



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть  $7$  число  $a$   $z$  входит в степени  $\alpha_1$ ,  $7$  число  $b$  в степени  $\alpha_2$  и  $7$  число  $c$  в степени  $\alpha_3$ .

Тогда т.к.  $ab : 2^{15} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15$   $bc : 2^{17} \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17$   
и  $ac : 2^{23} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23 \Rightarrow 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 15 + 17 + 23 = 55$

Тогда  $\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27,5$

Т.к.  $a, b, c$  - натуральные числа то  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  должны быть  
целыми неотрицательными числами

$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$

Нам нужно найти т.к. нам нужно наименьшее возможное  $abc$   
 $\Rightarrow$  мы хотим чтобы  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  было наименьшим из возможных

$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 28$  При  $\alpha_1 = 11$   $\alpha_2 = 4$   $\alpha_3 = 13$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 28$  и условия с делимостью выполняется

Пусть  $7$  входит в число  $a$  в степени  $\beta_1$ ;  $7$  число  $b$  в  
степени  $\beta_2$  и  $7$  число  $c$  в степени  $\beta_3$

Также как и  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$   $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  должны быть целыми неотри-  
цательными числами и:

$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$ ;  $\beta_2 + \beta_3 \geq 18$  и  $\beta_1 + \beta_3 \geq 39 \Rightarrow 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 11 + 18 + 39 = 68$

$\Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$  но заметим, что  $\beta_1 + \beta_3 \geq 39$  и  $\beta_2 \geq 0 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 39$

Т.к. нам нужно наименьшее возможное  $abc$ , то мы хотим  
чтобы  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$  было наименьшим  $\Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 39$   
из возможных

При  $\beta_1 = 16$   $\beta_2 = 0$   $\beta_3 = 23$  условие выполняется

Т.к. нам нужно наименьшее  $abc$  то  $a, b$  и  $c$  не должны  
делиться на какие-то другие числа кроме  $2$  и  $7$

$\Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow$  Наименьшее возможное  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

и это достигается при  $a = 2^{11} \cdot 7^{16}$   $b = 2^4$   $c = 2^{13} \cdot 7^{23}$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача №2

$$a^2 - 7ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 9ab = (a+b)^2 - 9ab$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

Если  $a+b$  делится на  $m$ , то и  $(a+b)^2$  делится на  $m$

$\Rightarrow$  Чтобы мы могли сократить на  $m$  тогда  $(a+b)^2 - 9ab$  делится на  $m \Rightarrow$  и  $9ab$  делится на  $m$

П.к. нам нужно наибольшее  $m \Rightarrow m = \text{НОД}(a+b; 9ab)$

Пусть  $a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$   $b = q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdot \dots \cdot q_m^{b_m}$  где  $p_i$  и  $q_i$  это простые числа

П.к.  $\frac{a}{b}$  - несократимая дробь, то никакое из чисел  $p_1, p_2, \dots, p_n$  не равно никакому из чисел  $q_1, q_2, \dots, q_m$

Заметим что тогда  $m$  не может делиться ни на какое из чисел

$p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m$ . Так как:

Пусть  $m$  делится на какое-то из этих чисел, без ограничения общности скажем, что на  $p_1$

Тогда п.к.  $a+b \div m$  то  $a+b \div p_1$  заметим что  $a \div p_1$  но тогда и  $b \div p_1$  а такого быть не может

$\Rightarrow m$  не делится ни на какое из чисел  $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m$

П.к.  $9ab \div m$  и  $m \nmid p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m \Rightarrow$  наибольшее

возможное  $m=9$

Пример чисел  $a$  и  $b$  когда  $m=9$   $a=1$   $b=8$

$\frac{a}{b} = \frac{1}{8}$  - несократимая дробь  $\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{9}{9}$  в этом случае  $m=9$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

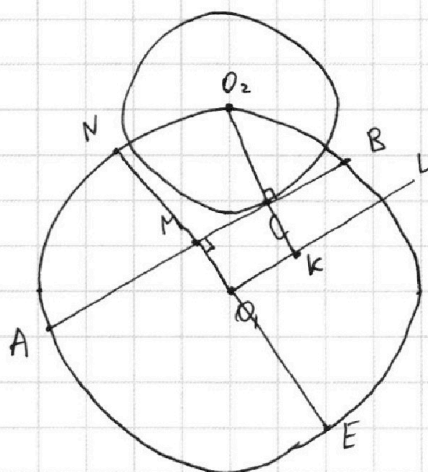
|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3.



