



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a \cdot b \cdot c$  делится <sup>хотя бы</sup> на  $7^{37}$ , потому что  $ac : 7^{37}$   
Пусть  $abc \neq 2^{26}$ , тогда: степень вхождений "2" в "abc"  $< 26$   
 $ab \cdot bc \cdot ac : 2^{14} \cdot 2^{17} \cdot 2^{20} = 2^{51}$

Тогда  $a^2 b^2 c^2 : 2^{51}$ , так как  $a^2 b^2 c^2$  — точный  
квадрат натурального числа, то  $a^2 b^2 c^2 : 2^{52}$ .

Значит  $\sqrt{a^2 b^2 c^2} = abc : \sqrt{2^{52}} = 2^{26}$

Значит  $abc : 2^{26}$ , а мы предположили что  
 $abc \neq 2^{26}$  — противоречие

Тогда  $abc : 7^{37} \cdot 2^{26} \Rightarrow abc \geq 7^{37} \cdot 2^{26}$

Пример, когда  $abc = 7^{37} \cdot 2^{26}$ :

$a = 2^8 \cdot 7^{10}$ ;  $b = 2^6 \cdot \text{---}$ ;  $c = 2^{12} \cdot 7^{24}$

Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$  - несократима, значит  $\text{НОД}(a; b) = 1$

Пусть  $a+b : p$ , где  $p$  - натуральное число ( $p > 1$ )

Тогда  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$  и  $b \not\equiv 0 \pmod{p}$ , т.к.  $\text{НОД}(a; b) = 1$

Значит  $a \equiv -b \pmod{p}$ , тогда  $a^2 \equiv b^2 \pmod{p} \Rightarrow a^2 + b^2 \equiv 2b^2 \pmod{p}$

$a \cdot b \equiv b \cdot (-b) \equiv -b^2 \pmod{p}$ , тогда  $-6ab \equiv 6b^2 \pmod{p}$

Значит  $a^2 + b^2 - 6ab \equiv 2b^2 + 6b^2 \equiv 8b^2 \pmod{p}$

Тогда  $(a+b) : m$  и  $(a^2 + b^2 - 6ab) : m$

Тогда  $a^2 + b^2 - 6ab$  при  $p = m$ :  $a^2 + b^2 - 6ab \equiv 8b^2 \equiv 0 \pmod{m}$

$\text{НОД}(a; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; b^2) = 1$

Тогда  $b^2 : m$ , значит  $m \leq 8$

Пример  $m = 8$ :

$$a = 1 \quad b = 7$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{2x^2 + 2x + 1 = a}$$

$$\text{Пусть } 2x^2 + 2x + 1 = a ; 2 - 4x = b$$

$$\text{Тогда } 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 - 7x + 2 = a - b$$

$$\sqrt{a-b} - \sqrt{a} = b \quad \backslash \text{ возведем в квадрат}$$

$$a - b + a - 2\sqrt{(a-b)a} = b^2$$

$$b^2 - 2a + b = -2\sqrt{a(a-b)} \quad \backslash \text{ возведем в квадрат}$$

$$b^4 + 4a^2 + b^2 + 2b^3 - 4ab - 4ab^2 = 4a(a-b)$$

$$b^4 + 2b^3 + b^2 - 4ab^2 = 0$$

$$b^2(b^2 + 2b + 1 - 4a) = 0$$

Тогда:

$$1) b^2 = 0$$

$$2 - 4x = 0$$

$$x = \frac{2}{4}$$

$$2) b^2 + 2b + 1 = 4a$$

$$(b+1)^2 = 4a$$

$$\cancel{4x^2 + 9 - 4x} = 4(2x^2 + 2x + 1)$$

$$4x^2 - 36x = 0$$

$$a = \frac{(b+1)^2}{4}$$

$$\text{Тогда } \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4} - b} - \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4}} = b$$

$$\sqrt{\frac{(b-1)^2}{4}} - \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4}} = b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Если } b \geq 1, \text{ то } \frac{b-1}{2} - \frac{b+1}{2} = b$$
$$b = -1 - \cancel{\emptyset}$$

$$\text{Если } -1 \leq b \leq 1, \text{ то } \frac{1-b}{2} - \frac{b+1}{2} = b$$
$$-b = b \Rightarrow b = 0 - \text{случай рассмотрим}$$

$$\text{Если } b < -1, \text{ то } \frac{1-b}{2} + \frac{1+b}{2} = b$$
$$1 = b - \cancel{\emptyset}$$

