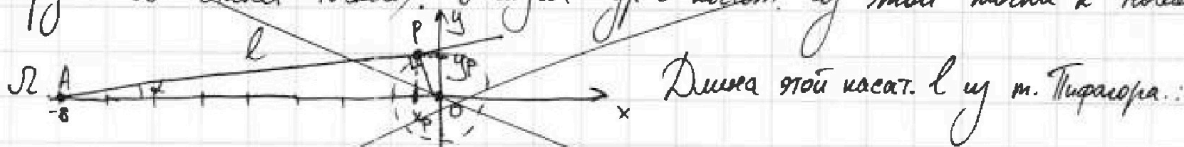
Есть всего 4 прямые, которые пересекут заштрихованную область 2-раза. Это касательные к этим 2-м окружностям.



Каждо найти их уравнение.

1. Внешние касательные. Мысленно уменьшим радиусы окруж. на 1.

(окруж. W станет точкой). Найдём ур-е касат. l из этой точки к новой



Длина этой касат. l из т. Пифагора.:

$$l = \sqrt{(-8)^2 + (1)^2} = \sqrt{63}. \quad \sin \angle = \frac{OP}{AP} = \frac{1}{8}. \Rightarrow l_y = l \cdot \sin \angle = \frac{\sqrt{63}}{8}. \quad l_x = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

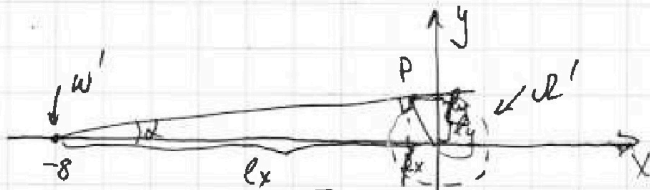
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Внешние касат. Мысленно уменьшим радиусы окруж. на 1.



Длина этой касат. l по т. Пифагора.

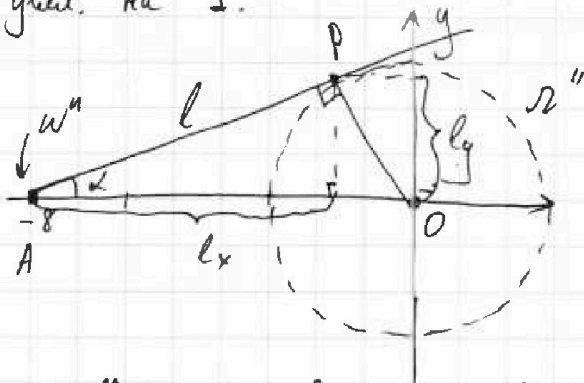
$$l = \sqrt{63}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{8} = \frac{OP}{AP}$$

$$\Rightarrow l_y = l \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}, \quad l_x = \frac{63}{8}$$

Найдем ур-е:
$$\begin{cases} 0 = -8a + 10b \\ (-8 + \frac{63}{8})a + 10b = \frac{\sqrt{63}}{8} \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{63}/63$$

Аналогично: $a = -\sqrt{63}/63$. (реальные касат. получаем паралл. переносом на ± 1 вдоль Oy)

2. Внутр. касат. Мысленно уменьшим радиусы ω на 1, а ради. Ω увелич. на 1.



$$l = \sqrt{64 - 9} = \sqrt{45}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{8} = \frac{OP}{AP}$$

$$\Rightarrow l_y = l \cdot \sin \alpha = \frac{3\sqrt{45}}{8}; \quad l_x = \frac{45}{8}$$

\Rightarrow Найдем a :
$$\begin{cases} 0 = -8a + 11b \\ (-8 + \frac{45}{8})a + 11b = \frac{3\sqrt{45}}{8} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{45}}{45}$$

Аналогично: $a = -\frac{3\sqrt{45}}{45}$. (реальные касат. получаем паралл. переносом на ± 2 вдоль Oy)

Ответ: $\pm \frac{\sqrt{63}}{63}; \pm \frac{3\sqrt{45}}{45}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

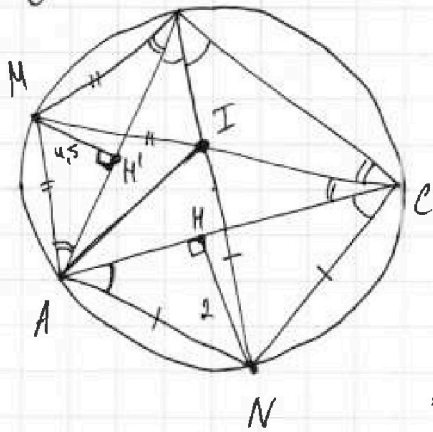
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7



AI-?