Пусть  $AC = 17x$  и  $CB = 7x$

Пусть  $O_1$  центр окружности  $\Omega$

$O_2$  центр окружности  $\omega$

$O_2C = 7$

Опустим из  $O_1$  перпендикуляр на  $AB$

получим точку  $M$ . т.к.  $O_1$  центр  
окружности  $\Rightarrow AM = BM = \frac{17x + 7x}{2} = 12x$

$\Rightarrow CM = 5x$

Запишем теорему Пифагора для  $\triangle O_1MA$

$$AM^2 + O_1M^2 = AO_1^2$$

Проведем из  $O_1$  прямую  $L \parallel AB$  Пусть  $O_2C \cap L = K$

$O_1K \parallel O_1M \Rightarrow O_1MK$  - прямоугольник  $\Rightarrow CK = O_1M = y$   $O_1K = CM = 5x$

Запишем теорему Пифагора для  $\triangle O_1O_2K$   $O_1K^2 + O_2K^2 = O_1O_2^2$

$O_1O_2 = O_1A$

$$\Rightarrow AM^2 + O_1M^2 = O_1K^2 + O_2K^2 \Rightarrow 144x^2 + y^2 = 25x^2 + 49 + y^2 + 14xy$$

$$\Rightarrow 119x^2 - 14y = 49 \Rightarrow 17x^2 - 2y = 7 \quad y = \frac{17x^2 - 7}{2} \quad x^2 = \frac{7 + 2y}{17}$$

$\triangle NMA \sim \triangle BME$

$$\Rightarrow \frac{NM}{BM} = \frac{MA}{ME} \Rightarrow \frac{13 - y}{12x} = \frac{12x}{13 + y} \Rightarrow 144x^2 = 169 - y^2$$

$$y^2 = \frac{289x^4 + 49 - 238x^2}{4} \Rightarrow 576x^2 = \frac{676}{4} - \frac{289x^4 + 49 - 238x^2}{4}$$

$$\Rightarrow 289x^4 + 338x^2 - 1865 = 0 \Rightarrow 144 \cdot \frac{7 + 2y}{17} = 169 - y^2 \Rightarrow 1008 + 288y = 2873 - 17y^2$$

$$17y^2 + 288y - 1865 = 0 \quad D = 288^2 + 4 \cdot 17 \cdot 1865 = 209764 = 458^2$$

$$y > 0 \Rightarrow y = \frac{-288 + 458}{2 \cdot 17} = \frac{170}{34} = 5$$

$$x^2 = \frac{7 + 2 \cdot 5}{17} = \frac{17}{17} = 1 \quad x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = 1$$

$$AB = 24x = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 4.

Заметим что  $(3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1) = 1 - 9x$   
обозначим  $3x^2 - 6x + 2 = a$   $3x^2 + 3x + 1 = b$  ( $a, b \geq 0$ )

Получим что  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$   $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

Тогда есть 2 случая

1 случай.  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

2 случай:  $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$  возведем обе части в квадрат:

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$  возведем обе части в квадрат:

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 16 \cdot 9 + 16 \cdot 69 = 16 \cdot 78$$

$$x_1 = \frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \quad x_2 = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

или получим 3 корня:  $\frac{1}{9}$ ;  $\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$ ;  $\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$