Тогда корень  $x = \frac{2}{7}$ .

Подставим

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1 - \frac{7 \cdot 2}{7} + 2} - \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1} = 2 \cdot \frac{7 \cdot 2}{7}$$

$0 = 0$  — подходит

Ответ:  $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

для  $n = 2p$  ~~тоже~~ точек внутри параллелограмма  
или  $\frac{y_p - y_0}{2} + 1 = 13$  (на одной прямой)  
для  $n = 2p + 1$   $\frac{y_p - y_0}{2} = 12$

Тогда всего пар:

$$4 \cdot 13^2 + 3 \cdot 12^2 = 676 + 432 = 1108 \text{ штук}$$

Ответ: 1108.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим прямые вида  $y = -2x + k$ , где  $k = \frac{n}{2}$ , при  $n \in \mathbb{N}$

Тогда эти прямые параллельны сторонам  $PO$  и  $QR$  нашего параллелограмма.

На каждой такой прямой, ~~получается~~

~~для~~ выражение  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = \text{const}$ , где  $(x_2, y_2)$  и  $(x_1, y_1)$  — координаты двух точек с этой

прямой;  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 2x_2 - 2x_1 + (-2x_2 + k) - (-2x_1 + k)$   
 $= 0$

Все значения на такой прямой одинаковы.

Значит если нам нужна разность „12“, то соответственно нам подойдут все пары точек с 2 разных прямых для которых:

$$2x_2 - 2x_1 + (-2x_2 + l) - (-2x_1 + m) = l - m = 12$$

То есть сдвиг одной прямой относительно другой по оси  $x$  — равен 12.

Таких <sup>пар</sup> прямых внутри параллелограмма:

при  $n = 2p$  ~~и~~  $p \in \mathbb{N}$ :  $x_R - x_0 - 12 + 1 = 4$

при  $n = 2p + 1$   $p \in \mathbb{N}$ :  $x_R - x_0 - 12 = 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

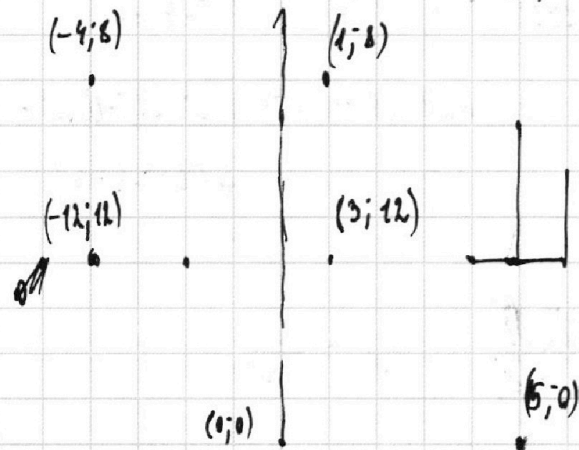


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O(0;0)$      $P(-12;24)$      $R(3;24)$      $R(15;0)$     2?