I - центр. впис. окруж., I - т. пересеч.

BN и CM (бисек. $\angle B$ и $\angle C$)

По лемме о треугольнике $AM=MB=MI$
 $AN=NC=NI$

$\angle ABN = \angle ACN$ (впис., оп-ся на $\overset{\frown}{AN}$)
 $\Rightarrow \angle NAC = \angle ACN = \angle ABN$

$\angle MBA = \angle MCA$ (впис., оп-ся на $\overset{\frown}{AM}$)

$\Rightarrow \angle MBA = \angle MAB = \angle MCA$

Поскольку MN' - выс. в равнобед. $\triangle AMB$. $\Rightarrow MN'$ - медиана $\Rightarrow AN' = N'B$.

NH - выс. в равнобед. $\triangle ANC$. $\Rightarrow NH$ - медиана $\Rightarrow AN = NC$.

$\Rightarrow NH' -$ ср. линия

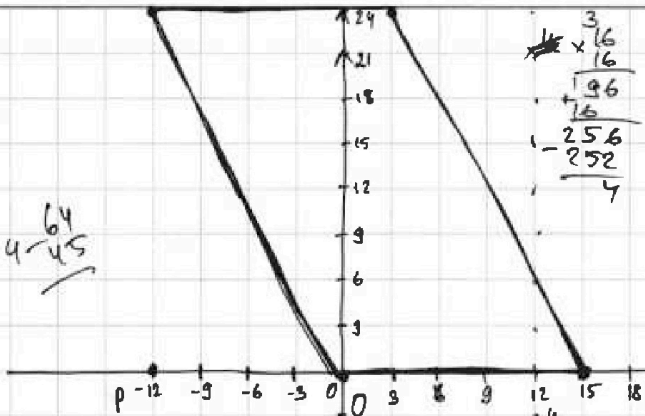
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МОФИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода нелюбима!



$$(x+8)^2 \leq 1$$

$$x^2 + 16x + 64 - 1 = 0$$

$$x^2 + 16x + 63 = 0$$

$$D = 16^2 - 4 \cdot 63 = 256 - 252 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = -9, x_2 = -7$$

$$x \in (-9; -7) \cup (-7; -9)$$

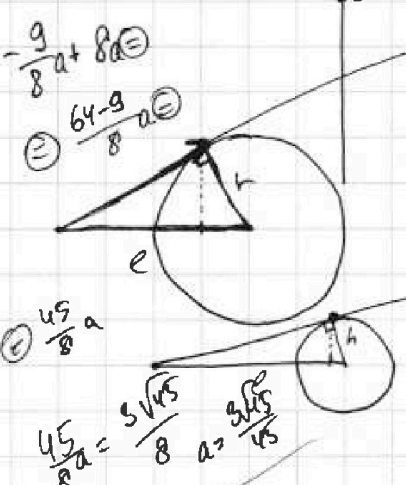
$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + ax_2 - ax_1 - 10b = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + a(x_2 - x_1) = 12$$