Подставим их в выражения  $3x^2 - 6x$  проверим будут ли с этими корнями выражения  $3x^2 - 6x + 2$  и  $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

$$3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2 = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{1 - 18 + 54}{27} = \frac{37}{27} > 0$$

$$3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1 > 0 \text{ т.к. все слагаемые больше } 0$$

$$3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 - 6 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 2 > 0 \text{ т.к. } 3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 > 0 \quad \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0$$

$$\Rightarrow -6 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} > 0$$

$$3 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{23} > -1 \Rightarrow 3 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 1 > 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 + 3 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 1 > 0$$

корни уравнения  $3x^2 - 6x + 2$  будут числа  $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$  и  $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$   
Заметим что  $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} < \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} < \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \Rightarrow$  т.к.  $3x^2 - 6x + 2$  возраст. функция  
 $\Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}\right) - 6 \cdot \left(\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}\right) + 2 < 0 \Rightarrow \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$  не подходит

Ответ:  $\frac{1}{9}$ ;  $\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐



### Задача 5.

Найдем функцию для прямой  $OP$  и прямой  $QR$   
 ~~$y_{OP} = kx + b$~~   $y_{OP} = kx + b$  в точке  $O$   $0 \cdot k + b = 0 \Rightarrow b = 0$   
 в точке  $P$   $-13 \cdot k = 26 \Rightarrow k = -2$

$$y_{OP} = -2x$$

т.к.  $OPQR$  - параллелограмм  $\Rightarrow OP \parallel QR \Rightarrow k_{OP} = k_{QR} = -2$

$\Rightarrow y_{QR} = -2x + b$  в точке  $R$   $-2 \cdot 16 + b = 0 \Rightarrow b = 32$

$$y_{QR} = -2x + 32$$

Пусть мы выбрали  $x_1, y_1$  тогда выразим  $y_2 = -2x_2 + (14 + 2x_1 + y_1)$

$14 + 2x_1 + y_1$  это какое-то число  $\Rightarrow$  ~~выразим~~ т.к. коэффициенты  
 при  $x_2 = -2$  то прямая на которой будут лежать точки  
 $x_2, y_2$  с заданными  $x_1, y_1$  будет параллельна  $OP$  и  $QR$

$\Rightarrow$  т.к. точки лежат внутри параллелограмма или на границе

$$\Rightarrow 0 \leq 14 + 2x_1 + y_1 \leq 32 \Rightarrow -14 \leq 2x_1 + y_1 \leq 18$$

Пусть  $y_1 + 2x_1 = a$  ~~тогда~~ <sup>тогда</sup>  $y_1 = -2x_1 + a$   
 $-14 \leq a \leq 18$

Тогда прямая на которой лежат точки  $x_1, y_1$   
 также параллельна  $OP$  и  $QR$  т.к. коэффициент при  $x_1 = -2$   
 $\Rightarrow 0 \leq a \leq 32$  и  $-14 \leq a \leq 18 \Rightarrow 0 \leq a \leq 18$

$$\Rightarrow 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18$$

$$y_2 + 2x_2 = 14 + 2x_1 + y_1 \Rightarrow 14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32$$

$$26 \geq y_1 \geq 0 \Rightarrow \text{~~тогда~~ } -\frac{13}{2} \leq x_1 \leq 9 \quad 0 \leq y_2 \leq 26 \Rightarrow -6 \leq x_2 \leq 16$$