$P'(-4;8)$      $Q'(1;8)$      $R'(5;0)$



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 12$$

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$S_{KB} - S_{KA} = 12$$

$$y = 2x + k$$

$$-2x_2 + k + 2x_1 - k + 2x_2 - 2x_1$$

~~const~~

$$-2x_2 + k + 12$$

48 3м

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ \times 13 \\ \times 169 \\ \hline 686 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ \times 4 \\ \hline 36 \\ 24 \\ \hline 4 \quad 76 \end{array}$$

$$a+b = p$$

$$a^2 + b^2 = 2b^2$$

$$p(a+b) = a^2 - 6ab + b^2$$

$$\frac{1+7}{1+49-6 \cdot 7} = \frac{8}{50-42} = 1$$

$$a^2 = b^2$$

$$a = -b$$

~~1+8~~

$$\frac{1+8}{1-6 \cdot 8+64}$$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ \times 3 \\ \hline 432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 4 \\ \times 169 \\ \hline 36 \\ 24 \\ \hline 4 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = b - a$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} = a^2 + b^2 - 2ab$$



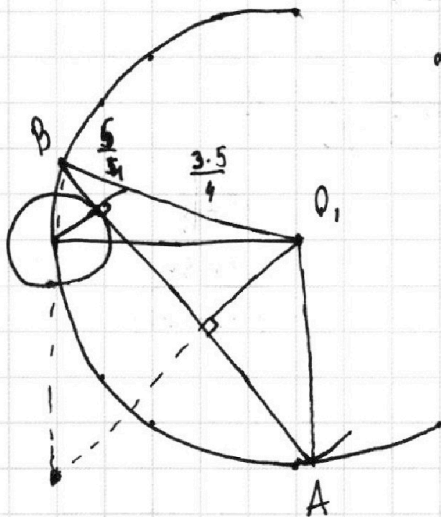
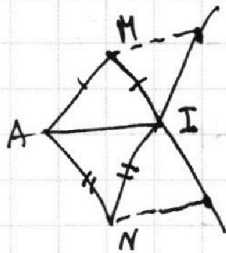
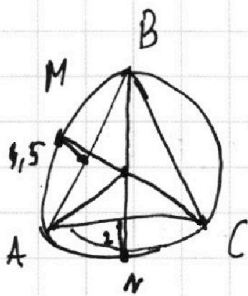
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} y = ax + 19b \\ ((x+b)^2 + (ax+10b)^2 - 1)(x^2 + (ax+10b)^2 - 4) \leq 0 \\ (x^2 + 16x^2 + 64 + (ax)^2 + 20axb + 100b^2 - 1)(x^2 + (ax)^2 + 20axb + 100b^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{O_2 Y}{1} = \frac{\sin \beta}{\sin \beta} \quad O_2 Y = \frac{1}{\sin \beta}$$

$$a^{da} \quad b^{db} \quad c^{dc} \quad + \frac{49}{51}$$

$$d_a + d_b \geq 14$$

$$d_b + d_c \geq 17$$

$$d_a + d_c \geq 20$$

$$d_a + d_b + d_c \geq 26$$

$$3a + 3b + 3c \geq 32$$

$$ab : 2^{14}$$

$$bc : 2^{17}$$

$$ac : 2^{20}$$

$$a : 7 \quad b : 7 \quad c : 13 \quad l = 6$$

$$a = 8 \quad c = 12$$

~~and~~

$$d_a = 14 - d_b$$

$$14 + d_c - d_b \geq 20$$

$$d_c - d_b \geq 6$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$a : 7^{10} \cdot 2^{14}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$c : 7^{17} \cdot 2^{17}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$b : 1$$

$$x^2 = a^2 + a^2 - 2 \cos 60^\circ \cdot a^2$$



$$\text{НОД}(a; b) = 1$$

$$\frac{a+b \mid p}{(a-b)^2 - 4ab}$$

$$a \equiv -b \pmod{p}$$

$$a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$$

$$6ab \equiv 6 \cdot (-b) \pmod{p}$$

$$4a^2 + b^2 + 6ab \equiv 2b^2 + 6b^2 \equiv 8b^2 \pmod{p}$$

$$8b^2 \equiv 0 \pmod{p} \quad 8a^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$OC^2 = 25 + 49x^2 - 14 \cdot \frac{5}{5} x^2 = 25 + 49x^2 - 56x^2$$