$$(x_2 - x_1)(2+a) = 12$$



$$-8 = a + 10b = 0 \Rightarrow a = -10b$$

$$8 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$0 = -8a + 10b$$

$$-\frac{1}{8} + 8a = 0$$

$$a = \frac{63}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{63}{64}$$

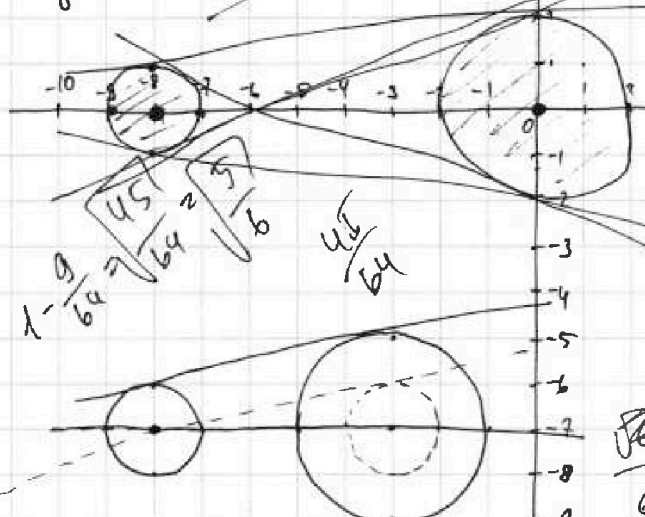
$$a = -8, 1$$

$$-9, 5; 0$$

$$y = ax + 10b$$

$$y^2 = (ax + 10b)^2 = a^2x^2 + 20abx + 100b^2$$

$$y = ax + 10b$$



$$ax - y + 10b = 0$$

$$(x+8)^2 + (y-1)^2 = (x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$\sqrt{63}^2 - \sqrt{64}^2 = 63 - \frac{63}{64}$$

$$63(1 - \frac{1}{64}) = \frac{63^2}{64}$$

$$0 > (h_1 - h_2 + x)(9 + x) + (h_1 + h_2)x$$

$$h_1 + h_2 + x = 2(8 + x)$$

$$0 > (h_1 - h_2 + x)(1 - h_1 + h_2 + x)$$

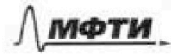
$$0 = 10b + h_1 - h_2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 = -(x+8)^2 + 1 = 1 - x^2 - 16x - 64 = -x^2 - 16x - 63$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$x_0 = \frac{-16}{-2} = -8$$

$$y^2 =$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2$$

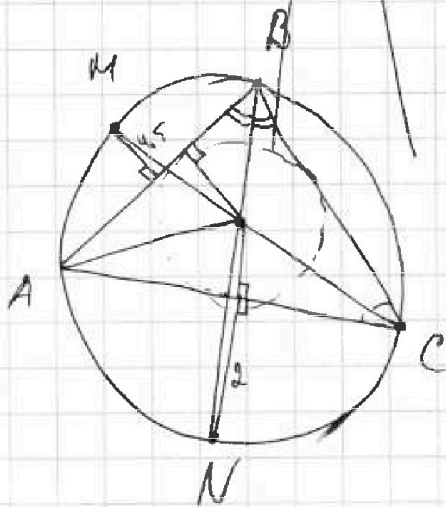
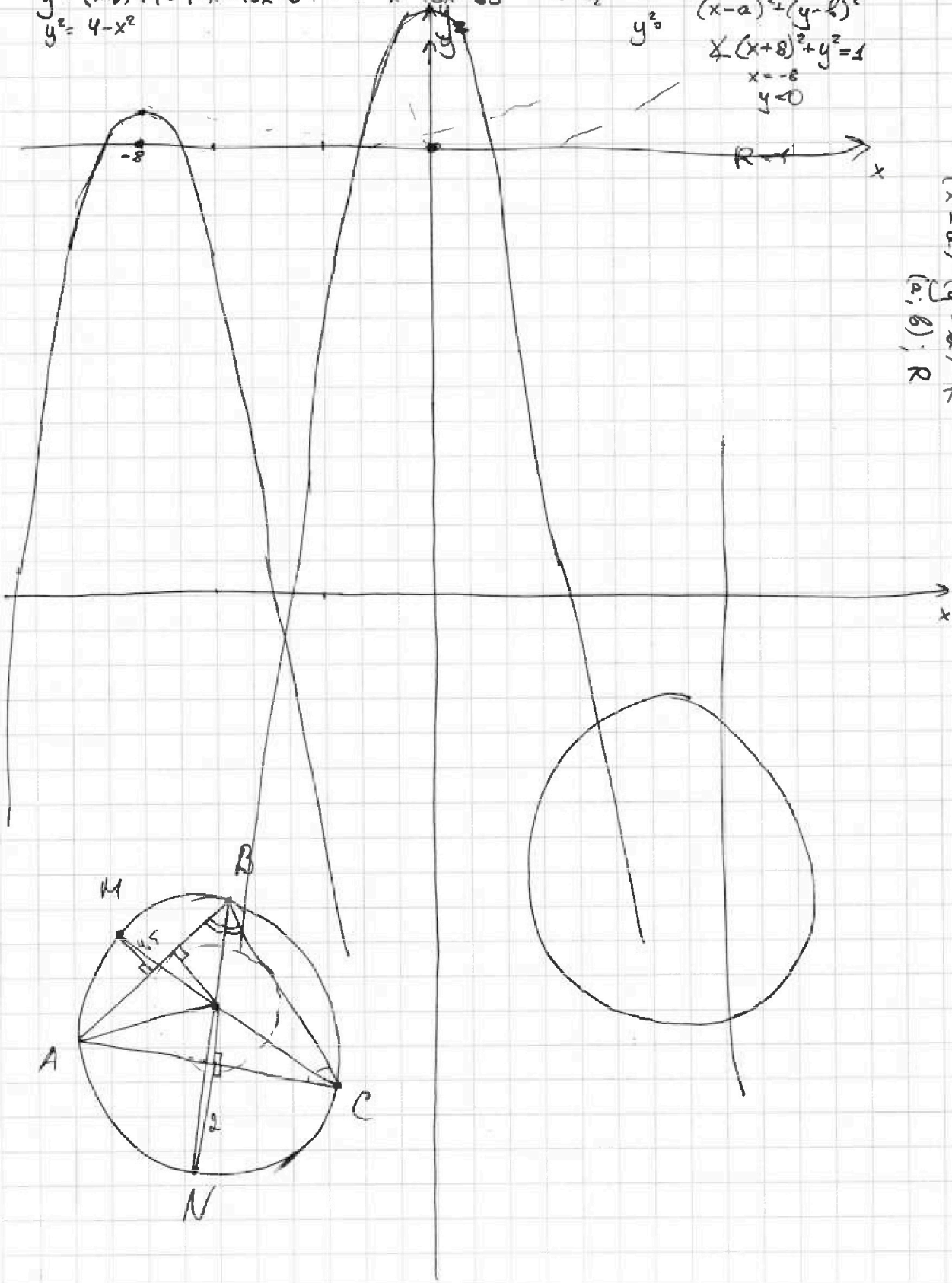
$$x(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$x = -8$$