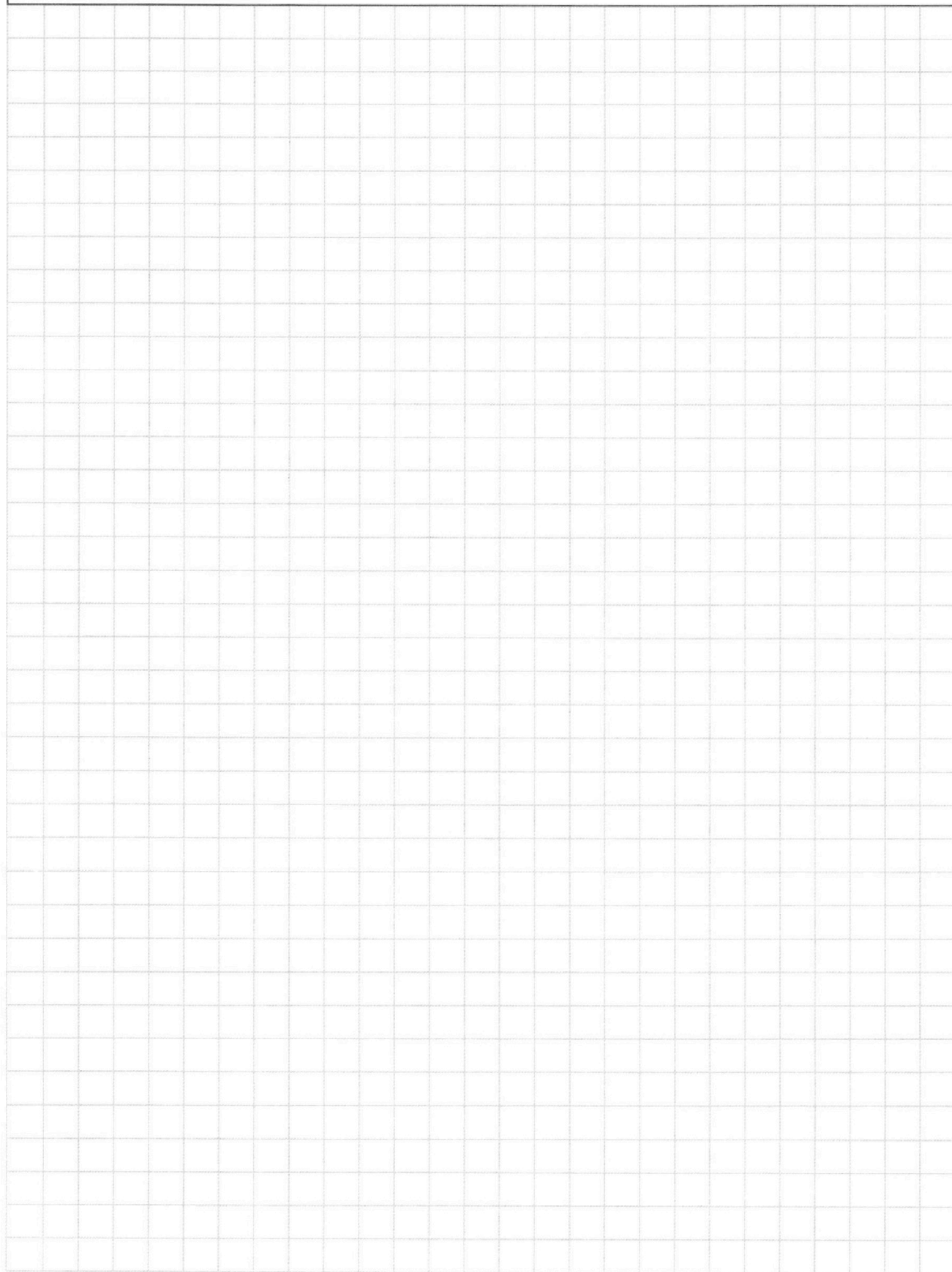
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

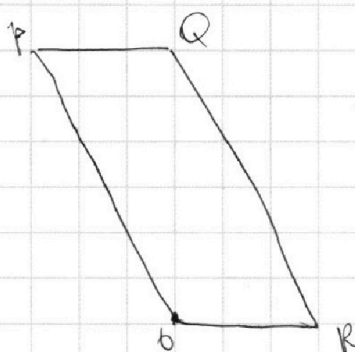
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \times 458 \\ \times 458 \\ \hline 3664 \\ + 2290 \\ 1832 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\sin^2 x = \frac{25}{50+10x} = \frac{5}{10+2x} = \frac{5}{5+x}$$



$$\begin{array}{r} \times 17 \\ \times 16 \\ \hline 68 \\ 238 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 16 \\ \times 13 \\ \hline 48 \\ 208 \\ \hline \end{array} = \boxed{446}$$