$$OC^2 = OB^2 + x^2 - 2 \cos d \cdot OB \cdot x$$

$$OC^2 = OA^2 + 7x^2 - 2 \cos d \cdot OA \cdot x$$

$$x^2 - 2 \cos d \cdot OB \cdot x = 49x^2 - 14 \cos d \cdot OA \cdot x$$

$$48x^2 - 12x \cdot \cos d \cdot 5 = 0$$

$$48x = 60 \cos d$$

$$4x = 5 \cos d$$

$$\cos d = \frac{4x}{5}$$

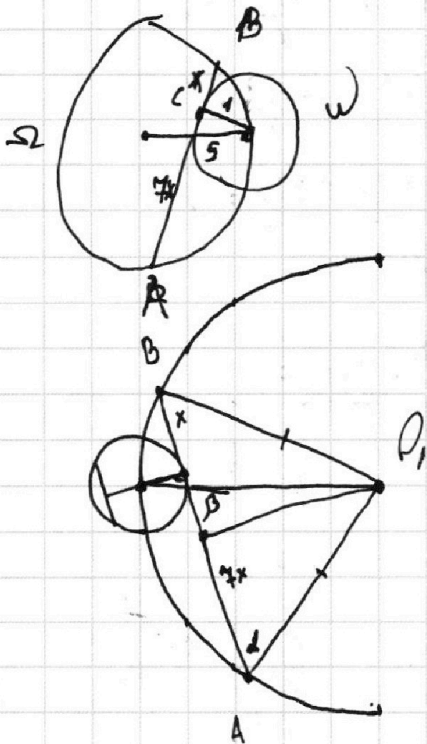
$$OC^2 = 5^2 + x^2 - 2 \cdot \frac{4}{5} x \cdot 5 \cdot x$$

$$OC^2 = 25 - 8x^2 + x^2 = 25 - 7x^2$$

$\frac{1}{4} l$

$$\deg_{\Omega} C = -7x \cdot x = OC^2 - OB^2 =$$

$$\Rightarrow -7x^2 = 25 - 7x^2 - 25$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$2x^2-5x+3 + 2x^2+2x+1 - 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 4-28x+49x^2$$

$$49x^2 - 4x^2 + 3x - 28x = -2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)}$$

$$45x^2 - 25x = -2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)}$$

$$5x(9x-5)$$

$$25x^2(9x-5)^2 = 4(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)$$

$$\sqrt{2x^2+2x+1-7x+2} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\sqrt{a-b} - \sqrt{a} = b \quad \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4}-b} - \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4}} = b$$

$$a-b+a-2\sqrt{a(a-b)} = b^2 \quad \sqrt{\frac{(b-1)^2}{4}} - \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4}} = b$$

$$b^2+b-2a = 2\sqrt{a(a-b)} \quad \frac{b-1}{2} - \frac{b+1}{2} = b$$

$$b^4+b^2+4a^2+2b^3-4ab^2-4ab = 4a(a-b)$$

$$b^4+b^2+2b^3-4ab^2-4ab+4a^2-4a^2+4ab = 0$$

$$b^4+b^2+2b^3-4ab^2 = 0$$

$$b^2(b^2+2b+1-4a) = 0$$

$$(3-7x)^2$$

9 -

$$a = \frac{(b+1)^2}{4}$$

$$(b^2+1)^2 = 4a \quad (3-7x)^2 = 4(2x^2+2x+1) \quad \frac{(b+1)^2}{4} = a$$

$$(2-7x)^2 = 4(2x^2+2x+1)$$

$$9+49x^2-42x = 8x^2+8x+4$$

$$\sqrt{\frac{(b-1)^2}{4}}$$

$$41x^2 - 50x + 5 = 0$$

$$D_1 = 25^2 - 5 \cdot 41 = 5(125 - 41) = 5 \cdot 84$$