$$y = 0$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$R(a; b); R$$



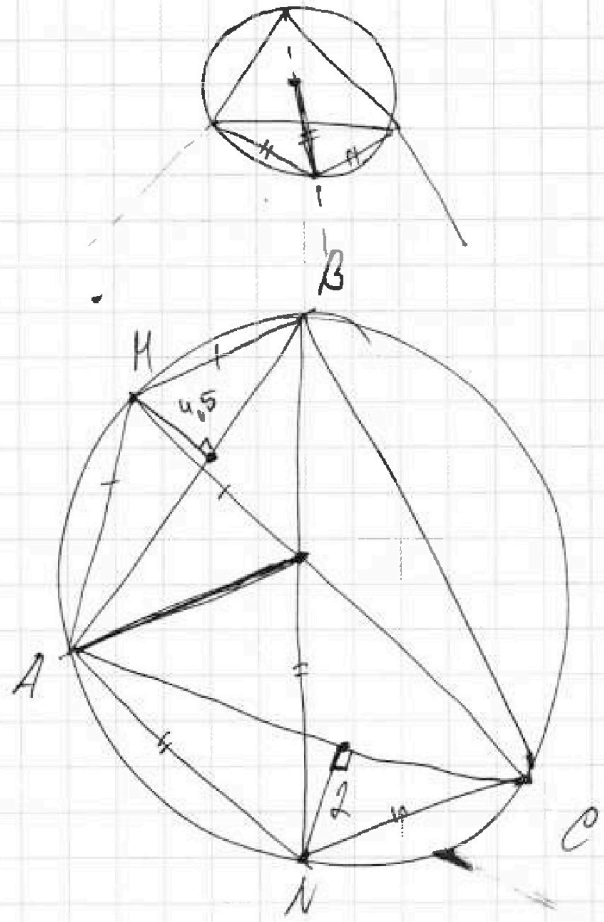
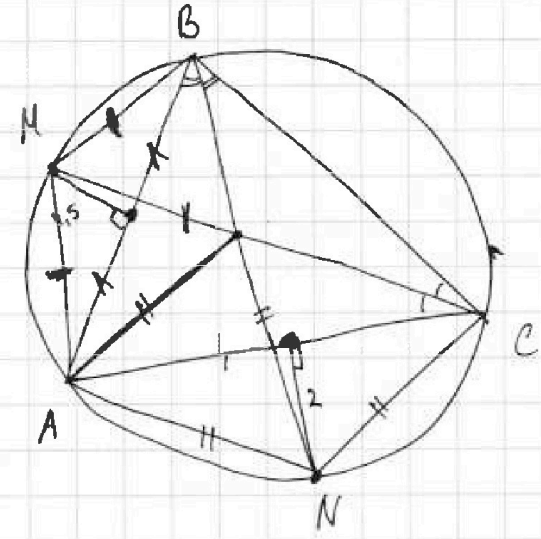
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода непустима!