$$x_1 = 0 \quad y_1 = 0$$

$$y_2 = 14 - 2x_2$$

|   |    |
|---|----|
| 0 | 14 |
| 1 | 12 |
| 2 | 10 |

$$y_2 = \underbrace{(14 + y_1 + 2x_1)}_b - 2x_2 = b - 2x_2$$

$$\begin{array}{r} -2x_2 \\ -2x_2 + 32 \\ \hline 0 \leq b \leq 32 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq 14 + y_1 + 2x_1 \leq 32 \\ -14 &\leq y_1 + 2x_1 \leq 18 \end{aligned}$$





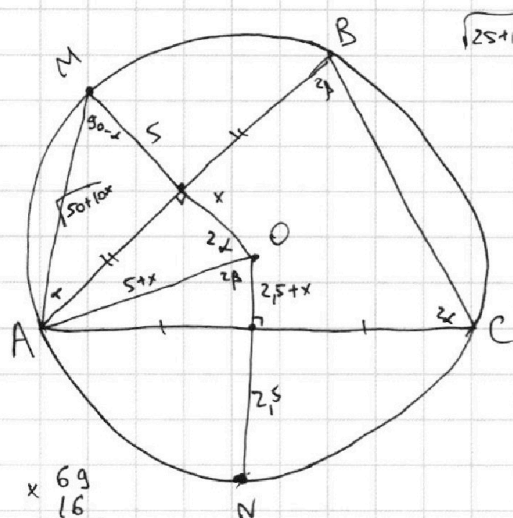
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} \times 69 \\ 16 \\ \hline 414 \\ 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

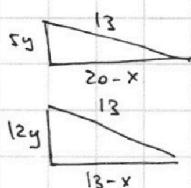
$$2 \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$16(9 + 69) = 16 \cdot 78$$



$$x + y \geq 15$$

$$y + z \geq 17$$

$$x + z \geq 23$$

$$x + y + z \geq \frac{55}{2} = 27.5$$

$$kx - 13k = 26$$

$$k = -2$$

$$16k + b = 0$$

$$3k + b = 26$$

$$k = -2$$

$$b = 32$$

$$0,0; -1; 2$$

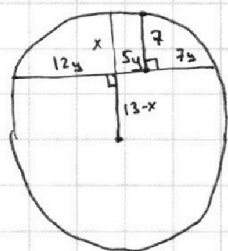
$$169 - 144y^2 = 169 + x^2 - 26x$$

$$x^2 + 144y^2 = 26x$$

$$y = \frac{\sqrt{x(26-x)}}{12}$$

$$25y^2 + 400 + x^2 - 40y = 144y^2 + 169 + x^2 - 26x$$

$$14x + 119y^2 = 231$$



$$50 + 2x^2 + 20x - 2$$

$$(50 + 2x^2 + 20x)(1 - \cos \alpha) = 50 + 10x$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{25 + 5x}{25 + x^2 + 10x} = \frac{5(5 + x)}{(5 + x)^2} = \frac{5}{5 + x}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{5 + x}$$

$$a, b \geq 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = 1 - 9x$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$a - \sqrt{a} = b - \sqrt{b}$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} = a^2 + b^2 -$$

$$a^2 + a - 2\sqrt{ab}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14,5$$