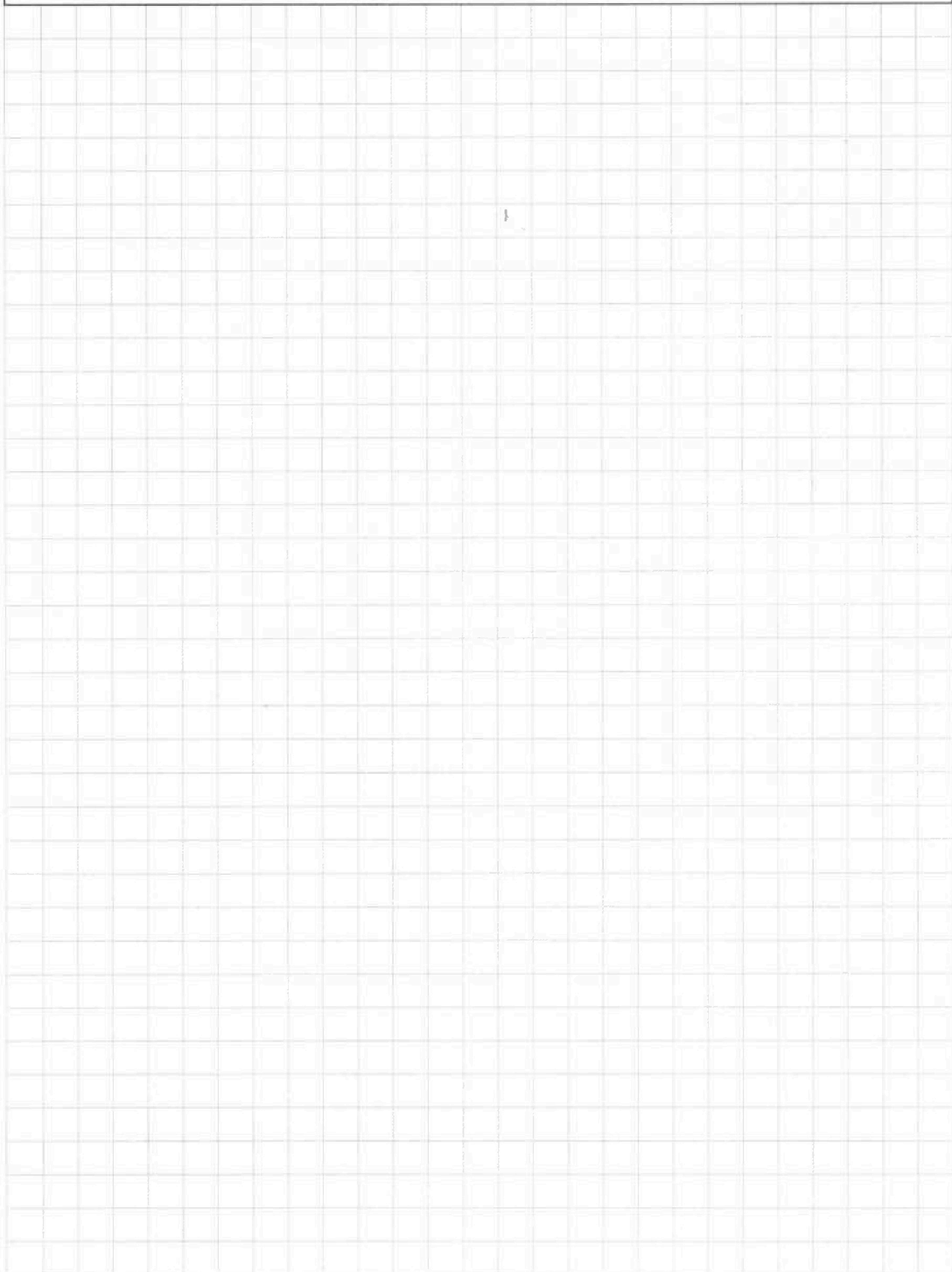
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Нюанс QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

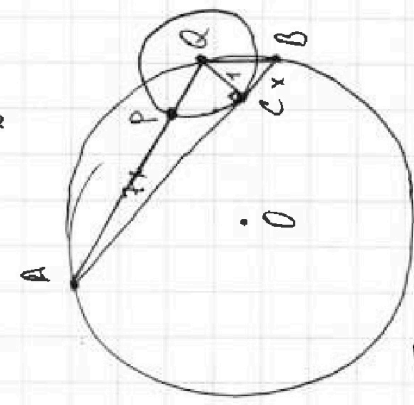
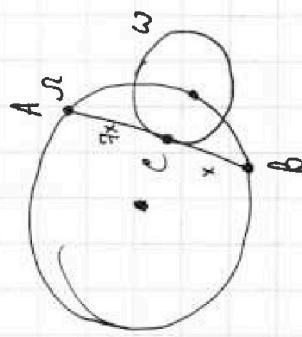
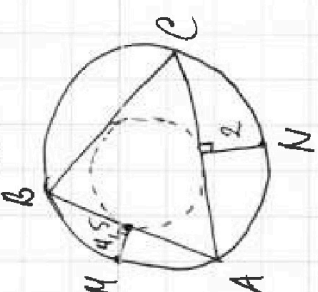


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(a-b)^2(a-b)^2 = (a^2+b^2-2ab)(a^2+b^2-2ab) = a^4+a^2b^2-2a^2b^2-2ab^2+b^4-2ab^2+2a^2b^2+2ab^2-4a^2b^2+4ab^2-2ab^2 = a^4+b^4-2a^2b^2$
 $(a+b)^2 \equiv 0, \text{ mo } a, (a+b)^2 \equiv 0 \text{ mod } 8ab \equiv 0$
 $a+b = km \equiv 0 \text{ mod } (a+b) \perp k$
 $\Rightarrow b = km - a$
 $8ab = 8 \cdot a \cdot (km - a) = 8akm - 8a^2 \equiv 8a^2 \pmod{m}$
 $\Rightarrow 8a^2 \equiv 8akm - 8a^2 \pmod{m}$
 $\Rightarrow 16a^2 \equiv 8akm \pmod{m}$
 $\Rightarrow 2a^2 \equiv km \pmod{m}$
 $\Rightarrow km = 2a^2$
 $\Rightarrow m = \frac{2a^2}{k}$

$\frac{(a^2+2ab+b^2)-8ab}{(a+b)} = \frac{a^2+2ab+b^2-8ab}{(a+b)} = \frac{a^2-6ab+b^2}{(a+b)}$
 $(a-b)^2 - 4ab = km$
 $a+b = km \Rightarrow m = \frac{k}{a+b}$

$4 - 6 \cdot 6 + 9 = 4 - 36 + 9 = -23$
 $\frac{5}{-23}$



$AQ = \sqrt{49x^2 + 1} = \sqrt{49x^2 + 1}$
 $\Rightarrow AP = AQ - 1$
 $\Rightarrow AP^2 = 7x^2 = (AQ+1) \cdot (AQ-1) = (AQ^2-1)$

- 1 2 3 4 5 6 7
 ✓ ✓ ✓ ✓

$\frac{14.15}{11.35} = 0$
 $\frac{13.75}{11.35} = 1.211$
 $\frac{12.40}{11.35} = 1.092$