$$y_2 = 14 + 2x_1$$

$$0;0$$

$$0;14$$

$$0;0$$

$$1;16$$

$$x + y + z = 34$$

$$z = 23$$

$$x = 16$$

$$y = 0$$

$$x + y = 15$$

$$y + z = 17$$

$$z + x = 23$$

$$ab: 2^{15} 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} 7^{39}$$

$$2^{23} 7^{39}$$

$$2^{23} 7^{39}$$

$$2^{23} 7^{39}$$

$$2^{23} 7^{39}$$

$$z - x = 2$$

$$x - y = 6$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

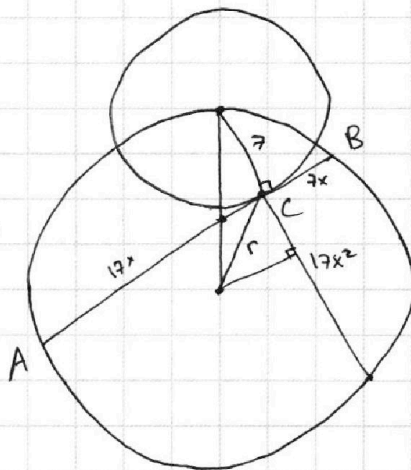
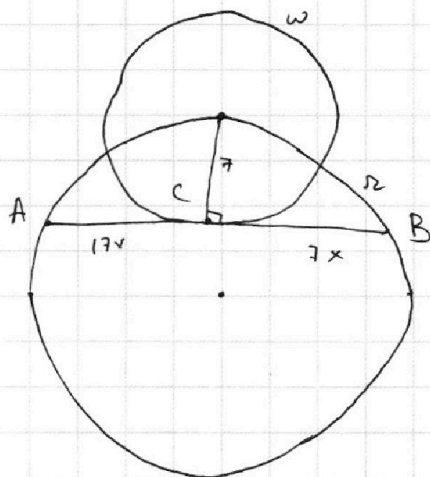
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$17x \cdot 7x = 13^2 - 7^2$$

$$r = \sqrt{169 - 119x^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$7x \sin \alpha$$

$$\frac{17x - \frac{7}{\tan \alpha}}{26 - \frac{7}{\sin \alpha}} = \frac{(17x - 7) \sin \alpha}{(26 \sin \alpha - 7) \tan \alpha} =$$

$$\frac{7}{\sin \alpha} : (7x + \frac{7}{\tan \alpha}) = \frac{1}{x \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\frac{17x \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{26 \sin \alpha - 7} = \frac{\cos \alpha + x \sin \alpha}{x \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{17x \tan \alpha - 7}{26 \sin \alpha - 7} \cdot \cos \alpha = \frac{17x \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{26 \sin \alpha - 7} = \frac{1}{x \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$$

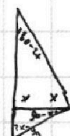
$$\frac{\sqrt{49 + 49x^2}}{\sqrt{17x^2 + 17^2x^4}} = \frac{7}{17x}$$

$$\frac{7}{17x} = \frac{7x}{y}$$

$$y = 17x^2$$



$$\frac{1 + 17x^2}{x^2 + 17x^4} = \frac{1}{x^2}$$



$$90 - x = 180 - 2x \quad x = 90$$

$$\frac{7 \cdot 2}{7 + 17x^2} = \frac{y}{13}$$

$$y = \frac{182}{7 + 17x^2}$$

$$7^2 + r^2 - 2 \cdot 7 \cdot r \cdot \cos \alpha = 13^2$$

$$7^2 - 119x^2 - 2 \cdot 14 \cdot r \cdot \cos \alpha = 0$$

$$7 - 17x^2 - 2r \cos \alpha = 0$$

$$2r \cos \alpha = 7 - 17x^2$$

$$\cos \alpha = \frac{7 - 17x^2}{2 \sqrt{13^2 - 119x^2}}$$

$$r^2 + 17^2x^4 + 2 \cdot 17x^2 \cdot \cos \alpha = 13^2$$

$$r^2 + 17^2x^4 + 2 \cdot 17x^2 \cdot \cos \alpha = 13^2$$

$$7^2 - 14r \cos \alpha = 17^2x^4 + 2 \cdot 34x^2 \cdot \cos \alpha$$

$$7(7 - 2r \cos \alpha) = 17x^2(17x^2 + 2r \cos \alpha)$$

$$\frac{14}{13} \cdot \frac{42}{182}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{9}{65 - \frac{72}{56}}$$

$$\frac{9}{5} = 1 \frac{4}{5}$$

$$a+b \quad 9ab \quad a+b : 9$$

$$a^2 + b^2 - 7ab = a^2 + b^2 + 2ab - 9ab = (a+b)^2 - 9ab$$