$QB = \sqrt{1+x^2}$

$\frac{a^2-6ab+b^2}{(a+b)} = \frac{(a+b)^2-4ab}{(a+b)}$

32

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab \equiv 0 \pmod{2^{14} \cdot 7^{10}}$$

$$bc \equiv 0 \pmod{2^{17} \cdot 7^{17}}$$

$$ac \equiv 0 \pmod{2^{20} \cdot 7^{37}}$$

$$2^{51} = 2 \cdot 2^{50}$$

$$\min abc = ? \quad \sqrt{2^{50}} = 2^{25} \quad + \frac{2^4}{51}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 14 \\ \hline 15 \\ \hline 51 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ + 17 \\ \hline 18 \\ \hline 37 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 2^3 \cdot 7^{10} \cdot 7^7$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} = k_3 \cdot 2^{14} \cdot 2^6 \cdot 7^{10} \cdot 7^{27}$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = (abc)^2 = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$\begin{aligned} & \text{Let } abc = x \\ \Rightarrow x^2 &= k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{51} \cdot 7^{64} \end{aligned}$$

$$x = \sqrt{k^1} \cdot 2^{25} \cdot \sqrt{7^{32}} \Rightarrow \sqrt{k} = n\sqrt{2} \Rightarrow x = n\sqrt{2} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32} = \sqrt{2} \cdot 2^{26} \cdot 7^{32} \cdot n$$

$$\Rightarrow \text{при } n=1. \quad k_1=1, k_2=2, k_3=1. \quad \begin{aligned} ab &= 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &= 2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &= 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

$$+ \frac{14}{31}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 17 \\ \hline 27 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 & (1) \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 & (2) \\ \beta_1 + \delta_1 \geq 17 & (3) \\ \beta_2 + \delta_2 \geq 17 & (4) \\ \alpha_1 + \delta_1 \geq 20 & (5) \\ \alpha_2 + \delta_2 \geq 37 & (6) \end{cases}$$

$$4x^2 - 3x + 4$$

$$\frac{1}{2} \cdot 8x = 4x$$

$$\sin \delta = \frac{8x}{101} = 0,8x \quad \begin{array}{r} 14 \\ + 17 \\ \hline 31 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ + 17 \\ \hline 27 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ + 20 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3a &= \alpha \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \\ 6 &= \beta \cdot 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \\ 8 &= \delta \cdot 2^{\delta_1} \cdot 7^{\delta_2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} ab &= \alpha \beta \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2} \\ bc &= \beta \delta \cdot 2^{\beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\beta_2 + \delta_2} \\ ac &= \alpha \delta \cdot 2^{\alpha_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \delta_2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow abc = \alpha \beta \delta \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \alpha^2 \beta^2 \delta^2 \cdot 2^{2(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1)} \cdot 7^{2(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2)}$$

$$(1) + (2) + (3) \cdot 2 \cdot (\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1) \geq 51$$

$$(2) + (3) + (4) \cdot 2 \cdot (\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) \geq 64$$

$$(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) \geq 32$$

$$\Rightarrow x = \alpha \beta \delta \cdot 2^{(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1)} \cdot 7^{(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2)}$$

$$\text{Ответ: } x = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ + 17 \\ \hline 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ + 17 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 10$$

$$\alpha_2 \geq 10$$

$$\begin{array}{r} \alpha_2 = 10 \\ \beta_2 = 10 \\ \delta_2 = 12 \end{array}$$

$$\beta_1 \geq 3$$

$$\alpha_1 + \delta_1 \geq 20$$

$$\begin{array}{r} \alpha_1 = 6 \\ \delta_1 = 9 \\ \beta_1 = 11 \end{array}$$

$$\beta_2 \geq 7$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 32$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 17 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 \geq 26$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 32$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 17 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 37$$

$$\alpha_2 = 10$$

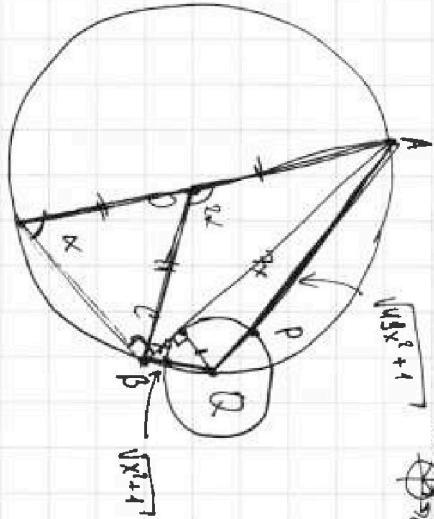
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$\sqrt{49x^2+1} \rightarrow \sin \alpha \cdot \sqrt{49x^2+1}$$

$$\Rightarrow \text{по м. кос: } AB^2 = (8x)^2 = 64x^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos 2\alpha \quad \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos 2\alpha = 50 - 50 \cdot \cos 2\alpha = 64x^2$$

$$\frac{8}{\sqrt{29}} = 28 + 28 \frac{1}{2}$$

$$\angle AQB = 180^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \angle AQB = -\cos 2\alpha = \frac{8}{b} = \frac{8}{10} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow AB^2 = AQ^2 + QB^2 + 2 \cdot AQ \cdot QB \cdot \cos \alpha$$

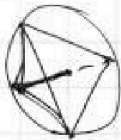
$$\Rightarrow 64x^2 = 49x^2 + 1 + x^2 + 1 + 2 \cdot \sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cdot \cos \alpha - 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{4x^2 - 50}{-50} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{50 - 64x^2 + 50}{50} = \frac{100 - 64x^2}{50}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{100 - 64x^2}{100} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{100 - 64x^2}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{100 - 64x^2}{100} = \frac{100 - 64x^2}{100}$$



$$\frac{8}{\sqrt{29}} = 28 + 28 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{196}{49} \cdot \frac{196}{49} = \frac{196}{49} \cdot \frac{196}{49}$$

$$\frac{196}{49} = \frac{196}{49}$$

$$\frac{196}{49} = \frac{196}{49}$$

$$14x^2 - 2 = 2$$

$$(14x^2 - 2)^2 = 2 \cdot 2$$

$$196x^4 - 56x^2 + 4 = 4$$

$$25(14x^2 - 2)^2 = (49x^2 + 1)(x^2 + 1)(100 - 64x^2)$$

$$25 \cdot (196x^4 - 56x^2 + 4) = (49x^2 + 1)(x^2 + 1)(100 - 64x^2)$$

$$4900x^4 - 1400x^2 + 100 = 4900x^4 - 3136x^2 + 5000x^2 - 3136x^2 + 100 - 64x^2$$

$$3136x^2 - 3136x^2 = 0$$

$$x^2(3136x^2 - 3136) = 0$$

$$3136(x^4 - 1) = 0$$

$$x^4 = 1$$

$$x = 1$$

$$\sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)} \cdot 0,8x = 8x$$

$$\frac{8}{0,8} = \frac{8 \cdot 10}{8} = 10$$

$$\frac{3200}{1800} = \frac{5000}{3136}$$

$$\frac{57258}{1600} = \frac{3200}{3200}$$

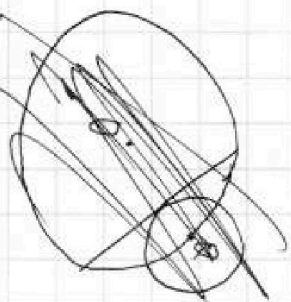
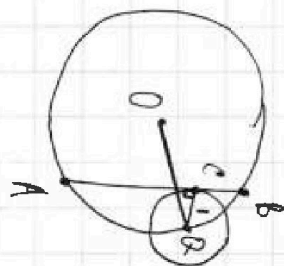
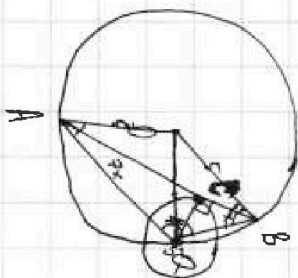
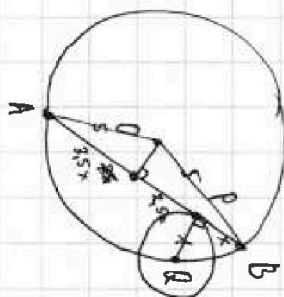
$$\frac{8}{\sqrt{29}} = 28 + 28 \cdot \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\text{ⓐ } 2 - 7x$$

$$\text{ⓑ } a^2 - b^2$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 + 2 < 0$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$(a-b)(a+b) = (a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$$

$$1. a-b=0$$

$$a=b$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

ⓐ3:

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 0$$

$$4x^2 - 3x + 3 = -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$-5x - 2x = 1 - 3$$

$$-7x = -2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$64 - 9 = 45$$

